4° Acad. 78 fa (math. phys. Kl. 13

<36619821640017

<36619821640017

Bayer. Staatsbibliothek

S


AUS FEUER UND WASSER GERETTET
BEIM GROSSEN BRANDE DER
BAYERISCHEN STAATSBIBLIOTHEK
IM MÄRZ DES KRIEGSJAHRES 1943
J. STAEGER

Phad. 78 fa (22
Abhandlungen

G. TH. FECHNER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

UEBER DIE FRAGE
DES
WEBER'SCHEN GESETZES
UND
PERIODICITAETSGESETZES

IM GEBIETE DES ZEITSINNES.

22
13
1887

~~Des~~ XIII. Band~~es~~ der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

~~№ I.~~

Abhandlungen
K. sächs. Ges.
13
1887

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1884.-87

78 Gm

378 D

ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ERSTER BAND. (I. Bd.)*) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. brosch. Preis 13 ℳ 60 ₰.

A. F. MÖBIUS, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. Mit 1 Tafel. 1849. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von α. 1849. 1 ℳ 20 ₰.

A. SEEBECK, Ueber die Querschwingungen elastischer Stäbe. 1849. 1 ℳ.

C. F. NAUMANN, Ueber die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 1849. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1851. 3 ℳ.

F. REICH, Neue Versuche mit der Drehwaage. 1852. 2 ℳ.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum Florentiner Problem. Mit 1 Tafel. 1852. 1 ℳ 60 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus). Mit 1 Tafel. 1852. 2 ℳ.

ZWEITER BAND. (IV. Bd.) Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. brosch. Preis 20 ℳ.

M. W. DROBISCH, Ueber musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 4 ℳ.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 3 ℳ.

—— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 3 ℳ.

O. SCHLÖMILCH, Ueber die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 80 ₰.

—— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Die Theorie des Aequatoreals. 1855. 2 ℳ 40 ₰.

C. F. NAUMANN, Ueber die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 1 ℳ.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft. 1855. 2 ℳ.

DRITTER BAND. (V. Bd.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 5 ℳ.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 1 ℳ 60 ₰.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 2 ℳ 40 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: Ueber der Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 6 ℳ.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 4 ℳ.

VIERTER BAND. (VI. Bd.) Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. brosch. Preis 22 ℳ 50 ₰.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 4 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: Ueber die thermo-elektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 2 ℳ 40 ₰.

—— Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: Ueber Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 6 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 2 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 8 ℳ.

FÜNFTER BAND. (VII. Bd.) Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. brosch. Preis 24 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: Ueber das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 7 ℳ 20 ₰.

G. T. FECHNER, Ueber einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 5 ℳ 60 ₰.

G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Ueber Seitenknospen bei Farnen. 1860. 3 ℳ.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 8 ℳ.

SECHSTER BAND. (IX. Bd.) Mit 10 Tafeln. hoch 4. 1864. brosch. Preis 19 ℳ 20 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 1 ℳ 60 ₰.

—— Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 1 ℳ 20 ₰.

P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 9 ℳ.

G. METTENIUS, Ueber den Bau von Angiopteris. Mit 10 Tafeln. 1863. 4 ℳ 40 ₰.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere über elektrische Schwingungen. 1864. 3 ℳ.

*) Die eingeklammerten römischen Ziffern geben die Zahl des Bandes in der Reihenfolge der Abhandlungen beider Classen an.

ABHANDLUNGEN

ZWEIUNDZWANZIGSTER BAND.

ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZWEIUNDZWANZIGSTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



DREIZEHNTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

INHALT.

G. Th. Fechner, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes S. 1

—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes - 109

W. Braune und O. Fischer, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. . . . - 313

F. Klein, Ueber die elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe - 337

C. Neumann, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ - 401

W. His, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten - 477

H. Bruns, Ueber eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung - 515

Rud. Leuckart, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Tafeln - 565

C. Neumann, Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Erste Abhandlung . - 705

UEBER DIE FRAGE

DES

WEBER'SCHEN GESETZES

UND

PERIODICITAETSGESETZES

IM GEBIETE DES ZEITSINNES

VON

G. TH. FECHNER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1884.

Vom Verfasser übergeben den 23. April 1884.
Der Abdruck vollendet den 20. Juni 1884.

UEBER DIE FRAGE
DES
WEBER'SCHEN GESETZES
UND
PERIODICITAETSGESETZES

IM GEBIETE DES ZEITSINNES

VON

G. TH. FECHNER.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

I. Eingang.

Dr. Estel hat im psycho-physiologischen Institut von Prof. Wundt eine experimentale Untersuchung bezüglich der Titelfragen dieser Abhandlung angestellt*), woraus er die Schlüsse zieht: 1) dass das Weber'sche Gesetz im Gebiete des Zeitsinnes keine Gültigkeit hat; 2) dass der von Wundt sogenannte mittlere Schätzungsfehler Δ sich mit wachsender Hauptzeit periodisch vergrössere und verkleinere.

Nun lässt sich das Weber'sche Gesetz in gewissem Sinne als das Hauptgesetz der ganzen Psychophysik ansehen, wonach die Frage von selbstverständlichem Interesse ist, ob sich seine, bezüglich der Empfindlichkeit für Reizunterschiede in engeren oder weiteren Grenzen constatirte, Gültigkeit auch auf den Zeitsinn, hiemit von intensiver auf extensive Empfindlichkeit erstrecke. Ich selbst habe früher diese Frage auf Grund der Versuche von Mach, Vierordt und Kollert bejahend beantwortet; aber lässt sich diese Bejahung den neuen Versuchen des Verf. gegenüber noch halten? Von anderer Seite ist die Periodicität eines psychophysischen Elementes, womit die Periodicität von andern Elementen, wenn auch vom Verf. nicht nachgewiesen, doch nachweislich zusammenhängt, ein so merkwürdiges und unerwartetes Resultat, dass sie nicht minder die grösste Aufmerksamkeit verdient und die schärfste Prüfung in Anspruch nimmt; aber hat sie diese Seitens des Verf. wirklich gefunden?

Nun habe ich von vornherein anzuerkennen, dass die Sorgfalt in Anstellung der Versuche seitens des Verf. und die Güte der

*) Zuerst als Doctordissertation erschienen, hienach in Wundt's »Philos. Stud.« II. p. 37 ff. aufgenommen.

Wundt'schen Methode, nach welcher derselbe gearbeitet hat, sich vortrefflich dadurch bewährt haben, dass sich wirklich sehr bestimmte Resultate über obige Fragen aus den Versuchen des Verf. ziehen lassen; nur, seltsam, sind es gerade die entgegengesetzten Resultate, die ich bezüglich der einen wie anderen Frage daraus zu ziehen vermöchte, als der Verf. zieht; und zwar bezüglich beider aus einem einfach anzugebenden Hauptgrunde, dem sich allerdings noch manche Nebengründe zufügen: dass ich nämlich den an sich unvermeidlichen Versuchszufälligkeiten, welche das Gesetz stören und den Schein der Periodicität erzeugen, eine Beachtung schenke, die ihnen der Verfasser versagt hat. Zieht man sie ab oder compensirt sie, so weit es nach den vorliegenden Datis möglich ist, so ziehen sich so zu sagen von selbst die entgegengesetzten Schlüsse, als der Verfasser zieht, indem er die Versuchszufälligkeiten als wesentliche Versuchsresultate in den Kauf nimmt, eine nöthige Mittelziehung theils versäumt, theils untriftig vornimmt, und die Elimination eines constanten Fehlers nicht erforderlich durch seine Untersuchung durchführt. Zieht man aber diese Puncte in gehörige Rücksicht, so ergiebt sich statt einer Widerlegung vielmehr eine erwünschte Bestätigung des Weberschen Gesetzes bis auf die, dem Zeitgebiete mit andern Gebieten gemeinsame, untere Abweichung, die schon früher zugestanden war, und der Schein einer wesentlichen, d. i. gesetzlichen, Periodicität schwindet.

Indem ich nun Beides dem Verf. gegenüber darzuthun suche, hat sich zugleich Anlass gefunden, über die blosse Kritik seiner Arbeit nach manchen, die Massverhältnisse des Zeitsinnes betreffenden, Beziehungen hinauszugehen, welche mir einer Erörterung und Klarstellung noch bedürftig erschienen, was eine nicht unerhebliche Erweiterung dieser Abhandlung herbeigeführt hat.

Eine vorläufige Bekanntschaft mit Versuchen und Aufgaben von Versuchen über den Zeitsinn ist dabei im Allgemeinen vorausgesetzt, nachdem dies Feld schon früher mehrfach behandelt worden ist. Auch sei in Betreff der äusseren Einrichtung der Versuche auf die Abhandlung des Verf. selbst verwiesen.

Wo Seitenverweisungen in dieser Abhandlung vorkommen, beziehen sie sich mit S. auf diese Abhandlung selbst, mit p. aber andershin. — Einschaltungen in wörtlich citirten Stellen aus der

Abhandlung des Verf. oder andern Autoren sind in runde oder eckige Klammern eingeschlossen, je nachdem sie den betreffenden Autoren selbst oder mir angehören.

II. Ueber die allgemeinere Tragweite des Weber'schen Gesetzes im Gebiete des Zeitsinnes.

Mit dem Interesse, dass durch die Sicherstellung des Weber-schen Gesetzes im Gebiete des Zeitsinnes die Herrschaft dieses Gesetzes überhaupt und die Kenntniss des Zeitsinnes selbst sich erweitert, verbindet sich meines Erachtens noch ein viel allgemeineres Interesse, nämlich dass die sog. psychophysische Ansicht des Weber-schen Gesetzes und folgweise der ganzen Psychophysik dadurch eine wichtige Stütze gegenüber der sog. physiologischen Ansicht gewinnt. Die wesentlichen Unterschiede beider, noch im Streit begriffenen, Ansichten sind von mir in meiner »Revision« p. 221 ff. besprochen; hier wird es genügen, sich darauf zu beziehen, dass nach der psychophysischen Ansicht gleiche V e r h ä l t n i s s e, nach der physiologischen gleiche U n t e r s c h i e d e psychophysischer Thätigkeit oder Erregung den Eindruck gleicher psychischer Unterschiede mitführen, woraus dann weiter folgt, dass nach erster die psychische Thätigkeit logarithmisch von der psychophysischen abhängt, nach letzterer beide einander proportional gehen; psychophysische Thätigkeit ist aber nichts Anderes, als materielle, physische, physiologische Thätigkeit, insofern psychische davon abhängig gedacht wird. So weit ich es übersehe nämlich, finden Einwände, welche im Felde der Empfindlichkeit für Reize gegen die psychophysische Auffassung des Weber'schen Gesetzes erhoben sind, im Felde des Zeitsinnes von vornherein keinen Angriff, und ich erläutere es durch folgende Betrachtung.

Rücksichtslos auf die, unserer directen Erkenntniss entzogene, psychophysische Thätigkeit erscheinen nach dem Weber'schen Gesetze factisch die Unterschiede zwischen zwei Reizen derselben Art, bei Aenderung ihrer absoluten Stärke, immer gleich gross, nicht, wenn ihre Unterschiede, sondern wenn ihre Verhältnisse gleich gross bleiben. Nun kann man unstreitig nicht von der Gültigkeit des Gesetzes im einen Felde auf dessen Gültigkeit in einem anderen schliessen, also auch nicht von dessen Gültigkeit im Felde intensiver Empfindungen

auf dessen Gültigkeit im Felde extensiver Empfindungen, noch umgekehrt, wohl aber schliessen, nachdem dasselbe in beiden Gebieten eine unabhängige Begründung durch Erfahrung gefunden hat, dass dasselbe sich gemeinsamen Gesichtspuncten in beiden unterordne, zumal wenn es in beiden Gebieten in einen entsprechenden Zusammenhang anderer wichtiger Momente eintritt. In der That aber steht im Gebiete der Reizempfindlichkeit mit dem Weber'schen Gesetze die Thatsache der Reizschwelle und Unterschiedsschwelle in Verbindung; ein zu kleiner Reiz und ein zu kleiner Reizunterschied entgehen der Auffassung durch die Empfindung; dasselbe aber, was vom intensiven Reize, gilt von der zeitlichen Extension; eine zu kleine Zeit schwindet für die Auffassung in den Zeitpunkt oder in Nichts zusammen; ein zu kleiner Zeitunterschied wird nicht mehr erkannt.

Nun kann nach physiologischer Auffassung das Weber'sche Gesetz im Gebiete der Empfindlichkeit für Reize entweder nur als ein fundamentales bestritten werden, was doch so zu sagen von Tage zu Tage schwerer wird (namentlich nach den wiederholten und ausgedehnten Bewährungen desselben im Gebiete des Schalles), oder sein Zustandekommen nur dadurch erklärt werden, dass bei Fortpflanzung der Reizwirkung ins Innere sich gleiche Reizverhältnisse in gleiche Unterschiede psychophysischer Erregung übersetzen, um der Proportionalität zwischen psychophysischer und psychischer Thätigkeit zu genügen. Für eine solche Uebersetzung giebt es nun zwar kein bekanntes physikalisches oder physiologisches Princip (vergl. »Revision« p. 225 ff.); immerhin kann man eine darauf hinauslaufende Hypothese machen, und hat sie gemacht. Nun müsste man aber auch, um das Zustandekommen des Gesetzes im Gebiete des Zeitsinnes entsprechend zu erklären, annehmen können, dass Zeitintervalle zwischen äusserlich gemachten Eindrücken, die in gleichem Verhältnisse zu einander stehen, sich bei Uebertragung aus dem Aeusseren ins Innere in gleiche Zeit-Unterschiede psychophysischer Erregung übersetzen, wieder, um der von der physiologischen Ansicht geforderten Proportionalität zwischen psychophysischer und psychischer Erregung zu entsprechen; aber, wenn zwei Glockenschläge draussen um eine Secunde differiren, werden auch die Eindrücke, welche die psychophysische Thätigkeit davon erfährt, um

eine Secunde differiren, womit die vorige, d. i. physiologische Auffassung nicht bestehen kann, nach welcher gleiche Unterschiede der innern Zeiten statt gleichen Unterschieden vielmehr gleichen Verhältnissen der äussern entsprechen müssten. Nach der physiologischen Auffassung kommt ferner die Reizschwelle nur dadurch zu Stande, dass ein zu schwacher Reiz gar nicht aus dem Aeusseren bis zum Sensorium eindringt. Was hindert aber ein noch so kleines Zeitintervall zwischen Eindrücken, die bis zum Sensorium gelangen, mit bis dahin zu gelangen?

Man kann vielleicht gegen die vorige Betrachtung einwenden, dass die Zeit bei psychophysischer Betrachtung der Verhältnisse zwischen physischer (psychophysischer) und psychischer Seite gar keine Stelle auf physischer Seite finde, sondern blos auf die psychische gelegt werden könne; aber dieselbe, äusserlich durch die Uhr gemessene, Zeit kann, auf die psychophysische Erregung übertragen, psychisch länger oder kürzer erscheinen; und diese Beziehung ist Gegenstand psychophysischer Betrachtung, wobei es also doch eine physische und psychische Seite der Zeit zu unterscheiden gilt.

Hingegen wird man Recht damit haben: dass eine längere Zeit zwischen zwei Eindrücken nicht wegen ihrer abstracten, leeren, physischen Grösse, sondern wegen der grösseren Summe psychophysischer Thätigkeit, die sie enthält, grösser erscheint; dabei gleiche Art und Intensität derselben vorausgesetzt. Der Einwand gegen die physiologische Ansicht aber ändert sich nicht, wenn wir ihn, statt auf die Zeit selbst, auf die damit proportionale Summe psychophysischer Thätigkeit beziehen, welche in der Zeit enthalten ist.

Mancherlei Puncte, welche in das Feld dieser Betrachtungen einschlagen, werden noch im VIII. Abschnitt, nach Erledigung der experimentalen Seite der Frage des Weber'schen Gesetzes, zur Sprache zu bringen sein.

III. Methode der Minimaländerungen. Bezeichnung und gegenseitige Beziehung der dadurch zu erhaltenden Werthe.

Da alle Werthe, mit denen wir folgends zu thun haben, durch die vom Verf. befolgte Methode der Minimaländerungen Wundt's

sei es direct erhalten, oder von den dadurch erhaltenen Werthen abhängig sind, und nur mit Bezug auf diese Entstehungsweise klar und richtig gefasst werden können, so möge die kurze authentische Erklärung Wundt's selbst über diese Methode aus s. »Philos. Stud.« I. 558 hieher wörtlich übertragen werden, nur dass ich zur directen Beziehung auf unser Versuchsfeld sein r (Reiz) durch t (Zeitgrösse) ersetze.

»Die Methode der Minimaländerungen besteht in dem folgenden systematischen Verfahren: Bezeichnen wir den constanten Normalreiz mit t, und den variabeln Vergleichsreiz mit t', so wird zuvörderst t' gleich t genommen. Dann wird t' durch unmerkliche Zwischenstufen so lange verstärkt, bis eben $t' > t$ erscheint. Dieser Punct wird aufgezeichnet, aber zur Sicherstellung desselben t' noch etwas weiter verstärkt. Hierauf wird t' allmälig geschwächt, bis eben so der Punct, wo $t' = t$ erscheint [als zu zweit aufzuzeichnender], erreicht und [hiernach des Weiteren] überschritten ist. Man hat auf diese Weise zwei Werthe, die wir mit t_o' und t_o'' bezeichnen wollen, und zu denen man den Mittelwerth $t_o = \frac{t_o' + t_o''}{2}$ bestimmt. In ähnlicher Weise geht man nun von dem Puncte $t' = t$ nach abwärts, indem man t' kleiner als t werden lässt, bis man wieder durch unmerkliche Abstufungen den Punct erreicht hat, wo $t' < t$ erscheint, und von hier wird endlich wieder bis zur scheinbaren Gleichheit von t' mit t zurückgegangen. Aus den so erhaltenen Werthen, die wir mit t_u', t_u'' bezeichnen wollen, wird ein Mittelwerth $t_u = \frac{t_u' + t_u''}{2}$ berechnet« *).

In Betreff der vorigen, dem Verf. mit Wundt gemeinsamen und sonst von ihm gebrauchten, Bezeichnungen schliesse ich mich, abgesehen von den ausdrücklich zu bemerkenden Ausnahmen, ganz dem Verf. an, habe aber einige Bezeichnungen für Werthe, die bei ihm nicht vorkommen, hinzuzufügen, was doch in der Hauptsache auf die Stellen, wo davon Gebrauch zu machen, verspart werden kann, und zunächst nur Folgendes zu registriren:

*) Die vom Verf. selbst p. 40 gegebene kurze Schilderung des Verfahrens stimmt, abgesehen von dem blos formellen Unterschiede, dass er in dem von ihm gegebenen Beispiele Verkleinerung und Vergrösserung in umgekehrter Ordnung als oben folgen lässt, mit der obigen wesentlich überein.

Zeiteinheit überall die Secunde,

t die Hauptzeit, mit welcher die sog. Vergleichszeit t' verglichen wird,

$d_o = t_o - t$ und $d_u = t - t_u$ die obere und untere Unterschiedsschwelle, d. s. »die Zuwüchse, die man t ertheilen muss, damit dies dem betreffenden Beobachter merklich grösser oder kleiner erscheine«, und:

t_o, t_u die so erscheinenden Vergleichszeiten selbst, deren Entstehung als Mittel je zweier Beobachtungswerthe, resp. t_o', t_o'' und t_u', t_u'' oben angegeben ist.

Zu Vorigem die Bemerkung, dass der Verf. die untere Unterschiedsschwelle d_u nicht, wie so eben von mir geschehen, $= t - t_u$, sondern $= t_u - t$ setzt, womit sich das Vorzeichen gegen unsern Gebrauch umkehrt. Die Motivirung unseres Gebrauches wird unten folgen; der Gebrauch des Verf. aber ist um so auffälliger, als Wundt, dessen Verfahren der Verfasser doch einhält, unsern nicht seinen Gebrauch theilt (»Philos. Stud. I. p. 559). Sachlich verschiedene Folgerungen zwischen dem Verf. und mir gehen übrigens nicht aus unserer verschiedenen Gebrauchsweise des Vorzeichens hervor.

$T = \frac{t_o + t_u}{2}$ nach dem Verf. »der Zeitwerth, welcher in unserem Bewusstsein der Hauptzeit t entspricht«, von Wundt (»Philos. Stud.« I. 563) als »Schätzungswerth der Zeit« bezeichnet.

$\varDelta = T - t = \frac{t_o + t_u}{2} - t = \frac{d_o - d_u}{2}$, von Wundt als mittler Schätzungsfehler bezeichnet. — Wo $\varDelta$ negative Werthe annimmt, setzt der Verf. $\varDelta -$ dafür.

Die Ausdrucksweise von $\varDelta$ durch $\frac{d_o - d_u}{2}$ finde ich zwar weder bei Wundt noch beim Verf. ausdrücklich notirt, wohl, weil sie keinen Anlass fanden, auf die dadurch ausgedrückte Bedeutung von $\varDelta$ Rückgang zu nehmen, nach welcher dieser Werth einfach als halber Unterschied zwischen oberer und unterer Unterschiedsschwelle erklärt werden kann. Man kommt aber leicht auf den betreffenden Ausdruck, indem man die in $\varDelta$ eingehenden Werthe t_o, t_u respective in $t + d_o$ und $t - d_u$ übersetzt. Die Vernachlässigung der Bedeutung,

welche dem Δ hiernach zukommt, Seitens des Verf., wird sich doch im Folgenden sehr fühlbar machen*).

Indifferenzpunct der Werth von t, bei welchem Δ Null wird, wo also $d_0 = d_u$, $\frac{t_0 + t_u}{2} = t$ ist.

Dieser Punct wird vom Verf. p. 57 für den Punct erklärt, »an welchem die Zeitschätzung am genauesten sei«, was sich aber sachlich keinesfalls halten lässt. Denn unstreitig haben wir die Schätzung für so genauer zu halten, je weniger der Vergleichswerth t' von der zu schätzenden Zeit t in plus oder minus abweicht, d. i. je kleiner nach einer Seite d_0, nach der anderen d_u ist. Nun könnten aber beide sehr gross und mithin die Schätzung nach beiden Seiten sehr ungenau sein, so würde man doch $\Delta = 0$ haben, wenn beide nur gleich sind. Also wird meines Erachtens der sog. Indifferenzpunct nur charakteristisch für die beiden solidarisch zusammenhängenden Puncte sein: 1) dass die beiden, in ihrem allgemeinen Gange bezüglich t von einander abweichenden, Unterschiedsschwellen sich am Indifferenzpuncte in Gleichheit begegnen; 2) dass das Mittel der beiden Schätzungswerthe t_0, t_u mit dem Hauptwerthe t übereinstimmt.

Nun kann man vielleicht dieser Bemerkung entgegenhalten, dass die Ungleichheit von d_0 und d_u überhaupt nur durch Versuchsfehler eingeführt werde, und man in dem Puncte, wo beide gleich werden, zugleich die richtigen Werthe beider erhalte; ja dass das Verfahren der Minimaländerungen eben darauf abziele, durch Combination der Versuche nach Oben und Unten die von einseitiger Vergleichsrichtung abhängigen Fehler zu eliminiren, was nun eben bezüglich der Richtigstellung der Unterschiedsschwellen durch den Werth derselben beim Indifferenzpuncte zu geschehen habe. Inzwischen ist Zweies gegen zu bemerken: 1) dass, da der Unterschied d_0 bei gegebenem t im

*) Beiläufig gehört hierher Folgendes: Auf p. 47 bemerkt der Verf.: »dass bei Zeitschätzungen der gefundene Unterschiedsschwellenwerth d_0 oder d_u von dem zugehörigen Werthe von Δ abhängt und in Rücksicht auf diese Abhängigkeit berichtigt werden müsse, um den wahren Unterschiedsschwellenwerth zu erlangen.« Dieser Stelle aber lässt sich nach obiger zweifelsfreier Gleichung $\Delta = \frac{d_0 - d_u}{2}$ kein Sinn abgewinnen, da umgekehrt Δ von d_0 und d_u zugleich abhängt. Nach späteren Erörterungen (Abschn. XI) bedürfen sowohl d_0 als d_u einer Correction, von der dann auch die von Δ, aber nicht umgekehrt, abhängt.

Ganzen zwischen grösseren Werthen stattfindet, als der Unterschied d_u, jener nämlich zwischen (dem grösseren) t_o und t, dieser zwischen demselben t und (dem kleineren) t_u, dass, sage ich, beide als abhängig von der Höhe der t-Scale, in der sie sich befinden, principiell verschieden sein müssen, mithin die an sich richtigen Werthe von d_o und d_u nicht mit der Gleichheit beider, also auch nicht mit $\varDelta = 0$ zusammenfallen können; 2) dass mit der Gleichheit der Werthe d_o, d_u, welche bei $\varDelta = 0$ stattfindet, nicht nur nichts dafür bewiesen ist, dass beide kleiner als bei irgendwelchen anderen t-Werthen sind, mithin der genauesten Schätzung entsprechen, sondern dass dies auch mit der directen Erfahrung nicht stimmt*).

Die vorigen Bemerkungen führen dazu, die Bezeichnung von $\varDelta$ als »mittleren Schätzungsfehler« überhaupt misslich, weil leicht missverständlich, finden zu lassen. Denn zunächst scheint sie freilich vollständig durch die Betrachtungsweise selbst motivirt, der sie ihren Ursprung verdankt: d. i.. wir schätzen beim Verfahren der Minimaländerungen einmal t (nahe) gleich t_o, anderemale, und zwar gleich oft, gleich t_u, im Mittel also gleich $T = \frac{t_o + t_u}{2}$, und die Abweichung dieses mittleren Schätzungswerthes von der zu schätzenden Zeit t giebt nun den mittleren Schätzungsfehler $\varDelta$. Nichts scheint hiernach rationeller als diese Bezeichnung. Dennoch liegt folgende, von der vorigen ganz abweichende und jedenfalls nicht weniger Anspruch auf Beachtung machende, Bedeutung eines mittleren Schätzungsfehlers viel näher: Ein Werth (t) sei an sich gleich 10, aber werde einmal gleich 15 ($= t_o$), das anderemal gleich 5 ($= t_u$) geschätzt, so wird man natürlich jeden beider Schätzungsfehler sowie das Mittel derselben gleich 5 nehmen, und den mittleren Schätzungsfehler da-

*) Siehe Kollert's Versuche in »Philos. Stud.« I. 82 ff., wo die Unterschiedsschwellen d_o, d_u mit d_2, d_1 bezeichnet sind. Hier findet sich z. B. beim Beobachter W der Werth $\varDelta = 0{,}001$ also merklich $= 0$ bei $t = 0{,}8$, mit $d_2 = 0{,}075$ und $d_1 = 0{,}072$ also bei merklicher Gleichheit beider, wie es der Indifferenzpunct fordert. Aber diese gleichen Werthe sind keineswegs zugleich die kleinsten; sondern bei $t = 0{,}7$; $0{,}5$; $0{,}4$ hat man d_1 respective $= 0{,}043$; $0{,}053$; $0{,}023$; also alle kleiner als beim Indifferenzpunct $t = 0{,}7$, und d_2 ist $= 0{,}057$ bei $t = 0{,}7$ und $= 0{,}066$ bei $t = 1{,}2$, also auch kleiner als bei $t = 0{,}8$. Eben so ist $d_o + d_u$ nicht allgemein am kleinsten am Indifferenzpunkte, wo $d_o = d_u$, sondern z. B. für W gleich $0{,}129$ bei $t = 0{,}4$, und $= 0{,}100$ bei $t = 0{,}7$, hingegen $0{,}147$ beim Indifferenzpunct $0{,}8$.

durch bezeichnet finden können; wogegen der mittlere Schätzungsfehler nach Wundt $= \frac{15+5}{2} - 10 = 0$ sein und gar keine Beziehung zur Fehlerhaftigkeit der Schätzung haben wird. Gesetzt ferner, die Abweichungen nach beiden Seiten von 10 seien ungleich, indem etwa der eine Schätzungswerth 15, der andere 7 betrüge, so würde nach unserer natürlich scheinenden Fassung der mittlere Schätzungsfehler $= \frac{(15-10)+(10-7)}{2} = 4$, nach der Wundt-schen Fassung $\frac{15+7}{2} - 10 = 1$ sein. Und so würde allgemein nach der natürlichsten Fassung der mittlere Schätzungsfehler statt $\frac{d_o - d_u}{2} = \frac{t_o + t_u}{2} - t$ vielmehr $= \frac{d_o + d_u}{2} = \frac{t_o - t_u}{2}$ zu nehmen sein, wovon letztere Gleichung sich wieder leicht ergiebt, wenn man d_o in $t_o - t$ und t_u in $t - t_u$ übersetzt.

Inzwischen lassen wir immerhin dem $\Delta = \frac{d_o - d_u}{2}$ die Bezeichnung »mittler Schätzungsfehler«, da sie zugleich das obige Motiv und die Priorität vor $\frac{d_o + d_u}{2}$ für sich hat, so bleibt jedenfalls hinsichtlich der sachlichen Bedeutung gewiss, dass nicht $\frac{d_o - d_u}{2}$, sondern $\frac{d_o + d_u}{2}$ (nach reciprokem Werthe) massgebend für die mittlere Unterschiedsempfindlichkeit ist, und dass die grösste Genauigkeit der Schätzung nicht bei dem sog. Indifferenzpuncte zu suchen ist, wo $\Delta = \frac{d_o - d_u}{2}$ gleich Null ist, sondern wo $\frac{d_o + d_u}{2}$ ein Minimum ist.

Hiernach bleiben noch folgende Bezeichnungen zu registriren übrig:

$v_o = \frac{t_o}{t}$ und $v_u = \frac{t}{t_u}$ die obere und untere Verhältnissschwelle,

$v = \sqrt{v_o v_u} = \sqrt{\frac{t_o}{t}}$ die mittlere Verhältnissschwelle. Sie ist nicht als arithmetisches sondern als Verhältnissmittel bestimmt, weil v_o, v_u selbst Verhältnisse sind (vergl. »Revis.« p. 399).

Hieraus fliessen weiter

$$t_o = v_o t\,; \qquad t_u = \frac{t}{v_u}$$

$$d_o = (v_o - 1)\,t\,; \qquad d_u = \frac{v_u - 1}{v_u}\,t$$

$$\Delta = \frac{\left(v_o + \frac{1}{v_u} - 2\right)}{2}\,t\,.$$

Endlich noch folgende von mir selbst gewählte Bezeichnungen: w_o, w_u, w die obere, untere und mittlere relative Unterschiedsschwelle, und zwar:

$$w_o = \frac{d_o}{t} = v_o - 1 \ ; \quad w_u = \frac{d_u}{t_u} = v_u - 1 \ ; \quad \sqrt{\frac{d_o}{t} \cdot \frac{d_u}{t_u}} = \sqrt{(v_o - 1)(v_u - 1)} \ ,$$

hiernach

$$v_o = w_o + 1 \ ; \qquad v_u = w_u + 1 \ ; \qquad v = \sqrt{(w_o + 1)(w_u + 1)} \ .$$

Ueber die Weise, wie die unteren Schwellen gegenüber den oberen zu fassen sind, hat bisher noch nicht überall hinreichende Klarheit geherrscht, und es dürften daher einige Bemerkungen darüber nützlich sein. So hat Tischer in seiner Abhandlung über die Schallversuche die untere relative Unterschiedsschwelle als $\frac{d_u}{t}$ gegenüber der oberen als $\frac{d_o}{t}$ gefasst, während erstere vielmehr als $\frac{d_u}{t_u}$ zu fassen ist (»Revis.« p. 397 ff.), und unser Verf. setzt bemerktermassen die einfache untere und obere Unterschiedsschwelle einander als negative und positive gegenüber, während beide als positiv zu fassen sind, was natürlich nicht ausschliesst, dass, wenn das positive d_u in Abzug kommt, dies durch das Zeichen — angezeigt werde, wie in dem vorhin besprochenen $\Delta = \frac{d_o - d_u}{2}$. Ich denke aber, dass, wenn man anders consequent sein will, folgende Gesichtspunkte als massgebend zu gelten haben.

Man nimmt die obere Unterschiedsschwelle d_o nach Convention als positiv an, indem man sie dadurch erhält, dass man den kleineren Werth t vom grösseren t_o, nicht umgekehrt, abzieht, und wird dann, um sich im Vorzeichengebrauch treu zu bleiben, auch die untere Unterschiedsschwelle d_u positiv zu nehmen haben, indem man den kleineren Werth t_u vom grösseren, nicht umgekehrt, abzieht; also:

$$d_o = t_o - t \ ; \qquad d_u = t - t_u$$
$$t_o = t + d_o \ ; \qquad t_u = t - d_u \ , \quad \text{nicht} = t + d_u \ \text{(Estel)} \ .$$

Zu demselben Resultat führt folgende Betrachtung. Wir können für den vorliegenden Zweck die Unterschiedsschwelle als den Unterschied zwischen zwei Werthen, wie t und t', erklären, der nicht überschritten werden kann, ohne erkannt zu werden. Dabei ist es an sich gleichgültig, ob wir den Unterschied als $t - t'$ oder $t' - t$ fassen: es handelt sich jedenfalls nur um die absolute Grösse des

nicht überschreitbaren Unterschiedes; und nachdem die Convention besteht, absolut gefasste Grössen mit positivem Vozeichen zu behaften, werden wir dies auch consequent mit der Unterschiedsschwelle als Differenz zwischen t und t' zu thun haben. Anders bei Beobachtungsfehlern, zwelche zwar auch Unterschiede zwischen zwei Werthen, einem gegebenen Werthe und einem Fehlerwerthe, sind; wo wir aber positive und negative Fehler unterscheiden, weil hier das Interesse und die ausdrückliche Aufgabe darauf geht, mit der Grösse auch die Richtung der Abweichung bezüglich des gegebenen Werthes zu bestimmen. Hingegen steht es an sich eben so frei, die Unterschiedsschwelle als Abweichung des Vergleichswerthes t' vom gegebenen Werthe t wie umgekehrt zu nehmen, nur dass die Consequenz fordert, sie nicht einmal als Abweichung des grösseren vom kleineren, das andere Mal als Abweichung des kleineren vom grösseren Werthe zu fassen.

Entsprechend wie mit den absoluten Unterschiedsschwellen d_o, d_u verhält es sich nun auch mit den relativen w_o, w_u. Nachdem die Convention besteht, die obere relative Unterschiedsschwelle w_o dadurch zu bilden, dass man den Unterschied d_o mit dem kleineren der beiden Werthe t, t_o, wozwischen er besteht, dividirt, wird man auch die untere relative Unterschiedsschwelle w_u dadurch zu bilden haben, dass man den Unterschied d_u mit dem kleineren der beiden Werthe t, t_u, wozwischen er besteht, d. i. mit t_u dividirt, wonach

$$w_o = \frac{d_o}{t}\,; \qquad w_u = \frac{d_u}{t_u}\,, \quad \text{nicht} = \frac{d_u}{t} \text{ (Tischer)}$$

Sofern nun $d_o = t_o - t$ und $d_u = t - t_u$, hat man dann auch

$$w_o = \frac{t_o - t}{t} = v_o - 1\,; \qquad w_u = \frac{t - t_u}{t_u} = v_u - 1\,,$$

d. h. die obere und untere relative Unterschiedsschwelle werden erhalten, wenn man respective von der oberen und unteren Verhältnissschwelle 1 abzieht; und wohl durch Analogie hiermit verleitet, setzt nun auch der Verf. ohne Weiteres p. 64 die mittlere relative Unterschiedsschwelle w gleich der mittleren Verhältnissschwelle weniger 1, d. i. $= \sqrt{v_o v_u} - 1 = v - 1$. Wenn aber die einfachen relativen Unterschiedsschwellen w_o, w_u respective $= v_o - 1$ und $v_u - 1$ sind, so ist die mittlere consequenterweise $= \sqrt{(v_o - 1)(v_u - 1)}$, was

von $\sqrt{v_o v_u} - 1$ ganz abweicht und gar nicht darauf zurückführbar erscheint. Nun wird sich zwar weiterhin (Abschnitt X) zeigen lassen, wie sich mittelst einer, auch aus anderen Gesichtspuncten geforderten Correction der aus den directen Beobachtungswerthen fliessenden v_o, v_u jener Analogie doch genügen und die betreffende Zurückführung in aller Strenge bewirken lässt; zunächst aber bleibt der Widerspruch dagegen bestehen. Dies führt auf folgenden Punct von allgemeinerer Wichtigkeit.

Alle bisherigen Bezeichnungen und Gleichungen sind überhaupt auf die betreffenden Werthe zu beziehen, wie sie unmittelbar aus den Versuchen hervorgehen oder aus Analyse und mathematischer Verknüpfung der so gewonnenen Werthe fliessen. Voran stehen in dieser Beziehung mit dem in dem Versuch gegebenen t die Beobachtungswerthe t_o, t_u, wenn man nicht gar auf deren Componenten t_o', t_o'', t_u', t_u'' zurückgehen will. Von den beobachteten t_o, t_u unter Zuziehung der gegebenen t hängen dann weiter die d_o, d_u, Δ, v_o, v_u, w_o, w_u und deren Mittelwerthe im Sinne der angegebenen Gleichungen ab. Denn in der That sind t_o, t_u nicht durch Zusammensetzung von t mit abgesondert zu beobachtenden d_o, d_u bestimmt, sondern d_o, d_u sind durch Analyse von t_o, t_u in $t + d_o$, $t - d_u$ hervorgegangen. Nun führt aber nicht nur der betreffende Widerspruch, sondern führen (nach Abschn. X) noch fundamentaler andere Umstände zu der Annahme, dass die Werthe t_o, t_u als unmittelbare Versuchsergebnisse noch mit einem Versuchsfehler behaftet sind, von dem sie erst befreit oder hinsichtlich dessen sie, wie ich sage, corrigirt werden müssen, um zu einfachen Gesetzlichkeiten zu kommen, und auf reine Unterschiedsempfindlichkeit bezogen werden zu können, eine Correction, die von den t_o und t_u sich auch auf alle davon abhängigen Werthe zu erstrecken hat, wonach uncorrigirte oder rohe und corrigirte oder reine Werthe zu unterscheiden sind. Hierauf beziehen sich eingehende Erörterungen in späteren Abschnitten (X, XI); vorweg aber möchte ich Folgendes bemerken.

Der Verf. selbst geht bei der Prüfungsfrage des Weber'schen Gesetzes (p. 63) auf die Möglichkeit des betreffenden Fehlers und dessen Eliminirbarkeit sachgemäss ein, lässt aber die Rücksicht darauf bei Verfolgung der Verhältnisse und des Ganges der Δ, worin sich seine Abhandlung hauptsächlich bewegt, ganz bei Seite, und hierin

finde ich zu seiner Nichtberücksichtigung der Zufälligkeiten einen zweiten Grund, seiner Behandlung des vorliegenden Thema nicht zustimmen zu können, da ich in der That in den von ihm als $\frac{t_o+t_u-2}{2}t$ bestimmten Δ nur rohe Werthe sehe, die erst durch Correction der t_o, t_u in reine verwandelt werden müssen, um für den Zeitsinn massgebende Bedeutung zu erlangen, womit sich die Verhältnisse der Δ und der damit functionell zusammenhängenden Werthe ganz und gar ändern und einfacheren Gesetzlichkeiten fügen.

IV. Untersuchungsmaterial und Versuchstabellen.

Die zur Unterlage der folgenden Untersuchung dienenden Versuche des Verf. zerfallen in zwei Hauptgruppen, die sich durch etwas veränderte Anordnung, andere Beobachter und dadurch unterscheiden, dass in der ersten, 1881 angestellten, zwischen der Hauptzeit t und Vergleichszeit t' ein der Hauptzeit gleiches Intervall δ gelassen wurde, wogegen bei der zweiten, 1882 angestellten, das Zwischenintervall δ ganz weggelassen wurde, so dass der zweite Schlag der Hauptzeit t zugleich als der erste Schlag der Vergleichszeit t' galt.

An den Versuchen erster Gruppe betheiligten sich nicht weniger als sechs Beobachter, S (Schmerler), W (Wundt), We (Wendel), E (Estel), Tr (Trautschold), P (Papperitz); an denen der zweiten, abgesehen von einigen hier nicht zur Sprache zu bringenden Nebenreihen, blos drei, H (Hansen), Tr (Trautschold) und T (Tischer). Der Verf. selbst betheiligte sich bei letzterer gar nicht als Beobachter, sondern bediente nur den Apparat und notirte die Angaben der Beobachter, was nicht hindern wird, die Gesammtheit dieser Versuche, als von ihm vertreten, in seiner Abhandlung registrirt und bearbeitet, kurz als Estel'sche zusammenzufassen.

Die Versuche erster wie zweiter Gruppe theilen sich in sog. normale und anomale. Schon Kollert nämlich hatte bei früheren Versuchen über den Zeitsinn*) Anlass gefunden, beiderlei nach dem verschiedenen Gange, welchen die Δ darin nehmen, zu unterscheiden, unser Verfasser aber, dem sich nicht minder ein solcher

*) Wundt's »Philos. Stud.« I. 78 ff. (1881).

Unterschied sogar in doppeltem Sinne darbot, fand bei näherer Untersuchung des Grundes dieses Unterschiedes denselben darin beruhend, dass die normalen Versuche contrastfrei, die anomalen hingegen durch den Contrast mit früheren Versuchen, welche mit grösseren oder kleineren t angestellt waren, beeinflusst sind, worauf unten bei Mittheilung der anomalen Reihen zurückzukommen. Dabei wird sich zeigen lassen, dass die anomalen, trotz dieses Einflusses, hinsichtlich unserer Fragen wesentlich zu denselben Ergebnissen führen, als die normalen.

Es würde nun hinreichen, auf die Versuchstabellen des Verf. als schon vorliegende Unterlagen der folgenden Untersuchung zu verweisen und dadurch diese Abhandlung abzukürzen, wenn die Daten der Tabellen in einer für die Hauptzwecke unserer Untersuchung geeigneten Form und Zusammenstellung dargeboten wären; da dies aber nicht der Fall ist, werden wir sie demgemäss umgestaltet reproduciren müssen. Es kommt nämlich Folgendes in Betracht. Unterscheiden wir G e s a m m t r e i h e n als solche, woran sich eine Mehrheit verschiedener Beobachter betheiligen, und S p e c i a l r e i h e n als solche, welche, in Unterordnung unter die vorigen, für die einzelnen Beobachter insbesondere gelten, so sind die Versuchstabellen des Verf. für jede Gesammtreihe in die der Specialreihen gegliedert; und in jeder dieser Reihen sind zu einer Reihe von t's die zugehörigen d_o, d_u und Δ gegeben; sofern aber diese grossentheils ein Mittel mehrerer Bestimmungen sind, ist auch die Zahl dieser Bestimmungen als n hinzugefügt. Hierzu kommen endlich noch die Abweichungen $\delta\Delta$ der für die verschiedenen Beobachter geltenden Δ vom Mittel Δ_m derselben, und bei den anomalen Reihen noch Werthe t_c, deren Bedeutung weiterhin anzugeben sein wird.

Diese Einrichtung der Tabellen mag nun für den Hauptzweck des Verf., die Verhältnisse der Δ, welche unmittelbar von den d_o, d_u abhängen, zu untersuchen, als die geeignetste erschienen sein. Da aber für uns diesem Zweck noch voransteht, die Gültigkeit des W e b e r'schen Gesetzes für den Zeitsinn aus der Constanz der mittleren Verhältnissschwelle $v = \sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$ oder dem um 1 verminderten Werthe derselben bei aufsteigendem t nachzuweisen, diese Schwelle aber unmittelbar vielmehr von t_o, t_u als von d_o, d_u abhängt, muss

es auch für uns zweckmässiger erscheinen, in die Tabellen, auf die wir uns zu stützen haben, die t_o, t_u als die d_o, d_u aufzunehmen; und so wird dies auch im Folgenden geschehen, was übrigens nicht hindert, von den t_o, t_u und zugehörigen t nach den Gleichungen $d_o = t_o - t$ und $d_u = t - t_u$ auf die d_o, d_u und hiermit auf die Tabelleneinrichtung des Verf. zurückzukommen*). Die $\varDelta$ übergehe ich zunächst, um später, wo ich meinerseits auf die Verhältnisse der $\varDelta$ eingehe, deren Angabe, so weit als nöthig schien, nachzuholen, und gebe dafür in den Tafeln der Mittel die aus den t_o, t_u folgenden v_o, v_u und $v - 1$ mit einem Werthe $p = \sqrt{\frac{v_u}{v_o}} = \frac{t}{\sqrt{t_o t_u}}$, dessen wichtige Bedeutung als Correctionsfactor roher Werthe später (Abschnitt X. XI) erhellen wird.

Eine zweite, für unsern Hauptzweck wesentliche Umänderung der Tabelleneinrichtung des Verf. liegt in folgendem Puncte. An sich hindert nichts, sei es die d_o, d_u oder t_o, t_u durch die Reihe der t's in jeder Specialreihe eines Beobachters besonders zu verfolgen, und die daraus abzuleitenden v oder $v - 1$ betreffs ihrer Constanz bei aufsteigenden t besonders zu prüfen; aber theils würde die Durchführung hiervon durch eine Mehrheit von Specialreihen sehr umständlich sein und zu wenig übersichtlichen Resultaten führen, theils würden die zufälligen Fehler, die den Werthen jeder Specialreihe noch anhaften, nicht die durch Mittelziehung mögliche Compensation erfahren, und man schliesslich eine Nebeneinanderstellung unsicherer Resultate erhalten. Also ziehe ich vor, aus den t_o, t_u der verschiedenen Beobachter Mittelwerthe zu ziehen, und hiernach die zugehörigen v oder $v - 1$ zu bestimmen, auf deren Constanz bei verschiedenen t sich die Prüfung richtet. Da nun aber der Verf. die Specialreihen jeder Gesammtreihe in besonderen Tabellen aufführt, so fallen hiermit deren t_o, t_u aus einander, und die Mittelziehung daraus wird unbequem. Also vereinige ich alle Specialreihen derselben Gesammtreihe in eine einzige H a u p t t a b e l l e a) so, dass

*) Abgesehen von besonderen Zweckmotiven, welche dazu bestimmen können, vielmehr die d_o, d_u oder t_o, t_u in die Versuchstabellen aufzunehmen, verdient letztere, von mir bevorzugte Aufnahme jedenfalls, allgemein gesprochen, insofern den Vorzug, als nicht die d_o, d_u, sondern t_o, t_u direct aus den Versuchen hervorgehen, aber die d_o, d_u erst als $t_o - t$ und $t - t_u$ daraus folgen.

die für die verschiedenen Beobachter geltenden Werthe t_o, t_u, welche demselben t zugehören, unter einander zu stehen kommen, was eine leichte Summirung und Mittelziehung daraus gestattet. Hier und da fehlen aber Beobachtungen dieses oder jenes Beobachters für dieses oder jenes t, wo dann die Lücke durch einen blossen Strich von mir ausgefüllt wird.

Die kleinen Ziffern über den Zahlen der t_o in der Haupttabelle a) bedeuten die Zahl der Bestimmungen, das n, aus welchem die Angabe des betreffenden Beobachters für dieses t_o gewonnen ist. Dasselbe n, was für t_o gilt, gilt dann auch stets für das in Zusammenhang damit beobachtete t_u und die aus beiden abzuleitenden Werthe, ohne noch besonders angegeben zu sein.

Kürze halber führe ich die hier vorzuführenden Gesammtreihen als No. 1, No. 2 u. s. w. auf unter Verweisung auf die römischen Nummern der Originaltabellen, aus denen sie abgeleitet sind. Voran steht unter jeder Nummer die Haupttabelle a), welche als Wiedergabe der von den einzelnen Beobachtern direct beobachteten Werthe angesehen werden kann; dann folgen unter b) c) eine oder zwei Tabellen der aus der Tabelle a) abgeleiteten Tabellen der Mittel.

Die Tabellen der Mittel gebe ich sei es für alle Beobachter und alle t's, die in der Gesammtreihe vorkommen, wenn alle Specialreihen der Gesammtreihe lückenlos bezüglich der t's sind, oder nur für den Theil der Beobachter und t's, bezüglich deren sich keine Lücken finden, wo vielmehr zu allen in Betracht zu nehmenden t's auch Daten von allen in Betracht zu nehmenden Beobachtern vorliegen, um nicht unvergleichbare Mittel für die verschiedenen t's zu erhalten. Der Verf. freilich verfährt in dieser Beziehung anders und zieht überhaupt, wie auch schon früher Kollert, die Mittel in anderer Weise als von mir geschieht, einer Weise, die meines Erachtens nur gerechtfertigt sein würde, wenn alle Beobachter, aus deren Datis die Mittel zu ziehen, dieselbe Unterschiedsempfindlichkeit, hiermit, abgesehen von Zufälligkeiten, dasselbe d_o, d_u hätten, was sich doch nach den Ergebnissen des folgenden Abschnittes sehr anders verhält. Hierauf wird im VI. Abschnitt noch besonders zurückzukommen sein.

Aus den Tabellen der Mittel kann man sich nun schon vorläufig überzeugen, ob die, den verschiedenen t zugehörigen $v - 1$ der vom

Weber'schen Gesetze geforderten Constanz so weit entsprechen, dass die Abweichungen davon auf einen Rest unausgeglichener Zufälligkeiten geschoben werden können. Im Abschnitt VIII aber wird noch eine besondere Zusammenstellung der Ergebnisse der verschiedenen Reihen in dieser Beziehung gegeben und auf Erörterungen darüber eingegangen werden; indess die Verhältnisse der p auf Grund der folgenden Mitteltabelle in einem anderen Abschnitt (X) besprochen werden sollen.

Von den, in der Abhandlung des Verf. mit römischen Ziffern bezeichneten Versuchstabellen sind folgends die kleineren Tabellen IX, XVIII, XIX und die grösseren X, XI unberücksichtigt geblieben, die ersten drei, weil sie blos zu ergänzenden oder Nebenbestimmungen dienen, auf die für uns kein Anlass sein wird, besonderen Rückbezug zu nehmen, letztere zwei (anomal), weil sie für die einzelnen Beobachter zu lückenhaft sind, und fraglich, ob zu $<$ oder $>$ gehörig. Die übrigen, von mir folgends nur in anderer Form reproducirten Tabellen des Verf. aber gewähren schon für sich ein reiches Untersuchungsmaterial bezüglich unserer Fragen, indem sie sich theils auf Reihen erster, theils zweiter Gruppe, also mit und ohne Zwischen-δ, theils auf normale, theils anomale Reihen, also ohne und mit Contrasteinfluss, beziehen. Sie gehen von $t = 1{,}5$ bis $t = 8{,}0$ und gewähren, wie man sehen wird, in dieser grossen Ausdehnung eine zufriedenstellende Bewährung des Weber'schen Gesetzes und einen genügenden Anhalt, die Periodicitätsfrage zu untersuchen. Inzwischen lassen die früheren Kollert'schen Versuche, in den »Philos. Stud.« I. 1881, p. 82 ff., mit Hauptzeiten von $t = 0{,}4$ bis 1,2 oder 1,5, allerdings an eine für sehr kleine Hauptzeiten stattfindende untere Abweichung vom Weber'schen Gesetze denken, wofür auch frühere Versuche von Mach und Vierordt sprechen, und so sind die dahin gehörigen Kollert'schen Reihen folgends nach den Estel'schen mit aufgenommen. Sie sind wesentlich nach demselben Verfahren als die Estel'schen erster Gruppe, also mit Zwischen-$\delta = t$, theils normal, theils anomal, unter Betheiligung von sechs Beobachtern dabei, angestellt. Diese Versuche sind zwar schon in »Revis.« p. 422 von mir berücksichtigt, aber damals noch nach den von Kollert selbst gezogenen Mittelzahlen.

No. 1. II bis VIII, p. 41 ff., normal, mit δ, 6 Beobachter S, W, We, E, Tr, P. t = 1,8 bis 8,0.

a) Haupttabelle.

	t	1,8	2,0	2,7	2,75	2,85	3,0	3,7	4,0	5,5	6,0	8,0
t_o	S	$\overset{2}{1{,}8458}$	—	—	$\overset{2}{2{,}8303}$	—	—	$\overset{2}{3{,}7688}$	—	$\overset{1}{5{,}6834}$	$\overset{1}{6{,}1000}$	$\overset{1}{8{,}2000}$
	W	$\overset{1}{1{,}8458}$	—	$\overset{1}{2{,}8554}$	$\overset{2}{2{,}8761}$	—	—	$\overset{1}{3{,}9292}$	—	$\overset{1}{5{,}4541}$	$\overset{3}{6{,}0889}$	—
	We	$\overset{1}{1{,}8000}$	$\overset{1}{2{,}150}$	—	$\overset{2}{2{,}7844}$	$\overset{1}{3{,}0152}$	$\overset{1}{3{,}1000}$	$\overset{3}{3{,}8528}$	—	—	$\overset{3}{6{,}2278}$	$\overset{3}{8{,}2050}$
	E	$\overset{1}{1{,}8500}$	$\overset{1}{2{,}150}$	$\overset{1}{2{,}8110}$	$\overset{1}{2{,}7958}$	$\overset{1}{2{,}8972}$	$\overset{3}{3{,}0833}$	$\overset{2}{3{,}8375}$	$\overset{1}{4{,}2000}$	$\overset{1}{5{,}5459}$	$\overset{4}{6{,}0531}$	$\overset{2}{8{,}2000}$
	Tr	—	$\overset{2}{2{,}0250}$	—	—	—	$\overset{2}{3{,}0750}$	—	$\overset{3}{4{,}1170}$	—	$\overset{2}{6{,}1000}$	—
	P	$\overset{3}{1{,}9333}$	$\overset{2}{2{,}1250}$	—	—	—	$\overset{2}{3{,}0750}$	—	$\overset{2}{4{,}0500}$	—	—	—
t_u	S	1,5822	—	—	2,2686	—	—	3,1269	—	4,8122	5,2000	6,6500
	W	1,5478	—	2,3004	2,2686	—	—	3,0133	—	4,4454	5,0318	—
	We	1,5937	1,7000	—	2,4491	2,3547	2,5500	3,1043	—	—	4,9318	6,4007
	E	1,5000	1,7500	2,3892	2,2915	2,2816	2,4834	3,0357	3,5500	4,5830	5,1091	6,9250
	Tr	—	1,7750	—	—	—	2,4500	—	3,3000	—	5,1250	—
	P	1,5334	1,7250	—	—	—	2,4750	—	3,3250	—	—	—

Diese Tabelle ist, wie man sofort aus den vielen — übersieht, sehr lückenhaft, was ihre Verwerthung zu Mitteltabellen sehr einschränkt. Blos E (Estel) hat bei allen 11 t's beobachtet, demnächst folgt We (Wendel), der blos bei $t = 2{,}7$, $4{,}0$, $5{,}5$ Beobachtungen vermissen lässt. Also gebe ich unter b) eine Mitteltabelle für We und E bezüglich auf die 8 t's, die ihnen gemeinsam sind; und unter c) eine zweite Mitteltabelle für S und W bezüglich der 5 t's, die ihnen gemeinsam sind.

b) Mittel für We und E.

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v - 1$	p
1,8	1,8250	1,5469	1,0139	1,1636	0,0862	1,0713
2,0	2,1500	1,7250	0750	1594	1164	0385
2,75	2,7901	2,3703	0146	1602	0850	0694
2,85	2,9562	2,3182	0373	2294	1293	0887
3,0	3,0917	2,5167	0306	1920	1084	0755
3,7	3,8452	3,0700	0393	2052	1192	0769
6,0	6,1405	5,0201	0234	1952	1060	0807
8,0	8,2025	6,6129	0253	2098	1132	0862
30,1						

c) Mittel für S und W.

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v - 1$	p
1,8	1,8458	1,5650	1,0254	1,1502	0,0860	1,0591
2,75	2,8532	2,2686	0376	2122	1215	0809
3,7	3,8490	3,0701	0403	2052	1197	0763
5,5	5,5687	4,6288	0126	1882	0969	0833
6,0	6,0945	5,1159	0158	1728	0915	0745
19,75						

No. 2. XII. XIII. XIV. p. 52. 53, normal, ohne δ.
3 Beobachter, H, Tr, T, $t = 1,5$ bis 5,0.

a) Haupttabelle.

t		1,5	2,0	2,25	2,5	3,0	3,5	3,75	4,0	4,5	5,0
t_o	H	^{4} 1,583	^{10} 2,105	^{3} 2,350	^{2} 2,575	^{1} 3,100	^{1} 3,700	—	^{5} 4,120	^{2} 4,600	^{2} 5,075
	Tr	^{4} 1,596	^{7} 2,100	—	^{6} 2,692	^{4} 3,237	^{5} 3,710	^{2} 4,050	^{6} 4,192	—	^{2} 5,050
	T	^{3} 1,592	^{9} 2,138	^{2} 2,400	^{2} 2,675	^{2} 3,225	^{3} 3,600	^{5} 4,010	^{8} 4,225	—	^{2} 5,475
t_u	H	1,342	1,785	2,067	2,225	2,700	2,900	—	3,520	4,025	4,300
	Tr	1,288	1,764	—	2,150	2,500	2,940	3,175	3,435	—	4,225
	T	1,311	1,724	1,975	2,150	2,575	3,033	3,150	3,375	—	3,950

b) Mittel für H, Tr, T.

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v-1$	p
1,5	1,5903	1,3137	1,0602	1,1428	0,1002	1,0376
2,0	2,1143	1,7577	0572	1379	0968	0375
2,5	2,6473	2,1750	0589	1494	1032	0419
3,0	3,1873	2,5917	0624	1576	1090	0439
3,5	3,6700	2,9577	0496	1834	1139	0619
4,0	4,1790	3,4433	0447	1617	1017	0545
5,0	5,2000	4,1583	0400	2024	1183	0753
21,5						

No. 3. Anomale Reihen. XV. XVI. XVII. p. 53. 54, ohne δ, dieselben drei Beobachter H, Tr, T als unter No. 2. $t = 1,5$ bis 5,0.

Während die vorigen Reihen sog. normale waren, sind die folgenden sog. anomale. Ueber den Unterschied beider aber ist Folgendes vorauszuschicken.

Bemerktermassen führt der Verf. den Unterschied der anomalen Reihen von den normalen darauf zurück, dass die ersteren durch eine Contrastwirkung beeinflusst sind, welche sich von früheren Versuchen mit einem t, dass der Verf. als t_c bezeichnet, auf die späteren

erstreckt, die anderen nicht. Bei den ersten, den anomalen, Reihen aber kann man zweierlei Fälle unterscheiden, erstens, wo die t und t_o sowie t und t_u, welche als Elemente der anormalen Reihen auftreten, durch den Contrast mit einem ihnen vorangehenden kleineren Werthe t_c beeinflusst sind, und dadurch im Allgemeinen für die Auffassung vergrössert erscheinen; zweitens, wo die betreffenden t und t_o, t und t_u durch den Contrast mit einem ihnen vorangehenden grösseren t_c beeinflusst sind und dadurch im Allgemeinen für die Auffassung verkleinert erscheinen, ein Unterschied, der mitbringt, und damit selbst den empirischen Beweis der Contrastwirkung liefert, dass die t_o so wie t_u, welche unter den ersten Fall treten, im Allgemeinen grösser sind als die ihnen entsprechenden, welche unter den zweiten Fall treten. In Ausnahmefällen findet freilich auch das Umgekehrte statt, was man dann als Fälle scheinbar umgekehrten Contrastes ansehen kann, die unstreitig von zufälligen Nebenumständen bedingt sind.

Da sowohl t als t' (sei es als t_o oder t_u) durch den Contrast mit dem vorgängigen t_c, mag dies grösser oder kleiner als beide sein, in gleicher Richtung betroffen werden, so eliminirt sich für die Auffassung die Contrastwirkung, in so weit man annehmen kann, dass der Contrast auf t und t' in der Art gleich stark wirkt, dass sie für die Auffassung in gleichem Verhältniss dadurch verändert werden, und die Contrastwirkung würde daher gar nicht zum Vorschein kommen, wenn nicht t äusserlich gegeben und insofern äusserlich durch den Contrast unantastbar bliebe, indess t' nach der vergrösserten oder verkleinerten Auffassung von t grösser oder kleiner gemacht wird. Nun besteht allerdings die Voraussetzung, dass der Contrast im angegebenen Sinne gleich stark auf t und t' wirkt, für jedes einzelne t nicht streng, weil t und t', wenn auch in gleicher Richtung von t_c abstehend, doch nicht in gleichem Zeit- und Werthverhältnisse davon abstehen. Aber gesetzt, der Verhältnissunterschied in dieser Hinsicht schwankte doch für die verschiedenen t's nicht stark und sei an sich verhältnissmässig nicht gross gegen den mittleren Abstand, so können die davon abhängigen Schwankungen im Werthe $\frac{t_o}{t}$ sowie $\frac{t}{t_u}$, d. i. v_o und v_u, und mithin im Werthe $v = \sqrt{v_o v_u}$ recht wohl merklich in den zufälligen Abweichungen von einer vollkommenen Constanz der v und $v - 1$ mit

aufgehen, die wir uns bei Aenderung von t überhaupt gefallen lassen müssen. Wenigstens erläutere ich mir selbst so die Möglichkeit, die Contrastreihen nicht minder als die contrastfreien Reihen zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes zu benutzen; denn der Verf. selbst ist nicht auf eine Erörterung darüber eingegangen.

Möchte nun aber die vorige Auffassung und Theorie der Contrastwirkungen in den anomalen Reihen noch etwas zu wünschen übrig lassen, was wegen Unzulänglichkeit der vom Verf. in dieser Hinsicht gegebenen Anhaltspunkte (s. Abschn. VII) wohl möglich ist, so erweist sich jedenfalls die Thatsache, auf die es uns ankommt, durch die Erfahrung selbst, sofern sich die nur noch wenig durch Zufälligkeiten gestörte Constanz der $v - 1$ bei aufsteigendem t in den anomalen Reihen in ganz entsprechender Weise, als in den normalen wiederfindet, wenn man nur ebenso hier wie da das Seine thut, die Zufälligkeiten so weit als möglich auszugleichen, da es ja bemerktermassen nicht ganz geschehen kann.

Unterscheide ich nun folgends die Reihen, wo den zusammengehörigen t, t_0, t_u ein kleineres t_c vorangeht, nnd die, wo ihnen ein grösseres vorangeht, beziehentlich durch $<$ und $>$, so ergiebt sich aus den Tabellen der anomalen Reihen XV, XVI, XVII des Verf. (zweiter Gruppe) für jeden der drei Beobachter eine Reihe $<$ und eine Reihe $>$, im Ganzen also sechs Specialreihen, mit den, in den nachfolgenden Mitteltabellen verzeichneten Werthen $v - 1$ für die aufsteigenden t. Da aber bei manchen t's in manchen Reihen statt blos eines kleineren oder eines grösseren t_c deren mehrere vorangegangen sind, wozu verschiedene $v - 1$ gehören, so sind in den folgenden Mitteltabellen die Mittel davon mit Rücksicht auf die n angegeben, wie nachher an einem Beispiel noch bestimmter erläutert werden wird.

a) Haupttabelle.

	t	1,5	2,0	2,25	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$< t_o$	H	—	^{4} 2,073	^{3} 2,336	^{4} 2,600	^{11} 3,136	^{8} 3,581	^{7} 4,100	^{2} 4,600	^{2} 5,300
	Tr	—	^{2} 2,125	—	^{6} 2,641	^{9} 3,132	^{6} 3,617	^{5} 4,108	—	^{1} 5,100
	T	—	^{1} 2,133	^{5} 2,370	^{5} 2,630	^{0} 3,170	^{7} 3,622	^{4} 4,188	—	—
$< t_u$	H	—	1,834	1,984	2,200	2,636	3,056	3,464	3,875	4,300
	Tr	—	1,691	—	2,133	2,512	2,958	3,325	—	4,300
	T	—	1,700	1,860	2,115	2,550	2,993	3,337	—	—
$> t_o$	H	—	^{3} 2,100	^{3} 2,366	^{4} 2,604	^{4} 3,075	^{4} 3,613	^{2} 4,150	^{1} 4,525	5,100
	Tr	^{1} 1,566	^{5} 2,217	—	^{7} 2,681	^{5} 3,250	^{4} 3,717	^{3} 4,283	—	—
	T	—	^{2} 2,183	^{5} 2,480	^{5} 2,680	^{3} 3,150	^{3} 3,717	^{2} 4,275	—	—
$> t_u$	H	—	1,833	2,076	2,259	2,725	3,060	3,550	3,975	4,550
	Tr	1,334	1,800	—	2,236	2,717	2,950	3,367	—	—
	T	—	1,734	2,030	2,190	2,683	2,867	3,600	—	—

b) Mittel von H, Tr, T für < und > besonders.

<

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v - 1$	p
2,0	2,110	1,741	1,0550	1,1481	0,1009	1,0432
2,5	2,624	2,149	0496	1633	1050	0528
3,0	3,146	2,566	0487	1691	1073	0559
3,5	3,607	3,002	0306	1659	1088	0637
4,0	4,132	3,375	0330	1852	1065	0711
15,0						

>

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v-1$	p
2,0	2,167	1,795	1,0835	1,1142	0,0987	1,0141
2,5	2,655	2,228	0620	1221	0917	0279
3,0	3,158	2,708	0527	1078	0798	0259
3,5	3,682	2,959	0520	1829	1027	0604
4,0	4,236	3,506	0590	1409	0992	0379
15,0						

Um die Originaltabellen des Verf. für die anomalen Reihen zugleich mit der Ableitungsweise der vorigen Tabellen daraus etwas bestimmter zu erläutern, beziehe ich mich beispielsweise auf den Anfang der Hansen'schen Originaltabelle XV welcher lautet:

t	t_c	d_o+	d_u-	n
	1,50	0,073	0,166	4
2,00	4,00	0,125	0,200	2
	4,50	0,050	0,100	1

Dem Hauptwerthe $t = 2,00$ sind hiernach die Werthe $t_c = 1,50$, $= 4,00$, $= 4,50$ vorausgegangen, welche einen Contrast damit und mit den zugehörigen t' bedingen. Da das erste t_c kleiner, die beiden anderen grösser als t sind, so haben wir für den ersten Fall ein t, welches in die Reihe $<$ gehört, indess die beiden anderen in die Reihe $>$ gehören. Um nun zuerst t_o, t_u für $<$ zu erhalten, haben wir $t_o = t + d_o = 2,073$, und $t_u = t - d_u = 1,834$. Für $>$ haben wir zwei Werthe t_c und mithin t_o und t_u für jedes besonders zu bestimmmen. Das giebt entsprechend als so eben

	bei $t_c = 4$	bei $t_c = 5,5$
t_o	2,125	2,050
t_u	1,800	1,900

Um nun aus beiden Bestimmungen das Mittel mit Rücksicht auf die, in der Haupttabelle beigefügten $n = 2$ und 1 zu erhalten, haben wir zu setzen:

$$t_o = \frac{2 \cdot 2,125 + 1 \cdot 2,050}{3} = 2,1000$$

$$t_u = \frac{2 \cdot 1,800 + 1 \cdot 1,190}{3} = 1,8337 .$$

Dies sind die in der Tabelle für t_o, t_u bei H angegebenen Werthe.

Der Werth t_c in obiger Wiedergabe des Anfangs der Originaltabelle ist vom Verf. mit einer eckigen Klammer behaftet, um damit zu bezeichnen, dass er dem Falle verkehrter Contrastwirkung angehört, wovon oben die Rede war. Nun könnte man meinen, solche Fälle müssten von der Berechnung überhaupt ausgeschlossen werden, was doch meines Erachtens

untriftig wäre, da sie unstreitig auf unberechenbaren zufälligen Nebenumständen beruhen, die man auch bei den Contrastwirkungen im richtigen Sinne nicht ausschliessen kann, sondern nur bestmöglichst durch Zusammennahme vieler Fälle möglichst unschädlich zu machen suchen muss.

No. 4. Nach Kollert's Abhandlung p. 82. 83, normal, mit $\delta = t$, 4 Beobachter, W (Wundt), S (Schmerler), L (Lamprecht), M (Modrach), $t = 0{,}4$ bis 1,2.

Ausser den genannten vier Beobachtern betheiligten sich noch zwei andere, H (Hermann) und T (Tischer) an den hierher gehörigen Versuchen, aber nach der Bemerkung des Verf. im Ganzen nur sparsam, daher ich mich behufs der nachherigen Mittelziehung in folgender Tabelle auf die Daten der anderen, d. i. der obigen vier, Beobachter, beschränke. Auch lasse ich das höchste t, d. i. 1,5, bei welchem beobachtet worden ist, in der Tabelle aus, theils weil hierbei Beobachtungen seitens W und M fehlen, theils weil Kollert selbst (p. 84) die von S und L dabei erhaltenen Werthe verdächtigt. — Man kann übrigens bemerken, dass von den hier mit zugezogenen Beobachtern Kollert's zwei, d. i. Wundt und Schmerler, auch bei den Estel'schen Versuchen No. 1 betheiligt sind. Gewichtszahlen n fehlen.

a) **Haupttabelle.**

t		0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,2
t_o	W	0,506	0,606	0,757	0,875	1,085	1,266
	S	479	596	746	860	1,030	1,289
	L	497	612	759	838	1,061	1,298
	M	470	585	753	849	1,036	1,243
t_u	W	0,377	0,447	0,657	0,728	0,899	0,986
	S	392	463	666	748	917	1,014
	L	363	463	637	707	876	0,997
	M	398	480	671	725	917	1,036

b) Mittel für W, S, L, M.

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v - 1$	p
0,4	0,4880	0,3825	1,2200	1,0458	0,1295	0,9259
0,5	0,5998	0,4632	1996	0794	1380	0,9486
0,7	0,7538	0,6577	0769	0643	0706	0,9942
0,8	0,8608	0,7270	0760	1004	0882	1,0113
1,0	1,0530	0,9022	0530	1084	0802	1,0260
1,2	1,2740	1,0083	0617	1901	1241	1,0588

No. 5. Nach Kollert's Abhandlung p. 87, anomal, fraglich ob < oder >, mit $\delta = t$, Beobachter wie unter No. 4, $t = 0,4$ bis 1,2.

a) Haupttabelle.

t		0,4	0,5	0,7	0,8	1,0	1,2
t_o	W	0,454	0,563	0,822	—	1,106	1,355
	S	448	542	767	0,875	1,077	—
	L	454	563	818	894	1,166	—
	M	448	550	856	877	1,086	—
t_u	W	0,358	0,461	0,655	—	0,894	1,046
	S	347	479	679	0,766	923	—
	L	338	448	650	737	894	—
	M	368	463	650	775	914	—

Bei der Mittelziehung wird $t = 0,8$ und $= 1,2$ bei Seite gelassen, weil nicht alle Beobachter dabei betheiligt sind.

b) Mittel für W, S, L, M.

t	t_o	t_u	v_o	v_u	$v - 1$	p
0,4	0,4510	0,3528	1,1252	1,1338	0,1307	1,0028
0,5	0,5545	4628	1090	0804	0946	0,9870
0,7	0,8158	6585	1654	0630	1130	0,9551
1,0	1,0933	9063	0933	1034	0984	1,0046

V. Nachweis von Verschiedenheiten der Unterschiedsempfindlichkeit bei den verschiedenen Beobachtern.

Von vornherein dürfte man es ziemlich selbstverständlich finden, dass die verschiedenen Beobachter, welche sich bei den Versuchen des Verf. betheiligt haben, in dem Grade der Unterschiedsempfindlichkeit, mithin auch den Werthen, welche zum Masse derselben dienen, nicht übereingestimmt haben; und es würde also kein Interesse haben, noch einen besonderen empirischen Nachweis dafür zu führen, wenn nicht die Rücksicht auf diese Verschiedenheit einen Einfluss auf die Mittelbestimmung aus den Datis der verschiedenen Beobachter mitführte, den ich vom Verf. nicht berücksichtigt finde, worauf im folgenden Abschnitte einzugehen; indess es sich hier nur um den thatsächlichen Nachweis der, zwischen manchen Beobachtern in der That nicht unerheblichen, Verschiedenheit in betreffender Hinsicht handeln wird.

Wir werden die Unterschiedsempfindlichkeit zweier oder mehrerer Beobachter für gleich oder ungleich zu nehmen haben, je nachdem ihre Unterschiedsschwellen d_0, d_u für dieselben t's bei vergleichbar gehaltenen Versuchen und möglichster Ausgleichung von Zufälligkeiten gleich oder ungleich ausfallen. Um aber letzteren Zweck möglichst zu erreichen, werden wir den Vergleich nicht blos für das eine oder andere t vorzunehmen, sondern auf die ganze Anzahl der t's zu erstrecken haben, welche den betreffenden Beobachtern gemeinsam und demnach in Abschn. IV zur Bildung der Tabelle ihrer Mittel benutzt worden sind. Ich gebe nun folgends die so zu erhaltenden Summen, resp. Σd_0, Σd_u, für die verschiedenen Reihen, die uns hier zu beschäftigen haben, mit den Summen der $t = \Sigma t$, wozu die Σd_0, Σd_u gehören, wie auch, wegen späterer Beziehung darauf, den Summen $\Sigma\Delta = \frac{\Sigma d_0 - \Sigma d_u}{2}$. Da in unseren Tabellen (Abschn. IV) statt der d_0, d_u die t_0, t_u mit den t's, wozu sie gehören, gegeben sind, so mag erinnert werden, dass sich die Summen, um die es sich hier handelt, daraus nach den Gleichungen finden

$$\Sigma d_0 = \Sigma t_0 - \Sigma t \; ; \qquad \Sigma d_u = \Sigma t - \Sigma t_u \; ; \qquad \Sigma\Delta = \frac{\Sigma t_0 + \Sigma t_u}{2} - \Sigma t \; .$$

Die folgenden Verweisungen beziehen sich auf die Nummern und Buchstaben des Abschn. IV.

		Σd_o	Σd_u	$\Sigma \Delta$	Σt
No. 1. a) normal	We	1,0350	5,0175	−1,9913	30,10
	E	0,7669	4,7237	−1,9782	
	S	0,4783	2,7601	−1,1409	19,75
	W	0,4441	3,4431	−1,4995	
No. 2. a) normal	H	0,758	2,728	−0,985	21,5
	Tr	1,077	3,198	−1,061	
	T	1,430	3,382	−0,976	
No. 3. a) < anomal	H	0,490	1,181	−0,341	15,0
	Tr	0,623	2,381	−0,879	
	T	0,747	2,305	−0,779	
> anomal	H	0,542	1,573	−0,516	
	Tr	1,148	1,930	−0,391	
	T	1,005	1,926	−0,461	
No. 4. a) normal	S	0,400	0,400	0,000	4,6
	W	495	506	−0,006	
	L	486	557	−0,036	
	M	356	371	−0,008	
No. 5. a) normal	S	0,234	0,172	+0,031	4,6
	W	395	232	+0,082	
	L	399	270	+0,065	
	M	340	205	+0,068	

Natürlich kann man nicht erwarten, dass in der Summirung der d_o, d_u verschiedener Beobachter für eine beschränkte Anzahl von t die zufälligen Abweichungen zwischen ihnen schon vollständig ausgeglichen sind, wohl aber, dass es so weit der Fall ist, um starke Unterschiede zwischen ihren Σd_o, Σd_u nicht mehr blos auf unausgeglichene Zufälligkeiten schieben zu können; es kommen aber, wie man aus voriger Tabelle sieht, Unterschiede vom Einfachen bis auf das Doppelte (No. 2. a) und No. 3. a) >) vor. Um so weniger wird es geschehen können, wenn wir sehen, dass, abgesehen von schwachen Ausnahmen, die Unterschiede für dieselben Beobachter bei verschiedenen Versuchsumständen dieselbe Richtung, wenn auch nicht dasselbe Grössenverhältniss, behalten. So sehen wir Σd_o H (Hansen) zu Σd_o T (Tischer) in der normalen Reihe No. 2. a) im Verhältniss 0,758 : 1,430; in der anomalen No. 3.

a) $>$ im Verhältniss 0,542:1,005; und in No. 3. $<$ im Verhältniss 0,490:0,747 stehen. Ferner finden wir das Verhältniss zwischen S (Schmerler) und W (Wundt) in der normalen Kollert'schen Reihe No. 4. a) wie 0,400:0,495, in der anomalen Kollert-schen Reihe No. 5. b) wie 0,234:0,395; und nur in der normalen Estel'schen Reihe No. 1. a) weicht das Verhältniss zwischen denselben Beobachtern S und W, d. i. 0,4783:0,4441 in der Richtung von den vorigen ab. Endlich stimmen auch die Unterschiede zwischen den d_u der verschiedenen Beobachter, abgesehen von ein paar schwachen Ausnahmen bei sich nahe stehenden Summen, überall in der Richtung mit den Σd_0 überein.

Vergleicht man die Summen Σd_0, Σd_u mit den zugehörigen Summen $\Sigma\Delta = \frac{\Sigma d_0 - \Sigma d_u}{2}$, so kann man bemerken, dass die ersteren zwischen verschiedenen Beobachtern sehr stark differiren können, während die letzteren sehr wenig differiren (so z. B. No. 1. b), No. 3. a) $>$); daher man nicht Reihen, welche ganz oder theilweise von verschiedenen Beobachtern gewonnen sind, deshalb für vergleichbar halten und bei Prüfung des Weber'schen Gesetzes zur Ergänzung von einander benutzen kann, wie der Verf. in der Tabelle XX p. 64 thut, weil er nach einer, übrigens sehr unbestimmten, Vergleichung (p. 43) keine wesentliche Abweichung zwischen den auf dieselben t's bezogenen Δ's der beiderlei Reihen glaubt annehmen zu dürfen. Auch ist es ja abgesehen von directen Versuchsresultaten an sich natürlich, dass eine gleiche Differenz $d_0 - d_u$ für zwei Beobachter noch gar nichts für eine Gleichheit der absoluten Werthe d_0, d_u bei Beiden beweist. So giebt $d_0 = 10$; $d_u = 1$ dieselbe Differenz 9, als die so viel grösseren Werthe $d_0 = 100$, $d_u = 91$.

Man kann gegen den zulänglichen Vergleich der Unterschiedsempfindlichkeit der verschiedenen Beobachter nach den Σd_0, Σd_u einwenden, dass die d_0, d_u im Grunde noch rohe Werthe sind, welche kein Mass der wahren Unterschiedsempfindlichkeit geben, wie ich S. 15 bemerkte und später weiter verfolgen werde. Aber insofern es hier nicht darauf ankommt, die reine Unterschiedsempfindlichkeit bei verschiedenen Beobachtern vergleichend zu messen, sondern blos nachzuweisen, dass überhaupt erhebliche Unterschiede dazwischen bestehen, welche bei der Mittelziehung zu be-

rücksichtigen sind, kann man sich allerdings auch an den Vergleich der rohen Werthe halten, wenn sie nur unter vergleichbaren Umständen für die verschiedenen Beobachter erhalten werden und bei gemeinsamer Abänderung der Umstände für sie die Richtung des Unterschiedes dieselbe bleibt.

Nun hindert aber auch nichts, da in der mittleren Verhältnissschwelle v der Fehler, welcher den d_o, d_u noch anhaftet, eliminirt ist, wie später zu zeigen, uns hieran oder an $v - 1$ anstatt an die noch rohen Masse d_o, d_u der Unterschiedsschwelle zu halten, und so erhielt ich als mittlere Werthe $v - 1$ (nach Verfahren β des folgenden Abschnittes) für dieselben t's, für welche oben die $\Sigma' d_o$, $\Sigma' d_u$ gelten, folgende Mittelwerthe:

Mittel $v - 1$

No. 1. b)	Wendel	Estel	
	0,1122	0,1051	
No. 1. c)	Schmerler	Wundt	
	0,08971	0,1529	
No. 2. b)	Hansen	Trautschold	Tischer
	0,0835	0,1124	0,1172

Diese Werthe zeigen dieselbe Reihenfolge nach den Beobachtern, als die $\Sigma' d_o$, $\Sigma' d_u$ der vorigen Bestimmungen, indess auf entsprechende Verhältnisse bei reinen und rohen Werthen nicht zu rechnen. Man sieht aber auch hier, wie beträchtliche Unterschiede zwischen Schmerler und Wundt, Hansen und Tischer vorkommen.

VI. Ueber das bei der Mittelziehung einzuschlagende Verfahren.

Zu jeder der Gesammtreihen No. 1, No. 2, u. s. w. (Abschn. IV) hat eine Mehrheit von Beobachtern beigetragen, und jeder davon hat in seiner Specialreihe für die gegebenen t's seine besonderen Werthe t_o, t_u gefunden, aus denen sich dann die anderen in Betracht kommenden Werthe d_o, d_u u. s. w. ableiten lassen. Da wir uns aber bei Prüfung der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes aus den S. 18 angegebenen Gründen vielmehr an Mittelwerthe aus den Specialwerthen der verschiedenen Beobachter für dasselbe t, als an die Specialwerthe selbst zu halten haben, so wird über das dabei

einzuschlagende Verfahren der Mittelziehung um so mehr Einiges zu erinnern sein, als ich vorbemerktermassen (S. 30) mich mit dem, vom Verf. eingeschlagenen, Verfahren nicht einverstehen kann.

Als Beispiel zur Erläuterung mag zunächst die Gesammtreihe No. 2 (im Original XII, XIII, XIV) mit den drei Beobachtern H (Hansen), Tr (Trautschold), T (Tischer) dienen, in welcher es also gilt, Mittel aus je drei Specialwerthen für dasselbe t zu ziehen; nur dass für $t = 2{,}25$ und $= 3{,}75$ die Gesammtreihe insofern lückenhaft ist, als für ersteren Werth Tr, für letzteren T keine Angabe geliefert hat. Nun stand ein dreifacher Weg offen, erstens diese t-Werthe, für welche die Gesammtreihe lückenhaft ist, bei der Mittelziehung überhaupt bei Seite zu lassen, um die Resultate nur aus den übrigen Werthen der Reihe zu ziehen; zweitens die fehlenden Angaben durch Interpolation zu ergänzen; drittens das Mittel aus den Angaben der zwei Beobachter ganz ebenso zu ziehen, als aus denen der drei Beobachter, ohne die Empfindlichkeits-Verschiedenheit der Beobachter zu berücksichtigen. Ich selbst habe bei Bildung der Mitteltabellen im IV. Abschnitt den ersteren Weg eingeschlagen und werde im Folgenden bei den Resultaten davon stehen bleiben. Der zweite Weg hätte sich zwar auch einschlagen lassen, und ich werde selbst am Schlusse dieses Abschnittes ein mir dazu geeignet scheinendes Interpolationsverfahren angeben, aber es ist umständlich, erschwert die Uebersicht, kann doch direct erhaltene Beobachtungswerthe nicht ganz ersetzen, und nach mühsamer Durchführung desselben bei der Reihe No. 2 finde ich, dass die Definitivresultate, um die es zu thun ist, dadurch keine wesentliche Abänderung gegen den ersten einfachen Weg erfahren. Was den dritten Weg anlangt, so hat ihn der Verf. eingeschlagen; ich selbst halte ihn aber für fehlerhaft, und werde es im Folgenden zu begründen suchen.

Da ich in den Versuchstabellen des IV. Abschnittes statt der vom Verf. angegebenen d_o, d_u die t_o, t_u eingeführt habe, so werde ich mich auch folgends vorzugsweise auf letztere beziehen; es wird aber keine Schwierigkeit machen, das für die einen geltend Gemachte auf die anderen zu übertragen.

Für die Prüfung des Weber'schen Gesetzes gilt es (nach Abschnitt VIII), die mittleren v oder $v - 1$ aus den Specialreihen der drei Beobachter zu gewinnen. In dieser Hinsicht kann aber zu-

vörderst eine, als 1) und 2) zu unterscheidende, doppelte Mittelbestimmung derselben stattfinden.

Nach 1) zieht man zuerst für jedes t das arithmetische Mittel aus den, ihm zugehörigen, drei Specialwerthen t_o wie t_u, welche in Tabelle No. 2. a) des IV. Abschn. aufgeführt sind, und erhält so die mittleren t_o, t_u der Tabelle No. 2. b). Aus den solchergestalt erhaltenen mittleren t_o, t_u leitet man dann die $v_o = \frac{t_o}{t}$, $v_u = \frac{t}{t_u}$ eben so ab, als wenn man es mit einfachen t_o, t_u zu thun hätte, wonach sich das mittlere $v = \sqrt{v_o v_u}$ und durch Abzug von 1 das mittlere $v - 1$ findet.

Nach 2) aber leitet man in jeder der drei Specialreihen insbesondere aus den gegebenen t_o, t_u derselben die Specialwerthe v und $v - 1$ nach den dafür geltenden Gleichungen ab, summirt die so erhaltenen drei Werthe fur dasselbe t und gewinnt daraus durch Division mit 3 das Mittel.

Bestimmen wir nun in unserer Beispielsreihe den mittleren Werth v in dieser doppelten Weise beispielsweise für die drei t's $= 1,5$, $3,0$, $5,0$, so finden wir:

t	1,5	3,0	5,0
Mittel t_o	1,5903	3,1873	5,2000
Mittel t_u	1,3137	2,5917	4,8513
Mittel v nach 1)	1,1002	1,1090	1,1183
Spec. v H	1,0861	1,0715	1,0864
Spec. v Tr	1,1132	1,1379	1,0933
Spec. v T	1,1020	1,1191	1,1773
Mittel v nach 2)	1,1004	1,1095	1,1190

Insofern wir nun das Weber'sche Geseiz nach der Constanz von $v - 1$ bei verschiedenem t prüfen, haben wir also:

t	1,5	3,0	5,0
Mittel $v - 1$ nach 1)	0,1002	0,1090	0,1183
Mittel $v - 1$ - 2)	0,1004	0,1095	0,1190

Wie man sieht, ist der Unterschied von 1) und 2) hierbei zu vernachlässigen. Insofern man sich aber doch für eins von beiden Verfahren zu entscheiden hat, wird man meines Erachtens principiell 1) vorzuziehen haben. Denn es hindert principiell nichts, Werthe, die durch arithmetische Mittelziehung gewonnen sind, in Verhältniss zu einander zu setzen, also v dadurch zu gewinnen, dass wir das Mittel t_o mit dem Mittel t_u dividiren, und aus dem so erhaltenen $\frac{\text{Mitt. } t_o}{\text{Mitt. } t_u}$ die Quadratwurzel ziehen, wogegen es principiell untriftig ist, wie ich in »Revis.« p. 399 ff. gezeigt habe, arithmetische Mittel aus Verhältnissen zu ziehen, wie wir thun, wenn wir v dadurch bilden, dass wir die $\frac{t_o}{t_u}$ und hiernach $\sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$ für die einzelnen Beobachter bilden und aus den so gewonnenen Werthen das arithmetische Mittel ziehen. Nun liesse sich dieser Einwurf zwar dadurch vermeiden, dass man aus den $\frac{t_o}{t_u}$ der verschiedenen Beobachter unter Zuziehung von Logarithmen das Verhältnissmittel statt das arithmetische Mittel zöge; und ich glaube sogar, dass dies das rationellste Verfahren wäre; aber da das doch noch Zweifeln unterliegen kann, und jedenfalls das erste Verfahren bei zu vernachlässigendem Unterschiede im Resultate davon ohne Vergleich einfacher ist, habe ich es auch bei den Mittelbestimmungen des IV. Abschnittes überall angewandt. Praktisch ist die Frage überhaupt gleichgültig.

Sollte man Anlass haben, anstatt mittlerer v oder $v - 1$ vielmehr mittlere d_o, d_u oder Δ aus den direct gegebenen t_o, t_u (oder auch umgekehrt) abzuleiten, so führt das Verfahren 1) und 2) zu ganz denselben Resultaten, weil hierbei keine Verhältnisse und Wurzelausziehungen ins Spiel kommen; nicht so, wenn es sich um mittlere w's oder p's handelt; obwohl auch hier der Unterschied der Resultate nach 1) und 2) überall zu vernachlässigen sein dürfte.

Wichtiger als die vorige Frage ist eine andere Frage, nämlich ob man bei der Mittelbestimmung das Gewicht in Rücksicht zu ziehen habe, was den Bestimmungen der t_o, t_u und folgweis den daraus abzuleitenden Werthen seitens der verschiedenen Beobachter durch die Zahl der Einzelbestimmungen, die bei jedem Beobachter dazu beigetragen haben, das n derselben, verliehen wird, indem, bei der oft erheblichen Ungleichheit dieses n, hiervon nicht nur mehr oder weniger erhebliche Unterschiede in den mittleren t_o, t_u selbst, sondern

auch folgweis allen davon abhängigen Werthen hervorgehen können. Für den ersten Anblick mag diese Rücksichtsnahme selbstverständlich scheinen, und ist auch Seitens des Verf. bei der Mittelziehung aus den d_o, d_u, für welche in dieser Beziehung dasselbe als für die t_o, t_u gilt, eingehalten worden, was er zwar nicht ausdrücklich angiebt, aber aus seiner Tabelle VIII der mittleren d_o, d_u folgt. Seien also für dasselbe t von drei verschiedenen Beobachtern resp. die Werthe d_o', d_o'', d_o''' mit den Werthen von n gleich n_1, n_2, n_3 gefunden, so giebt dies:

$$\text{Mittel } d_o = \frac{n_1 d_o' + n_2 d_o'' + n_3 d_o'''}{n_1 + n_2 + n_3}$$

entsprechend mit d_u, kurz allgemein:

$$\text{Mittel } d_o = \frac{\Sigma(n d_o)}{\Sigma n}, \qquad \text{Mittel } d_u = \frac{\Sigma(n d_u)}{\Sigma n}.$$

In der That wird man nach dieser Bestimmungsweise die Mittel der Tab. VIII des Verf. wiederfinden.

Aber diese Mittelziehung ist doch nur so lange statthaft, als die Werthe, aus denen es gilt, Mittel zu ziehen, sich nur durch unausgeglichene Zufälligkeiten unterscheiden, nicht mehr aber, wenn sie abgesehen davon, sagen wir kurz an sich, verschieden sind, wie dies nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes von den Unterschiedsempfindlichkeiten und demnach d_o wie d_u der verschiedenen Beobachter gilt. Hier fällt die Rücksicht auf die Gewichtszahlen n, mit welchen die verschiedenen Beobachter sich bei der Bestimmung betheiligt haben, bei der Mittelbestimmung selbst weg, und hat nur Einfluss auf die grössere oder geringere Sicherheit des einfach zu nehmenden arithmetischen Mittels, wie sich durch folgende Betrachtungen herausstellen wird.

Unterscheiden wir kurz das Verfahren der Mittelziehung ohne Rücksicht auf die Gewichte n und mit Rücksicht darauf als α) und β) und erläutern den Unterschied, den es in dieser Beziehung zu machen gilt, an einem, mit dem uns vorliegenden analogen, Falle. Es soll die Länge eines gewissen Mannes und einer gewissen Frau durch wiederholte Messungen bestimmt werden, und sei die Länge des Mannes einmal durch n_1 Messungen durchschnittlich $= a_1$, ein anderes Mal durch n_2 Messungen $= a_2$ gefunden worden, so

werden wir den durch die Mittelziehung gesuchten wahrscheinlichsten Werth des Mannes nicht einfach $= \frac{a_1 + a_2}{2}$, sondern $= \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2}{n_1 + n_2}$ zu nehmen haben, entsprechend mit der Frau. Hier beziehen sich die Beobachtungen bei Mann wie Frau immer auf dasselbe, an sich gleichbleibende, Object. Gesetzt aber, das Mittel zwischen der Grösse des Mannes und der Grösse der Frau, die an sich verschieden sind, soll möglichst sicher bestimmt werden, und es sei die des Mannes $= a$ durch n_1 Beobachtungen, die der Frau $= b$ durch n_2 Beobachtungen gefunden, so würde es irrig sein, das Mittel zwischen beiden entsprechend wie so eben $= \frac{n_1 a + n_2 b}{n_1 + n_2}$, also nach β) nehmen zu wollen, sondern es wird vielmehr rücksichtslos auf die Grösse von n_1 und n_2 $= \frac{a + b}{2}$, also im Sinne des einfachen arithmetischen Mittels nach α) zu nehmen sein.

In der That, wollte man es nach β) nehmen, so brauchte man ja nur das n_1 des Mannes oder das das n_2 der Frau so weit gegen das andere zu vergrössern, um das andere merklich dagegen verschwinden zu machen, und würde statt eines Mittels zwischen Mann und Frau die Grösse von Mann oder Frau allein erhalten, überhaupt aber je nach der Relation zwischen n_1 und n_2 die an sich immer gleiche Mittelgrösse zwischen dem betreffenden Manne und der betreffenden Frau sich ändern sehen, was natürlich nicht sein darf; also bleibt man auf die Mittelbestimmung nach α) verwiesen, welche von der Relation zwischen n_1 und n_2 unabhängig ist; wohl aber wird die Sicherheit des so gezogenen Mittels von der Grösse des n_1 und n_2 zugleich abhängen.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auf die Mittelwerthe beliebig vieler an sich verschiedener Grössen ausdehnen, und erleidet auch volle Anwendung auf die Mittelbestimmung aus den, durch verschiedene Beobachter für dasselbe t erhaltenen, an sich verschiedenen d_o, d_u, t_o, t_u.

Mit Vorigem hängt zusammen, dass ich nicht ebenso, wie vom Verf. geschieht, Mittel aus Werthen d_o, d_u, t_o, t_u für verschiedene t's vergleichbar halte, wenn diesen t's nicht auch sämmtlich dieselben Beobachter zugehören. In der Reihe No. 1 (II bis VIII) ist, wie man sich aus deren Haupttabelle S. 21 überzeugen kann, im Ganzen von sechs Beobachtern bei elf t's beobachtet worden, aber nur ein einziger

Beobachter, Estel, geht durch die ganze Scala dieser elf t's durch, von den anderen fehlen bald diese, bald jene. Bei $t = 2,7$ und $= 2,85$ haben nur zwei, bei $t = 4,0$ nur drei, bei mehreren t's nur vier, bei $t = 6$ nur fünf von den sechs Beobachtern beobachtet, also treten an sich verschiedene Unterschiedsempfindlichkeiten, hiemit an sich verschiedene d_o, d_u je nach den t's, in und ausser Spiel, und doch werden in der Tabelle der Mittel VIII des Verfassers aus den d_o, d_u, Δ dieser verschiedenen t's Mittel gezogen, als wenn man überall mit Beobachtern von gleicher Empfindlichkeit zu thun hätte, mithin nichts darauf ankäme, ob sich gerade diese oder jene bei diesen oder jenen t's betheiligen. Meinerseits habe ich es in Rücksicht jener Verschiedenheiten nöthig gehalten, aus den Gesammtreihen nur solche Mitteltabellen abzuleiten, wo für alle vorkommenden t's dieselben Beobachter vorkommen, was freilich die Benutzbarkeit der Gesammtreihen erheblich einschränken musste.

Anders als mit den d_o, d_u, t_o, t_u der verschiedenen Beobachter bei demselben t verhält es sich, wenn Mittel aus den v oder $v - 1$ eines und desselben Beobachters bei den verschiedenen t innerhalb der Grenzen des Weber'schen Gesetzes gezogen werden sollen, insofern nach dem durch die Versuche selbst constatirten Weber'schen Gesetze diese Werthe in der That nur durch Zufälligkeiten von einander abweichen, und so ist auch bei den mittleren v oder $v - 1$, die ich für verschiedene t's, S. 33, gezogen habe, das Gewicht, das n der dafür besonders geltenden Bestimmungen, in bekannter Weise angewandt worden. Die Werthe v_o, v_u, p aber sind nicht ebenso unabhängig von den t als die mittleren Werthe v und davon abhängigen $v - 1$, und lassen also nicht ebenso wie diese das Verfahren β) zu. Aber kehren wir zur Mittelziehung aus den Werthen d_o etc. Seitens verschiedener Beobachter bei demselben t zurück.

Wenn nun schon die Gewichtszahlen n bei der Mittelbestimmung aus an sich verschiedenen Grössen nicht in Rücksicht kommen, so doch bemerktermassen bei der Unsicherheitsbestimmung, die man mit der Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers des Mittels gegeben hält, worauf sich hier einzulassen zwar kein bestimmter Anlass vorliegt; indessen kann es doch von Interesse sein, zu zeigen, wiefern die Unsicherheit des einfachen arithmetischen Mittels α) an

sich verschiedener Grössen sich nach der Grösse und Vertheilung des n ändern kann.

Heissen die betreffenden Grössen a, b, $c\ldots$, sei die Zahl derselben N, seien n_1, n_2, $n_3\ldots$ ihre Gewichtszahlen und Σn die Summe derselben $= n_1 + n_2 + n_3 \ldots$, so ist nach anerkannten Sätzen der wahrscheinliche Fehler des $= \frac{a+b+c+\ldots}{N}$ zu nehmenden Mittels proportional dem Werthe

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots}}{N}.$$

Die hier in Betracht kommenden Sätze sind diese:

Erstens: Das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers f eines, aus n Werthen abgeleiteten, also mit dem Gewichte n behafteten Werthes ist umgekehrt proportional der Gewichtszahl n, also die, mit f_1^2, f_2^2, f_3^2, ... zu bezeichnenden Quadrate der wahrscheinlichen Fehler von a_1, a_2, a_3, ... resp. proportional mit $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$, $\frac{1}{n_3}$, ...

Zweitens: Der wahrscheinliche Fehler F einer Summe von einander unabhängiger Grössen wie a, b, c, ... ist gleich der Wurzel aus der Summe der Quadrate ihrer besonderen wahrscheinlichen Fehler $= f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots$, mithin proportional mit $\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\ldots}$

Drittens: Der wahrscheinliche Fehler des arithmetischen Mittels von N Grössen ist gleich dem wahrscheinlichen Fehler der Summe dieser Grössen, dividirt durch N, also

$$= \frac{\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2+\ldots}}{N}.$$

Vergleichen wir nun hiernach beispielsweise folgende drei Fälle unter Voraussetzung, dass wir den Mittelwerth blos zweier, an sich verschiedener Werthe a, b, zu bestimmen haben, N also $= 2$ ist.

1) $n_1 = 1$ und $n_2 = 1$; 2) $n_1 = 2$, $n_2 = 2$; 3) $n_1 = 1$; n_2 sehr gross, sagen wir ∞.

Wir erhalten unter Anwendung obiger Formel folgende proportionale Werthe des wahrscheinlichen Fehlers:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\quad \frac{\sqrt{1}}{2}\,;\quad \frac{\sqrt{1}}{2}\quad \text{d. i.}\quad 0{,}767\,;\quad 0{,}5\,;\quad 0{,}5\,,$$

woran sich folgende Sätze erläutern, denen sich nach der obigen Grundformel eine grössere Allgemeinheit geben lässt. Wenn das n der beiden Werthe gleich ist und in gleichem Verhältnisse m steigt,

so nimmt der wahrscheinliche Fehler des Mittels im Verhältnisse $\frac{1}{\sqrt{m}}$ ab. — Wenn das eine n gleich 1 ist, so kann man durch noch so grosse Vergrösserung des anderen den wahrscheinlichen Fehler nicht weiter herabbringen, als wenn man beide n gleich 2 gemacht hätte.

Allgemein gilt, dass die gleiche Vertheilung des n bei gegebenem Σn auf die Werthe a, b, c, ... die vortheilhafteste für Verminderung des wahrscheinlichen Fehlers des Mittels ist.

Hiernach will ich noch zeigen, wie die Interpolation der t_o, t_u vorzunehmen sein dürfte, wo es eine Ergänzung von Lücken der Bestimmung seitens dieses oder jenes Beobachters für ein gegebenes t gilt. Nehmen wir als Anhalt ein Beispiel aus No. 2. a), S. 23, wo wir haben:

	t	2,25	3,75
t_o	H	2,35	—
	Tr	—	4,05
	T	2,40	4,01

Hier fehlt die Beobachtung von t_o seitens Tr bei $t = 2{,}25$; seitens H bei $t = 3{,}75$; und diese Lücken sollen durch Interpolation ergänzt werden; entsprechend bei t_u; es wird aber hinreichen, uns auf t_o zu beziehen, da für t_u dieselben Regeln gelten.

Während Tr keine Beobachtung für $t = 2{,}25$ hat, haben die beiden anderen Beobachter die Werthe 2,35 und 2,40, in Summa, welche S_m heisse, $= 4{,}750$ dafür; und während H keine Beobachtung bei $t = 3{,}75$ hat, haben die beiden anderen Beobachter zusammen ein $S_m = 8{,}06$ dafür. Dies im Auge behaltend, bilden wir für alle t's, die den drei Beobachtern gemeinsam sind*), die Summe der, den Beobachtern insbesondere zugehörigen Σt_o, und haben so:

	Σt_o
H	22,258
Tr	22,577
T	22,930

*) Also mit Ausschluss von 2,25 und 3,75, sowie auch von $t = 4{,}25$, wo nach der Haupttafel blos einer der drei Beobachter beobachtet hat.

wonach wir zur Interpolation von t_0 für Tr bei 2,25 folgende Proportion anstellen: Das gesuchte t_0, kurz t_0(Tr) verhält sich zur Summe S_m der beiden anderen direct gefundenen t_0, = 4,75, wie sich das Σt_0 von Tr, d. i. 22,577 zur Summe der beiden anderen Σt_0, d. i. zu 45,188 verhält. Also:

$$t_0\,(\mathrm{Tr}) : 4{,}75 = 22{,}577 : 45{,}188$$

gibt

$$t_0\,(\mathrm{Tr}) = 2{,}3723 \; .$$

Entsprechend findet sich bei $t = 3{,}75$

$$t_0\,(\mathrm{H}) = 2{,}0047 \; ,$$

und entsprechend finden sich auch die zu interpolirenden Werthe t_u (Tr) und t_u (H).

Einer besonderen Bemerkung dürfte es noch bedürfen, dass, wenn man mit d_o, d_u anstatt t_o, t_u operirt, man nicht behufs Interpolation von fehlenden d_o, d_u die Σt_0 und Σt_u vorigen Verfahrens durch Σd_0, Σd_u bei entsprechender Bestimmungsweise ersetzbar halten darf, denn da nicht die d_o, d_u, sondern t_o, t_u direct beobachtet sind, wird man doch immer erst nach vorigem Verfahren die Interpolation auf die t_o, t_u zu beziehen haben, wonach nichts hindert, hieraus die d_o, d_u nach den Gleichungen $d_o = t_o - t$ und $d_u = t - t_u$ abzuleiten.

VII. Einige Nebenbemerkungen.

Bei aller Anerkennung des experimentalen Verdienstes, was sich der Verf. durch seine Versuche erworben hat, kann ich doch nicht umhin, folgenden Bemerkungen dazu Raum zu geben.

Wenn es gilt, ein System psychophysischer Versuche über absolute oder Unterschiedsempfindlicheit durch eine Reihe von Hauptwerthen, wie es die t sind, durchzuführen, so sollte meines Erachtens als allgemeine Regel gelten, alle Hauptwerthe mit einer gleichen Anzahl von Versuchen, einem gleichen n, zu bedenken. So ist es von mir und Volkmann bei unseren Versuchen nach der Methode der mittleren Fehler und richtigen und falschen Fälle in verschiedenen Sinnesgebieten gehalten worden, und warum hätte es nicht auch bei den Versuchen des Verf. nach der Methode der Minimaländerungen geschehen können, statt dass bei ihm das n für die verschiedenen t seitens desselben Beobachters in derselben Versuchsreihe zwi-

schen 1 und 11 wechselt. Einen Grund dieses Wechsels hat der Verf. nicht angegeben, und doch war ein solcher anzugeben, um nicht regellose Willkür voraussetzen zu lassen. Indess ist zuzugestehen, dass, so lange es sich um gesonderte Behandlung der Versuchsreihen einzelner Beobachter handelt, jene Regel für die Methode der eben merklichen Unterschiede und der Minimaländerungen nicht ebenso wesentlich ist, als für obige zwei Methoden, wo zur völligen Vergleichbarkeit noch die sog. Correction wegen des endlichen n anzubringen wäre, ohne dass dasselbe für die Methode der eben merklichen Unterschiede und Minimaländerungen gilt. Hier entsteht dadurch nur eine Ungleichförmigkeit der Sicherheit der Bestimmungen.

Anders aber nach den Ausführungen des vorigen Abschnittes, wenn sich mehrere Beobachter, für deren gleiche Empfindlichkeit man nicht stehen kann, in einer Gesammtreihe zu Bestimmungen bezüglich derselben Hauptwerthe t vereinigen, und Mittel aus ihren Bestimmungen gezogen werden sollen. Abgesehen, dass die Einfachheit der Behandlung der Gesammtreihe leidet, wenn nicht alle Beobachter mit gleichem n zu den Beobachtungen für dieselben t's beitragen, oder gar manche Beobachter bei manchen t's fehlen, leidet auch die Vergleichbarkeit der Bestimmungen für die verschiedenen t's dadurch, oder ist man genöthigt, um nur vergleichbare Mittel zu erhalten, einen Theil der Beobachtungen der Gesammtreihe Preis zu geben, und des Vortheils verlustig zu gehen, dass mit der gleichen Vertheilung des n überhaupt im Ganzen die grösstmögliche Sicherheit zu erreichen ist. In diesen Beziehungen aber lässt das Verfahren des Verf. nur zu viel zu wünschen übrig, und die Bearbeitung seiner Versuche, um doch das Vergleichbarste herauszubringen, ist dadurch umständlich und mühselig geworden. Der Verf. selbst freilich hat nichts von dieser Umständlichkeit und Schwierigkeit empfunden, indem er gemeint hat, mit der principiell unrichtigen Verwendung der Gewichtszahlen, wovon im vorigen Abschnitt die Rede war, über alle Schwierigkeiten hinwegzukommen.

Als ein Muster in betreffender Beziehung möchte ich die Untersuchungen Camerer's über den Raumsinn (in Zeitschr. f. Biologie) vor Augen halten, welcher in früheren Versuchsreihen zwei, in den neuesten sogar vier bis fünf Beobachter zu derselben Gesammtreihe zugezogen hat, und dabei alle Versuche in systematischster Weise

nach Zahl und Personen gleich vertheilt hat, Beweis, dass sich doch so operiren lässt. Nun ist allerdings wahr, dass die von ihm zugezogenen Versuchssubjecte lauter Glieder seines eigenen Familienkreises waren, über deren Zeit und Thätigkeit er freier verfügen konnte, als der Verf. über die Zeit und Thätigkeit der jungen Leute, die sich mit ihm zu den Versuchen verbanden; aber ich gestehe, zu meinen, dass sich auch nur solche dazu verbinden sollten, die ihren Verhältnissen und Interessen nach im Stande und gewillt sind, zur Erfüllung der formellen Bedingungen dieser Art von Versuchen erforderlich zusammenzuwirken.

In der That verhält es sich in dieser Beziehung anders mit Versuchen im psychophysischen Felde, wo die zwischen den einzelnen Beobachtern verschiedene und selbst bei demselben Beobachter nicht gleich bleibende Empfindlichkeit wesentlichst in die Resultate eingreift und selbst als Object der Beobachtung auftritt, als bei physikalischen Versuchen, wo das Object und die Massmittel bei allen Veränderungen der Beobachter dieselben bleiben.

Ein anderer, die Darstellungsweise der Versuche betreffender, Punct lässt einem Wunsche Raum, der sich ebenfalls seitens des Verf. nicht befriedigt findet, das ist: es fehlt in seiner Abhandlung gänzlich an Angaben darüber, wie die Versuche bezüglich der Zeit, Dauer, Folge angeordnet waren. Wurden alle *t*'s an demselben Tage durchgeprüft, oder die Prüfung auf verschiedene Tage vertheilt; welche Zwischenzeit blieb erstenfalls zwischen der Prüfung der Werthe bei den verschiedenen *t*'s; wurde damit aufsteigend oder absteigend verfahren oder zwischen beiden methodisch gewechselt; wurde überhaupt eine Regel in diesen Beziehungen befolgt, und welche? Das Zusammentreffen des Mangels aller Angaben hierüber mit der so grossen Ungleichförmigkeit des *n* lässt nur zu sehr vermuthen, dass keine Regel befolgt wurde, wenigstens hat der Verf. in seiner Darstellung der Versuche nichts gethan, um einer solchen Vermuthung zu begegnen. Nun mag es vielleicht sein, dass auf Einhaltung einer strengen Regel hierbei nicht zu viel ankommt; aber es könnte auch sein, dass die Versuche noch schärfere Resultate gegeben hätten, wenn eine solche eingehalten worden wäre.

Hiernach gestehe ich denn auch, dass mir das Verhältniss der normalen und anomalen Reihen, als contrastfreier und von Contrast

beeinflusster, ohne seiner Thatsächlichkeit nach von mir bezweifelt zu werden, doch unklar geblieben ist, indem ich beim Verfasser, abgesehen von einigen zur Aufklärung nicht hinreichenden Specialbemerkungen p. 58, nur folgende Stelle darüber (p. 52) im Eingange seiner Besprechung der Versuche der zweiten Gruppe finde:

»Da ich die Resultate dieser Versuche wie die der vorhergehenden [ersten Gruppe] in normale und anomale theilen wollte, fand ich zu meinem Erstaunen, dass ich dann zwei Arten von anomalen Versuchen annehmen müsste, von denen die einen alle ein kleineres, die anderen alle ein grösseres $\varDelta$ lieferten, als die zwischen ihnen liegenden Normalversuche. Da nun ausserdem die Anzahl der anomalen Versuche einen ausserordentlich grossen Procentsatz der Gesammtzahl betrug, suchte ich nach einem Grunde dieser Erscheinung, und fand ihn im Folgenden. Es stellte sich heraus, dass die Normalversuche alle den ersten Versuch eines Versuchstages bildeten, die anomalen die nachfolgenden. Dies legte die Vermuthung nahe, dass die bisher sogenannten anomalen Versuche nur durch den Contrast der vorhergehenden bedingt seien, eine Vermuthung, die durch die Rechnung bestätigt wurde.« (Hiernach die Tabellen anomaler Versuche XII bis XVII.)

Hiernach schiene es einmal, dass die Normalversuche zwischen die anomalen fielen, dann wieder, dass die Normalversuche alle den ersten Versuch eines Tages bildeten, die anomalen die nachfolgenden. Soll hiezwischen kein Widerspruch bestehen, so müsste man annehmen, dass die Normalversuche am Anfange jedes Versuchtages als zwischenfallend zwischen die anomalen des vorgängigen und desselben Versuchtages betrachtet werden. Doch weiss ich nicht, ob diese Auslegung die richtige ist. Ueber die Zwischenzeit zwischen den anomalen Versuchen und den vorgängigen Versuchen, von deren t_c der Contrast abhing, und ob diese Zwischenzeit überall vergleichbar gehalten wurde, lässt uns der Verf. gänzlich im Unklaren.

Das Resultat, was der Verf. p. 55 aus den Contrastversuchen zieht, dass die für andere Sinne bestehenden Contrastwirkungen auch im Gebiete des Zeitsinnes zur Geltung kommen, ist zwar nach der Analogie mit den anderen Sinnen nicht unerwartet, doch als Bestätigung davon nicht ohne Interesse; nur wüsste ich nicht, was Anlass sein könnte, folgender Bemerkung beizupflichten, die er (p. 55)

an den Ausspruch jenes Resultates knüpft: »Von den bis jetzt bekannten Contrastwirkungen unterscheidet sich die vorstehend constatirte dadurch, dass sie offenbar eine rein psychische ist, indem bei ihr physiologische Hypothesen, wie sie z. B. zur Erklärung des Farbencontrastes ersonnen werden, ausgeschlossen sind.« Ich denke, wenn ein Zeitintervall durch zwei Schalleindrücke abgegrenzt und ein späteres damit verglichen wird, geschieht dies vermöge einer nicht blos psychischen sondern zugleich psychophysischen Reproduction der Toneindrücke und des eine gewisse Dauer einnehmenden phychophysischen Zwischenprocesses, wobei es nicht gleichgiltig sein kann, ob das spätere Intervall über das in der Erinnerung reproducirte hinausgreift oder als kleineres davon eingeschlossen wird. Dass dies kein ähnlicher Vorgang ist, als der zur Erweckung des Farbencontrastes dient, ist zuzugestehen; Farben und Zeit sind eben verschiedene Dinge, aber es ist doch eine physiologische (weil psychophysische) Reproduction eines physiologischen Vorganges, der mit der psychischen Hand in Hand geht, ohne dass man nöthig hat, den psychischen Vorgang vom physiologischen so zu sagen loszulösen.

VIII. Ueber die Gültigkeitsfrage des Weber'schen Gesetzes.

Kommen wir endlich nach den bisherigen Vorerörterungen zur ersten der beiden Hauptfragen, um die es sich hier handelt. Das Weber'sche Gesetz lässt sich dahin aussprechen, dass bei Abwesenheit oder nach Elimination zufälliger und constanter Fehler, kurz im Falle seines reinen Bestandes, der Unterschied zweier Reize gleich gross für die Empfindung erscheint, so lange das Verhältniss der Reize sich gleich bleibt, wie auch die absolute Grösse der Reize dabei wechsele. Umgekehrt muss, so weit das Weber'sche Gesetz besteht, das Verhältniss der Reize bei Aenderung ihrer absoluten Grösse sich gleich bleiben, so lange der Unterschied für die Empfindung gleich bleibt, also auch, so lange er im Verschwinden für die Empfindung begriffen, kurz auf der Schwelle bleibt, und dies führt, wenn wir Reiz durch Zeit übersetzen, als Charakter des reinen Weber'schen Gesetzes im Gebiete des Zeitsinnes, woran man seine

Gültigkeit in diesem Gebiete prüfen kann, mit, dass nicht nur die obere und untere Verhältnissschwelle $v_o = \frac{t_o}{t}$ und $v_u = \frac{t}{t_u}$ für sich constant bleiben, während t wächst (indem t_o und t_u immer proportional mit t wachsen), sondern dass auch immer v_o gleich v_u für dasselbe t bleibt.

Nun scheint allerdings von vornherein in entschiedenem Widerspruche mit dem Weber'schen Gesetze, dass letztere Bedingung entschieden für den Zeitsinn fehlschlägt. Denn sehen wir alle, im IV. Abschnitt angeführten, Versuchsreihen an, so überwiegt, abgesehen von den Reihen No. 4 und No. 5 mit den kleinsten t-Werthen, in allen Reihen und bei allen t-Werthen die untere Verhältnissschwelle in meist starkem Verhältnisse die obere; und auch in No. 4 und No. 5 findet keine Gleichheit zwischen beiden statt, sondern kehrt sich das Verhältniss nur um.

Nicht minder zeigt sich in Widerspruch mit dem Gesetze, dass, wenn wir die v_o und v_u für sich durch die Reihe der t's verfolgen, statt einer nur durch Zufälligkeiten gestörten Constanz derselben ein, nur durch Zufälligkeiten gestörtes, Wachsthum der v_u und Abnahme der v_o bei verschiedenem t stattfindet; obwohl sich dieser entgegengesetzte Gang bei verschiedenen Reihen in verschiedener Entschiedenheit ausprägt; sehr entschieden namentlich in No. 2. b), No. 3. b), No. 4. b) (s. S. 23. 26. 29); minder in No. 1. b) und c) und in No. 5 (s. S. 22. 29).

Inzwischen darf man nicht vergessen, dass von einer Bewährung des Weber'schen Gesetzes durch Versuche überhaupt nur die Rede sein kann, wenn mit den zufälligen auch die constanten Fehler, welche durch die Versuche eingeführt werden, als compensirt oder eliminirt gelten können, und es fragt sich also, ob dies von den Werthen, so wie sie unmittelbar aus den Versuchen hervorgehen, zu gelten hat.

Gesetzt nun, es fände sich, dass mit dem ersten zugleich der zweite Widerspruch gegen das Weber'sche Gesetz schwände, wenn wir, statt die obere und untere Verhältnissschwelle einander gegenüber zu verfolgen, das Verhältnissmittel beider $v = \sqrt{v_o v_u} = \sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$ durch die Reihe der t verfolgen, so könnte man sich vorstellen, dass v_o, v_u für sich durch einen in den Versuchsumständen begründeten

Verhältnissfehler entgegengesetzter Richtung alterirt sind, der sich im Verhältnissmittel beider eliminirt. Und sofern durch Berücksichtigung und demgemässe Elimination eines solchen Fehlers eine Gesetzlichkeit gewonnen würde, die sich sonst nicht gewinnen liesse, indess sie sich auch in anderen Gebieten bei Elimination constanter Fehler wiederfindet, dürfen wir dem Gedanken eines solchen und so eliminirbaren Fehlers um so mehr Raum geben, als sich auch wahrscheinliche Gründe für das Dasein eines solchen (im X. Abschnitte) werden finden lassen. Auch habe ich schon früher, in »Revis.« p. 420, diesen Betrachtungsweg eingeschlagen, und der Verf. selbst ist p. 63 in der Prüfungsfrage des Weber'schen Gesetzes insoweit darauf eingegangen, als er seinerseits die Prüfung des Gesetzes von einer entsprechenden Voraussetzung abhängig macht, indem er die Frage verhandelt, ob $v - 1$ sich constant bei veränderten t findet.

Natürlich nämlich, wenn v zum Bestande des Weber'schen Gesetzes bei Aenderung von t constant bleiben muss, muss auch $v - 1$ constant bleiben, und so kann man sich bei der Prüfung auch an diesen Werth anstatt an v selbst halten, ja es erscheint dies insofern noch zweckmässiger, als etwaige Abweichungen vom Weberschen Gesetze deutlicher ins Licht treten, wenn man 1 von v abzieht und blos die Reste vergleicht, als wenn man die ganzen v vergleicht, von denen 1 den grössten Theil ausmacht. Sei z. B. v bei einem kleinen Werthe von t gleich 1,1, bei einem viel grösseren gleich 1,2 gefunden, so scheinen diese Werthe so nahe übereinstimmend, dass man sich leicht verleitet finden könnte, das Webersche Gesetz ohne Weiteres als gut dadurch bestätigt anzusehen, indem man den geringen Unterschied zwischen beiden v-Werthen durch unausgeglichene Zufälligkeiten entstanden denkt. Gehen wir aber durch Abzug der 1 von den Werthen v zu den Werthen $v - 1$ über, so haben wir 0,1 und 0,2, wovon der eine Werth doppelt so gross als der andere ist, wodurch man sich nun freilich wieder leicht verleiten lassen kann, das Weber'sche Gesetz als widerlegt anzusehen, wenn man nicht berücksichtigt, dass zufällige Beobachtungsfehler, welche bei den Versuchen über den Zeitsinn so gut wie bei irgendwelchen anderen Versuchen mitspielen, gar leicht ein solches oder noch stärkeres Unterschiedsverhältniss der $v - 1$

bedingen können, ohne dadurch zu einem Schlusse gegen das Gesetz zu berechtigen, so lange die Unterschiede klein gegen den mittleren Werth der sich ändernden Grössen bleiben. Also mag man zwar immerhin lieber auf $v-1$ als v fussen, wie der Verf. thut, nur dass man sich zugleich zu vergewissern hat, ob die Unterschiede zwischen den Werthen $v-1$, die man findet, nicht vielmehr durch Zufälligkeiten, als durch eine Ungültigkeit des Weber'schen Gesetzes erklärlich sind. Man wird aber allgemein gesprochen schliessen können, es sei so, wenn bei dem Fortschritt durch eine ganze Reihe der t die Constanz von $v-1$ nur unregelmässig nach beiden Seiten gehende Abweichungen erleidet, und wenn diese um so mehr schwinden, je mehr Bestimmungen von $v-1$ wir für die t zusammennehmen, sofern sich die Zufälligkeiten der einzelnen Bestimmungen dadurch mehr und mehr ausgleichen; wogegen eben wegen dieser Ausgleichung der zufälligen Abweichungen auch die wesentlichen Abweichungen von der durch das Gesetz geforderten Constanz der $v-1$, sofern solche stattfinden, nur um so deutlicher hervortreten müssen. Dies das Princip, worauf wir fussen werden.

Uebrigens braucht man, um auf den Werth $v-1$ als geeignetes Prüfungsmittel für das Weber'sche Gesetz zu kommen, nicht erst von der mittleren Verhältnissschwelle v auszugehen. Mit der Forderung einer Constanz der Verhältnissschwelle bei verschiedenem t zur Befriedigung des Weber'schen Gesetzes nämlich hängt die Forderung einer Constanz der relativen Unterschiedsschwelle zusammen. Die rohen relativen Unterschiedsschwellen $\frac{d_o}{t}$, $\frac{d_u}{t_u}$ oder w_o, w_u entsprechen nun dieser Constanz eben so wenig, als die rohen Verhältnissschwellen v_o, v_u, wie schon einfach daraus folgt, dass $w_o = v_o - 1$, $w_u = v_u - 1$ (vergl. S. 13), mithin Constanz und Inconstanz von beiden Werthen solidarisch ist; wogegen sich im X. Abschnitt zeigen lassen wird, dass durch Elimination desselben constanten Verhältnissfehlers, welcher bezüglich der Verhältnissschwellen in Betracht zu ziehen ist, die mittlere relative Unterschiedsschwelle mit $v-1$ übereinkommt, was auch der Verf. (p. 64) annimmt, ohne es freilich bewiesen zu haben (vergl. S. 14 f.); also folgen wir jedenfalls dem Verf. in dem Gebrauche, den er von dem Werthe $v-1$ zur Prüfung des Weber'schen Gesetzes macht.

Nun finden verschiedene Beobachter je nach ihrer verschiedenen Unterschiedsempfindlichkeit ein verschiedenes v und mithin $v - 1$ bei demselben t; aber es hindert nichts, den Vortheil möglichster Ausgleichung von Zufälligkeiten durch Mittelziehung aus ihren Werthen zu gewinnen, ohne damit einem Nachtheil betreffs der Prüfungsfrage selbst zu begegnen. Denn gesetzt, ein gewisser Beobachter findet, unter Voraussetzung compensirter Zufälligkeiten, bei aufsteigendem t den constanten Werth v_1 als mittlere Verhältnissschwelle, ein anderer v_2, ein dritter v_3 u. s. f., so wird natürlich auch der mittlere Werth dieser constanten Werthe constant bei aufsteigendem t bleiben, mithin für das Weber'sche Gesetz beweisen, wenn es überhaupt besteht.

Hiernach ziehen wir zuvörderst in Betracht, was der Verf. auf Grund des uns gemeinsamen Kriteriums gegen die Gültigkeit des Gesetzes einwendet.

Als Unterlage dazu dienen ihm zwei Tabellen, in denen er zu einer Reihe aufsteigender t's die $v - 1$ zum Beweise aufführt, dass sie die vom Weber'schen Gesetze geforderte Constanz nicht zeigen. Die erste (XX), welche ich unten als Kollert-Estel'sche Reihe wiedergeben werde, ist vom Verf. selbst überschrieben: »Die Versuche Kollert's und meine eigenen aus dem Jahre 1881«, und giebt unter a) das Ergebniss normaler, unter b) das Ergebniss anomaler Versuche. Sie ist zusammengestellt aus den Ergebnissen der, im Jahre 1881 angestellten Kollert'schen Versuche (Wundt's Philos. Stud. I. 78 ff.) und denen der neuen Versuche des Verf. erster Gruppe vom Jahre 1882, welche vom Verf. in seiner jetztigen Abhandlung vorgelegt und von mir im IV. Abschnitt unter No. 1 reproducirt sind; beide mit einer Zwischenzeit δ gleich der Hauptzeit t. Es sind aber nicht sowohl Versuche von Kollert und Estel selbst, aus denen die Resultate der Kollert-Estel'schen Reihe gezogen sind, sondern die darin angeführten Werthe von $v - 1$ sind Mittelwerthe aus Werthen, welche von verschiedenen Beobachtern für jedes t erhalten worden sind. Die Kollert'schen und Estel'schen Ergebnisse ergänzen sich hierbei in solcher Weise, dass die ersten von $t = 0{,}4$ bis $1{,}20$, die letzten von $1{,}50$ bis $8{,}00$ reichen*).

*) An sich gehen zwar die Kollert'schen selbst bis $t = 1{,}50$, womit die

Die zweite Tabelle, welche ich der Kollert-Estel'schen als dreitheilige Estel'sche folgen lassen werde, giebt ohne Mittelziehung in drei Abtheilungen die Werthe $v - 1$ der Specialreihen von Hansen, Trautschold, Tischer, welche in der Abhandlung des Verf. vorliegen, und von mir im IV. Abschnitt unter No. 2 mit Zufügung von Mittelbestimmungen berücksichtigt sind.

Die Zahlen $v - 1$ des Verf. sind das 10 000fache des wirklichen Werthes, worin ich ihm in den weiteren Verhandlungen folgen werde. Also entsprechen z. B. 1330 und 940 den wirklichen Werthen 0,1330 und 0,0940. Bei der dreitheiligen Tabelle sind die Werthe p von mir behufs späterer Benutzung nach eigener Berechnung zugefügt, und fallen zunächst ausser Rücksicht.

Kollert-Estel'sche Tabelle, Taf. XX, 1881.

a) normal.

t	$v - 1$	t	$v - 1$	t	$v - 1$
0,40	1330	1,50	1155	3,00	1144
0,50	1450	1,80	991	3,70	1160
0,70	730	2,00	980	4,00	1074
0,80	880	2,70	992	5,50	979
1,00	910	2,75	1027	6,00	991
1,20	1320	2,85	1297	8,00	1170

b) anomal.

t	$v - 1$	t	$v - 1$	t	$v - 1$
0,40	1300	1,20	1140	3,70	757
0,50	940	1,50	—	4,00	961
0,70	1130	1,80	1042	6,00	632
0,80	780	2,00	984	8,00	397
1,00	1060	3,00	950		

Estel'schen beginnen; aber nach einer Bemerkung des Verf. p. 10 ist die Bestimmung für $t = 1,50$, »weil in den Kollert'schen Versuchen nicht genau hergestellt«, vom Verf. erneuert.

Dreitheilige Estel'sche Tabelle, normal (Taf. XXI).

t	$v-1$			p		
	H	Tr	T	H	Tr	T
1,5	861	1131	1102	1,0291	1,0462	1,0383
2,0	859	911	1136	0318	0391	0417
2,25	663	—	1023	0209	—	0335
2,5	758	1190	1154	0445	0392	0425
3,0	715	1379	1191	0370	0546	0410
3,5	1295	1233	850	0685	0598	0592
3,75	—	1294	1283	—	0457	0552
4,0	819	1047	1189	0504	0541	0593
4,5	690	—	—	0549	—	—
5,0	864	933	1773	0703	0825	0752

In vorstehenden Tabellen nun liegt das Material vollständig vor, auf welches der Verfasser folgenden, hier wörtlich wiederzugebenden Widerspruch gegen das Weber'sche Gesetz gründet:

»Aus diesen Tabellen ergiebt sich sofort, dass eine auch nur annähernde Gleichheit von $v-1$ für die verschiedenen Hauptzeiten t nicht existirt, und auch die Unterschiede der einzelnen Werthe zu gross sind, um sie als zufällige Abweichungen betrachten zu können. Es nimmt vielmehr im Allgemeinen $v-1$ mit wachsenden Hauptzeiten ab, und die Maxima und Minima von $v-1$ fallen mehr oder weniger genau mit den entsprechenden Maximal- und Minimalwerthen von $\varDelta$ zusammen. Am schönsten tritt diese Uebereinstimmung bei Herrn Hansen zu Tage, weil bei diesem Beobachter die Multipla des Indifferenzwerthes immer auf solche Hauptzeiten fallen, für welche $\varDelta$ und $v-1$ direct bestimmt worden sind*). Das Weber'sche Gesetz hat somit für den Zeitsinn keine Gültigkeit. — Die Werthe von $v-1$ für die Contrastversuche Taf. XV, XVI, XVII lassen einen gesetzlichen Gang nicht erkennen.«

Nun ist wahr, in den vorstehenden Tabellen variiren die Werthe $v-1$ so stark bei aufsteigendem t, dass, wenn man sich einfach beim Anblick hiervon beruhigen wollte, das Weber'sche Gesetz eben so einfach widerlegt wäre. Wenn aber der Verf. sagt:

*) Dieser Punkt gehört in die Periodicitätsfrage der $\varDelta$, worauf erst im folgenden Abschnitt zu kommen. F.

»die Unterschiede seien zu gross, um sie als zufällige Abweichungen betrachten zu können«, so vermisse ich nicht nur den Beweis davon, sondern selbst eine Untersuchung darüber, ungeachtet doch Alles auf das Ergebniss einer solchen Untersuchung ankam; ja ich meine, dass man, statt die regellos wechselnden Ab- und Zunahmen der $v - 1$ in den Tabellen zu gross für zufällige Abweichungen zu finden, ohne angeben zu können, warum, eher daraus lernen kann, wie gross zufällige Abweichungen in diesem Versuchsfelde werden können; denn den Ausdruck eines gesetzlichen Ganges bieten sie doch für Niemand dar*). Man sehe z. B. die Kollert-Estel'sche Reihe an, wo auf das Maximum $v - 1 = 1450$ der ganzen Reihe bei $t = 0{,}50$ gleich das Minimum $= 730$ der ganzen Reihe bei $t = 0{,}70$ folgt, und alle Zahlen aufs Stärkste hin- und wiederschwanken. Durch alle Zufälligkeiten durch aber macht sich das Weber'sche Gesetz doch darin geltend, dass der Fortschritt der t's immer wieder zu Werthen $v - 1$ zurückführt, welche mit früheren nahe oder ganz übereinstimmen, so dass die Constanz der $v - 1$ eben nur unregelmässig gestört erscheint. So findet sich beim fünften t der Reihe $= 1{,}20$ merklich dasselbe $v - 1$ als bei dem ersten $= 0{,}40$; ferner bei $t = 1{,}50$ in der ersten Hälfte der Reihe merklich derselbe Werth $v - 1$ als beim letzten $t = 0{,}80$; das $t = 1{,}8$ stimmt im $v - 1$ ganz mit $t = 6{,}0$ u. s. f. Wenn aber die $v - 1$ dieser verschiedenen Gleichheitsfälle selbst nicht vollständig unter einander stimmen, weichen sie doch auch nicht weiter von einander ab, als nach den Unregelmässigkeiten der ganzen Reihe durch Zufälligkeiten erklärbar bleibt. Mit Rücksicht hierauf aber liesse sich die ganze Kollert-Estel'sche Reihe vielmehr zu Gunsten des Weber'schen Gesetzes als wider dasselbe sprechend finden. Aber einmal gebe ich zu, dass die Störung des Gesetzes durch Zufälligkeiten in dieser Tabelle zu gross erscheint, um eine schlagende Bestätigung des Gesetzes darin zu finden; zweitens wird nach weiterhin folgenden Erörterungen eine untere Abweichung vom Weber'schen Gesetze bei den kleinsten t-Werthen allerdings anzuerkennen sein, ohne dass

*) Freilich können sie auch theilweise darauf beruhen, dass keine hinreichende Vergleichbarkeit der in der Kollert-Estel'schen Reihe zusammengefassten Versuche besteht.

sich diese deshalb merklich zu den grösseren erstreckt, und so sind schon desshalb die Kollert'schen $v - 1$, welche von $t = 0,4$ bis $t = 1,2$ gehen, nicht mit den Estel'schen von $t = 1,5$ und $= 1,8$ bis 5,0 und 8,0 aus gleichem Gesichtspunkte zu betrachten; drittens habe ich mich schon früher gegen die Weise der Mittelziehung, welche Seiten Kollert's wie Estel's stattgefunden, und gegen die Vereinigung ihrer Reihen zu einer aus dem Gesichtspunkte erklärt, dass sie, weil verschiedenen Beobachtern zugehörig, nicht mit einander vergleichbar sind; und halte daher die Kollert-Estel'sche Reihe überhaupt für ungeeignet, eine Unterlage für die Beurtheilung unserer Frage zu bieten.

Wollte man dennoch auf die Kollert-Estel'sche Reihe etwas geben, so würde nach dem wiederholt auf- und absteigenden Gange der $v - 1$ folgender Bemerkung Platz zu geben sein.

Liesse sich das Gesetz der Periodicität, was der Verf. für den Gang der Δ in Anspruch nimmt, halten, so liesse sich auch die periodische Wiederkehr derselben $v - 1$ bei aufsteigendem t in der Kollert-Estelreihe darauf schreiben, indem man das Gesetz von den Δ auf die $v - 1$ übertrüge. Nur würde man hiermit nicht sowohl dem Weber'schen Gesetze widersprechen, als nur eine Complication desselben mit einem Periodicitätsgesetze behaupten können, vermöge deren die $v - 1$ bei wachsendem t zwar nicht absolut constant bleiben, aber in gewissen Intervallen immer zu denselben Werthen zurückkehren; auch mag der oberflächliche Blick auf die Kollert-Estel'sche Tabelle dieser Auffassung sehr zu Statten kommen; und unstreitig wäre die Feststellung einer solchen Eigenheit des Weber'schen Gesetzes und demgemässen periodischen Ganges der $v - 1$ nicht minder interessant, als die vom Verf. behauptete Periodicität im Gange der Δ. Ja es lässt sich ganz einfach zeigen, dass die Periodicitätsfrage bezüglich der Δ und $v - 1$ mathematisch so zusammenhängt, dass mit der Periodicität der einen zugleich die der anderen steht und fällt. Liesse sich also eine gesetzliche Periodicität für die Δ experimental beweisen, so wäre sie zugleich für die $v - 1$ mathematisch mitbewiesen, indess umgekehrt der im folgenden Abschnitte zu führende Nachweis, dass sie für die Δ nur als zufällig gelten kann, von vorn herein eine gesetzliche Periodicität auch für die v und $v - 1$ ausschliesst.

In der That, nach den im III. Abschnitt entwickelten Beziehungen ist $\varDelta = \frac{d_o - d_u}{2}$, kann also $\varDelta$ nicht periodisch sein, ohne dass d_o, d_u (mindestens einer beider Werthe) periodisch sind. Anderseits ist

$$v = \sqrt{\frac{t_o}{t_u}} = \sqrt{\frac{t + d_o}{t - d_u}}\,.$$

Sofern nun die Werthe d_o, d_u als periodische in v eingehen, muss auch v und mithin $v - 1$ an dieser Periodicität Theil haben.

Jedoch ohne diesen indirecten Weg der Betrachtung weiter zu verfolgen, wenden wir uns jetzt von der ersten zur zweiten der Tabellen, auf welcher die Bestreitung des Weber'schen Gesetzes Seitens des Verf. fusst.

Auch hier sieht man in den einzelnen Reihen der drei Beobachter die $v - 1$ bei aufsteigendem t allgemein gesprochen so stark variiren, dass man daraus einen Schluss gegen das Weber'sche Gesetz ziehen könnte, wenn man nicht von vornherein ebenso wie bei der ersten Tabelle in der völligen Regellosigkeit dieser Variationen den Charakter der Zufälligkeit erkennte, die Sicherstellung aber, dass das Weber'sche Gesetz hierdurch nur gestört ist, darin fände, dass diese Variationen durch das Zusammennehmen der $v - 1$ zu mittleren Werthen, wie es in der Tabelle der Mittel No. 2. b) (S. 23) geschehen und in der folgenden Zusammenstellung recapitulirt ist, so weit schwinden, um sei es überhaupt nur noch einen Rest unausgeglichener Zufälligkeiten darin sehen zu können, die sich ja überhaupt nicht ganz ausgleichen lassen, oder nur die Spur einer noch nicht ganz überwundenen unteren Abweichung zugeben zu müssen. Und warum hat der Verfasser, da er in der Kollert-Estel'schen Reihe auf Mitteln fusst, nicht auch entsprechende Mittel aus seiner dreitheiligen Tabelle gezogen; es würde ihm dann schwerer gefallen sein, seinen Widerspruch gegen das Weber'sche Gesetz überhaupt aufrecht zu halten. Von einem Abnehmen der $v - 1$ bei wachsendem t, was der Verf. gegen das Gesetz geltend macht, liess sich selbst bei der Kollert-Estel'schen Reihe nur insofern sprechen, als man die allerersten etwas grossen $v - 1$ bei den kleinsten t-Werthen als Ausgangswerthe berücksichtigt, wo-

gegen die $v - 1$ der dreitheiligen Tabelle weder bei den einzelnen Reihen noch im Mittel eine Bestätigung davon ergeben.

Hiernach kann ich in den Ergebnissen der zweiten Tabelle nur eine Verschärfung der Ergebnisse der ersten zu Gunsten des Weberschen Gesetzes finden.

Inzwischen verlassen wir uns nicht allein auf vorige Reihe, sondern sehen zu, wie sich das anderweite Material des IV. Abschnittes zu unserer Frage stellt, und recapituliren hierzu in folgender Zusammenstellung die Reihen der $v - 1$, die sich für die verschiedenen Beobachtungsreihen im Mittel von zwei, drei oder mehr Beobachtern ergeben haben, unter Rückverweisung auf Nummer und Buchstaben der betreffenden Mitteltabellen im IV. Abschnitt. Die folgenden 5 Reihen unter No. 1 bis No. 3 sind Estel'sche, wozu die Data in seiner Abhandlung vorliegen, die zwei letzteren unter No. 4 und 5 Kollert'sche bei sehr kleinem t nach seiner Abhandlung in Philosoph. Stud. I. In den folgends aufgeführten Reihen der $v - 1$ sind keineswegs alle Data der Originaltabellen benutzt; aber nirgends hat eine Ausscheidung aus dem Gesichtspuncte stattgefunden, solche Data bei Seite zu lassen, die nicht recht zum Weber'schen Gesetz stimmen wollten, sondern nur solche, die sich vor aller Prüfung in dieser Hinsicht aus den, im VI. Abschnitte angegebenen, Gesichtspuncten nicht zu vergleichbaren Mitteln vereinigen liessen.

Da die Beobachter oder Versuchsumstände bei den folgends aufgeführten Reihen der $v - 1$ im Allgemeinen verschiedene waren, hat man nicht nach der Constanz der $v - 1$ von einer Reihe zur andern herüber, sondern nur in jeder für sich zu fragen.

Die Angaben am Eingange der Reihen sind bei der ersten Reihe, entsprechend dann auch bei den anderen Reihen, so zu verstehen. No. 1 b) verweist bemerktermassen auf die im IV. Abschnitt so bezeichnete Reihe. 1,8 — 8,0 giebt die Grenzen der t an, in denen sich die Reihe hielt. $N = 2$ bedeutet die Zahl der Beobachter, die sich bei der Reihe betheiligten. Dann folgt noch die Angabe, ob die Reihe normal oder anomal war, und ob mit oder ohne Zwischen-δ.

Mittlere $v - 1$ in folgenden Reihen:

Estel					Kollert	
No. 1. b) 1,8—8,0 $N = 2$ norm. mit δ	No. 1. c) 1,8—6,0 $N = 2$ norm. mit δ	No. 2. b) 1,5—5,0 $N = 3$ norm. ohne δ	No. 3. b) < 2,0—4,0 $N = 3$ anom. ohne δ	No. 3. b) > 2,0—4,0 $N = 3$ anom. ohne δ	No. 4. b) 0,4—1,2 $N = 4$ norm. mit δ	No. 5. b) 0,4—1,0 $N = 4$ anom. mit δ
862	860	1002	1009	987	1295	1307
1164	1215	968	1050	902	1380	946
850	1197	1032	1073	917	706	1130
1293	969	1090	1088	798	882	984
1084	915	1139	1065	1027	802	
1192		1017		992	1241	
1060		1183				
1132						

Von vorstehenden Reihen verdienen die Estel'schen und Kollert'schen besonders ins Auge gefasst zu werden, sofern erstere bei erheblich höheren t's, im Ganzen von 1,5 bis 8,0 angestellt sind, als letztere, welche nur von 0,4 bis 1,2 gehen, und sofern erstere eine Bestätigung des Weber'schen Gesetzes bei ihren höheren t's finden lassen, indess letztere für eine untere Abweichung vom Gesetse bei ihren kleinen t's sprechen.

In der That, was den ersten Punct anlangt, so sieht man in den Estel'schen Reihen die $v - 1$ nur noch so wenig und dabei so unregelmässig variiren, wie es zur Bestätigung des Weber'schen Gesetzes, in Conflict mit den, durch die Mittelziehung nicht ganz eliminirbaren, Zufälligkeiten nur gewünscht werden kann. Was den zweiten Punct anlangt, so knüpfen wir damit an frühere Versuche von Mach und Vierordt über den Zeitsinn an, die ich »In Sachen« p. 174 zu Gunsten des Weber'schen Gesetzes geltend gemacht habe, nur schon damals mit dem Zugeständniss einer unteren Abweichung von diesem Gesetze, welche nach den in dieser Hinsicht übereinstimmenden Ergebnissen beider Beobachter darin besteht, dass der relative eben merkliche Unterschied (Mach), sowie reine relative mittlere Fehler (Vierordt), im Aufsteigen von sehr kleinen t-Werthen (0,016 Mach, 0,204 Vierordt) an, sich nicht sofort constant zeigt, sondern erst bis zu einem gewissen Minimum (nach Mach

bei $t = 0,375$, nach Vierordt je nach Verschiedenheit der Ursache bei $t = 0,365$; 0,887; 1,129) herabsinkt, dann wieder aufsteigt, um über gewisse (nicht sicher bestimmbare und je nach Umständen verschiedene) Grenzen des t hinaus zu einer, nur durch Zufälligkeiten gestörten, merklichen Constanz, zum Weber'schen Gesetze zu gelangen. Ich wüsste nun nicht, was nach den Versuchen des Verf. wie Kollert's hiervon zurückzunehmen wäre*). Die Kollert'sche normale Reihe No. 4. b) zeigt, wie von $t = 0,4$ und 0,5 an $v - 1$ in auffälligster Weise sinkt, von $t = 0,8$ an aber wieder aufsteigt, und die Kollert'sche anomale Reihe No. 5. b) beweist wenigstens das Sinken von $t = 0,4$ an, indess im Uebrigen der Gang durch Zufälligkeiten regellos wird. Da diese Ergebnisse als Mittelwerthe aus den Bestimmungen von vier Beobachtern wesentlich einstimmig in den normalen und anomalen Reihen fliessen, und mit den Beobachtungen von Mach und Vierordt im wesentlichen Resultate stimmen, so dürfte man allerdings die untere Abweichung bei kleinen t-Werthen als begründet anzusehen haben, ohne damit dem Weber'schen Gesetze nach Massgabe des Aufsteigens zu höheren t-Werthen widersprechen zu können.

Inzwischen ist selbstverständlich, dass, wenn eine untere Abweichung für kleinere t-Werthe aus irgendwelchen, bisher unbekannten, Gründen einmal besteht, sie nicht plötzlich bei einem gewissen höheren t-Werthe aufhören kann, um dem reinen Weber'schen Gesetze Platz zu machen, sondern nur bei wachsendem t gegen die mit wachsendem Werthe, welche sich dem Weber'schen Gesetze fügen, klein genug werden kann, um in den Zufälligkeiten der Beobachtung mehr oder weniger unerkennbar aufzugehen, ohne dass eine bestimmte Grenze angebbar ist, von wo an dies der Fall ist; und so kann man eine Spur der sich in die Estel'schen Versuche bei den höheren t-Werthen noch mit hineinziehenden unteren Abweichung noch darin finden, dass in allen fünf der Werth $v - 1$ bei dem kleinsten t etwas kleiner als bei dem grössten ist. Umgekehrt kann man hierin weder einen Beweis der principiellen Ungültigkeit des Weber'schen Gesetzes finden, noch eine Unanwendbarkeit des Ge-

*) Hiergegen habe ich die Bestätigung, die ich in »Revis.« p. 122 in den Kollert'schen Versuchen für das Weber'sche Gesetz zu finden glaubte, nach gründlicherem Zusehen allerdings fallen zu lassen.

setzes im Gebiete des Zeitsinnes danach behaupten; sondern, ersteres anlangend, so hat man in den betreffenden Erfahrungen nur das Zeichen einer Complication desselben mit einem Umstande zu sehen, der verhältnissmässig um so weniger wiegt, je mehr man mit den t aufsteigt, und letzteres anlangend, so bleibt über die niedersten Zeitwerthe hinaus die Abweichung vom Gesetze höchstens als eine Mitbestimmung zweiter Ordnung spürbar, so dass man sich doch in Betreffs der Hauptverhältnisse des Zeitsinnes an das Gesetz nicht nur halten kann, sondern halten muss. Wer möchte die Gültigkeit des Fallgesetzes dadurch verdächtigt und den Werth desselben geschmälert finden, dass es bei den Versuchen durch den Widerstand der Luft complicirt und gestört wird; um so weniger aber wird es gestört, je schwerer man die fallende Kugel nimmt, und so das Weber'sche Gesetz im Gebiete des Zeitsinnes, je grösser man den Hauptwerth t nimmt.

Von einer oberen Abweichung über gewisse Grenzen des t hinaus liegt weder in den früheren Versuchen von Mach und Vierordt, noch den neueren des Verf. ein Anzeichen vor; im Gegentheil fand Vierordt, wie ich »In Sachen« p. 176 angegeben, den reinen relativen mittleren Fehler ε bei folgenden hohen t-Werthen (diese zur Ausgleichung von Zufälligkeiten als Mittel von je vier aufsteigenden Werthen bestimmt) wie folgt:

$t =$	11,00	19,288	42,620
$\varepsilon =$	16,02	15,20	17,65

was man in Betracht der grossen Unsicherheit der Einzelbestimmungen, aus denen diese Resultate als mittlere fliessen, einerseits und der grossen Höhe der t, in welcher sie sich bewegen andererseits, als Erstreckung des Gesetzes bis zu grosser Höhe, wohl gelten lassen kann.

Gegen die Beweiskraft der Versuche mit so hohen Hauptzeiten macht nun freilich der Verf. p. 63 den Einwand, die Constanz des relativen mittleren Fehlers trete hier erst bei Zeiten ein, »die einer directen Schätzung nicht mehr zugänglich sind, für die vorliegende Frage also auch nicht als ausschlaggebend betrachtet werden können«, und er bezieht sich zur Begründung dieses Einwandes auf

folgende von ihm (p. 50) gemachte Bemerkung: »als das grösste Intervall, welches man noch als einheitliches Ganze auffassen kann, ergab sich aus vielen mit anderen, in psychophysischen und physikalischen Untersuchungen wohlgeübten, Beobachtern, die sich aber an Zeitschätzungen noch nicht betheiligt hatten, angestellten Versuchen die Zeit von 5 bis 6 Secunden. An einzelnen Tagen gelang es manchen Beobachtern, bis zu 8 Secunden noch zu schätzen, doch war hierbei die Ermüdung so stark, dass selten eine Versuchsreihe durchgeführt werden konnte. Grössere Intervalle zu vergleichen, ist nur durch Eintheilung derselben möglich, und der erhaltene Schätzungsfehler gilt also nicht für jene Hauptzeit, sondern nur für den einzelnen Theil derselben, so dass alle Versuche, die grösseren Intervallen zu Grunde liegen, so gut wie werthlos sind«.

Hiergegen aber scheint mir Folgendes zu sagen: Gesetzt, Zeitintervalle über 8 Secunden hinaus liessen sich wirklich überall nicht mehr als einheitliches Ganze auffassen, sondern nur vermöge subjectiver Eintheilung in kleinere Intervalle, so würde doch die Grösse der Unterschiedsschwelle wie des mittleren Schätzungsfehlers nicht ohne Weiteres blos von der Grösse der Theilungsintervalle abhängig zu machen sein, sondern auch die Zahl derselben, die es in die Schätzung mit aufzunehmen gilt — denn von einer wirklichen Zählung kann doch nicht die Rede sein — mit in Rücksicht kommen, also Vierordt's obige Versuche nur eine Erweiterung des Weber'schen Gesetzes von einheitlich aufgefassten Zeiten auf das Product von solchen in die subjectiv geschätzte Zahl derselben bedeuten, mithin nicht werthlos sein. Ausserdem aber gesteht ja der Verf. selbst, dass je nach Beobachtern und Umständen die Grenze der einheitlich auffassbaren Zeitgrössen sehr verschieden sein könne, und wenn sie sich bei seinen Beobachtern nicht über 8 Secunden hinaus steigern liess, so konnte der Verf. daraus noch nicht ohne Weiteres folgern, dass für Vierordt's Individualität und Versuchsweise dieselbe Grenze bestand; vielmehr geht aus dessen directen Angaben das Gegentheil hervor, indem er ausdrücklich als selbstverständlich für die hier in Betracht genommenen Versuche mit langen Hauptzeiten betont, dass das, was der Verf. gegen dieselben einwirft, zu vermeiden sei, wonach er also auch die Vermeidung davon möglich gefunden haben muss. In der That sagt Vierordt in seiner Schrift

»der Zeitsinn« p. 51 bei Gelegenheit der Mittheilung dieser Versuche ausdrücklich: »dass man bei langen Zeiten jedes sonstige Unterstützungsmittel, wie z. B. das subjective Signalisiren von Zwischenpuncten zu vermeiden hat, dass man eine gegebene Zeit nicht etwa in einige Partialzeiten in der Vorstellung abtheilt, um Halt- und Zwischenpuncte zur besseren Auffassung des Ganzen zu gewinnen, versteht sich von selbst. Der an solche Versuche Herantretende bedarf in der That eines gewissen Willenseinflusses, um Einflüsse der Art vollkommen fern zu halten«.

Man könnte nun freilich den Verdacht hegen, dass das Weber'sche Gesetz, ohne die reinen Verhältnisse des Zeitsinnes etwas anzugehen, durch die zur Constatirung des Gesetzes angestellten Versuche selbst erst eingeführt würde und ausserhalb derselben weder Geltung noch Bedeutung beanspruchen könnte; und in der That muss man gestehen, dass durch die Versuche über den Zeitsinn Verhältnisse eingeführt werden, die ausser diesen Versuchen überhaupt nicht oder jedenfalls nicht in solcher Regelmässigkeit bestehen, um zur Auffindung eines Gesetzes führen zu können. In den Versuchen richten wir die Aufmerksamkeit ausdrücklich auf die Hauptzeit wie auf die Vergleichszeit; ausser den Versuchen läuft die Zeit ohne das ab, indem wir die Aufmerksamkeit vielmehr auf das richten, was in der Zeit abläuft; und die Zeit kann uns danach kürzer oder länger erscheinen, je nachdem wir uns mehr oder weniger durch den Zeitinhalt, wie man sagt, unterhalten finden. Ausser den Versuchen ferner nehmen wir keine solche Verschiebungen einer Vergleichszeit gegen eine Hauptzeit vor, als die sind, womit wir zu Gesetzen im Gebiete des Zeitsinnes zu gelangen suchen. Wohl aber — und das ist der Punct, auf den es ankommt — halten wir bei den Versuchen, deren Resultate wir als massgebend für die Verhältnisse des Zeitsinnes auch ausser den Versuchen betrachten, die Verhältnisse der Aufmerksamkeit, die Weisen jener Verschiebung bei grossen und kleineren Hauptzeiten und Vergleichszeiten so gleich wie nur immer möglich, so dass wir die Schätzungsverhältnisse der Zeiten verschiedener Grösse gegen einander nicht von jenen constant gehaltenen Umständen der Versuche, die zur Auffindung dieser Gesetze dienten, sondern nur auf die Grössenverhältnisse der Zeiten selbst schieben können. Und dabei kommt uns das selbst zu statten, dass, während ausser den

Versuchen die scheinbaren Zeitlängen nicht blos durch die physische (resp. psychophysische) Zeitlänge, sondern auch durch die Ursache, wie unsere Aufmerksamkeit durch den Inhalt beschäftigt wird, abhängt, grosser Zufälligkeit unterliegt, hingegen bei den Versuchen die Aufmerksamkeit durch gleichförmige Richtung auf die Zeitlänge selbst, unter Abstraction von einem speciellen Inhalt, diesem zufälligen Wechsel möglichst entzogen wird.

Ein zweiter Umstand aber, der jenem Verdacht entgegensteht, ist der, dass, da sich das Weber'sche Gesetz ausser im Gebiete des Zeitsinnes in so vielen anderen Gebieten geltend macht, worin die Versuche in ganz verschiedener Weise, nur immer vergleichbar bezüglich der verglichenen Grösse, angestellt werden, es schwer halten würde, in diesen verschiedenen Versuchsumständen Bedingungen für das Zustandekommen desselben Gesetzes zu finden.

Verstehen wir nun überhaupt Kürze halber unter scheinbarer oder psychischer Zeit und wirklicher oder physischer Zeit einander gegenüber die Zeit, wie sie unserem Bewusstsein, ob länger oder kürzer, erscheint, und die äusserlich, physisch messbare oder mit solcher vergleichbar gedachte Zeit, wie es von der Zeit des Ablaufes innerer psychophysischer Vorgänge gilt, so wird nach Weber'schem Gesetze, ist es anders auf den Zeitsinn übertragbar, eine Hauptzeit psychischerseits um gleichviel zu wachsen scheinen, wenn der Zuwachs physischerseits das gleiche Verhältniss zur Hauptzeit behält, also, wenn diese wächst, proportional mitwächst, wovon eine leicht zu ziehende Folgerung ist, dass ein sich gleichbleibender Zuwachs zu einer wachsenden Hauptzeit psychisch um so kleiner erscheint, je mehr die Hauptzeit wächst, zu welcher er in Bezug gefasst wird, indem er ein immer kleineres Verhältniss dazu gewinnt.

Zunächst scheint hiegegen Folgendes zu laufen:

Setzen wir die Fälle, dass zur Hauptzeit 1 Minute eine Zusatzzeit 1 Minute komme, zur Hauptzeit 1 Stunde eine Zuwachszeit 1 Stunde, zur Hauptzeit 1 Tag eine Zuwachszeit 1 Tag, zur Hauptzeit 1 Jahr eine Zuwachszeit 1 Jahr, so ist das Verhältniss der Zusatzzeit zur Hauptzeit in allen diesen Fällen dasselbe und müssten also nach Weber'schem Gesetze alle diese Zusatzzeiten 1 Minute, 1 Stunde, 1 Tag, 1 Jahr, psychisch gleich gross erscheinen, wenn man sie als Zuwüchse zu den Hauptzeiten fasst, mit denen sie entsprechend

wachsen, was offenbar nicht der Fall ist; denn 1 Jahr als Zuwachs zu 1 Jahr wird mir immer grösser erscheinen, als 1 Minute als Zuwachs zu 1 Minute.

Aber man hat zwei Fälle zu unterscheiden: den Fall des ganzen Lebens, um ihn kurz so zu bezeichnen, wo wir die Zeitlängen nicht, oder nur ausnahmsweise ein- und das andremal, mit Aufmerksamkeit vergleichend verfolgen, und den Fall der Versuche, wo wir es ausdrücklich während der ganzen Vergleichszeit der Versuche thun, und dadurch so zu sagen die Versuchsdauer aus der ganzen Lebenszeit als besonderen Untersuchungsgegenstand aussondern. Erstenfalls nun zieht sich der Vergleich jeder bestimmten Zeitlänge der Gegenwart unwillkürlich und sozusagen von selbst, aber nicht in Bezug zu einer einzelnen willkürlich bestimmten frühern Zeit, als wie einer Minute, einer Stunde, einem Tage oder Jahre, sondern in Bezug zu der ganzen vergangenen früheren Lebenszeit, und hier bestätigt sich die obige Folgerung des Weber'schen Gesetzes und hiermit dieses selbst in der bekannten Thatsache, dass uns die Zeit um so rascher zu laufen scheint, je älter wir werden, indem die neu durchlebte Zeit um so kürzer scheint, je grösser die schon durchlebte Zeit im Verhältniss dazu ist, eine Thatsache, die schon früher die Aufmerksamkeit in dieser Beziehung auf sich gezogen hat, worüber man meine »Revision« p. 175 f. vergleichen kann.

Was nun aber den Fall absichtlich angestellter Versuche mit continuirlich auf den Zeitvergleich gerichteter Aufmerksamkeit anlangt, so ist es überhaupt unmöglich, solche auf den Vergleich grösserer Hauptzeiten und Zusatzzeiten anzuwenden*), jedenfalls haben sie bis jetzt keine solche Anwendung finden können; es handelt sich immer nur um kleine, meist weit unter 1 Minute bleibende Hauptzeiten, und wenig davon unterschiedene Vergleichszeiten. Auch erklärt sich dies daraus, dass nach der Natur der Aufmerksamkeit dieselbe überhaupt nicht stetig in gleicher Richtung und in gleichem Sinne gerichtet und gespannt erhalten werden kann, was doch nöthig sein würde, um den Conflict der absichtlichen Schätzung mit der unwillkürlichen

*) In einer Tabelle in Vierordt's Schrift über den Zeitsinn p. 53 finde ich, dass er mit der Hauptzeit bis zu 90 Secunden gegangen ist, wohl das Höchste, was in den bisherigen Versuchen vorgekommen ist; und nach den Bemerkungen unseres Verf. p. 50 mag es seine Schwierigkeit haben, so weit zu gehen.

Schätzung, die uns durch das ganze Leben geläufig geworden ist, zu überbieten; und an sich stände daher der Einwand frei, dass man von den so zu sagen im Kleinen unter andern Bedingungen angestellten Versuchen noch keinen Schluss ins Grosse für das Leben machen könne, wenn nicht die obige Thatsache selbst eine Bestätigung des im Kleinen gewonnenen Gesetzes im Grossen darböte.

Ich gebe dabei zu, dass man über diese Verhältnisse verschieden speculiren und sich die Thatsachen in verschiedener Weise zurecht legen könne, nur wird man dabei die Thatsachen selbst bestehen lassen müssen, dass das Weber'sche Gesetz sich im Kleinsten wie Grössten unter den angegebenen Verhältnissen bestätigt findet, ohne freilich hindern zu können, wenn jemand meint: aber unter andern Verhältnissen, und in Zwischenfällen, wenn sie nur herstellbar wären, würde es sich doch nicht bestätigen.

Dass uns die Zeit je nach ihrem Inhalt länger oder kürzer erscheinen kann, ist eine Sache unwillkürlicher Schätzung, wodurch der allgemeine Zeitvergleich modificirt wird. Nun kann man auch nach Gesetzen suchen, wie die psychische Zeit von diesem Inhalt mit abhänge, wenn derselbe als veränderlich vorausgesetzt wird, womit wir uns aber hier nicht beschäftigen, und womit sich zu beschäftigen bis jetzt überhaupt nur die Aufgabe ohne einen sicheren Angriffspunct dafür vorliegt. Genug nur, dass man die Bedingung oder wenn man will, Beschränkung, unter welcher das Weber'sche Gesetz für den Zeitsinn in Anspruch zu nehmen ist, d. i. Vergleichbarkeit des Zeitinhaltes, nicht übersehe.

Inzwischen will ich doch folgenden, mir bis jetzt räthselhaft erscheinenden, Punct der Beachtung empfehlen, dass nämlich die scheinbare Zeitlänge durch Haschisch- und Opiumrausch ausserordentlich wachsen, die Zeit sich dadurch in eine Ewigkeit auszudehnen scheinen kann, ohne dass Langeweile dabei stattfindet; im Gegentheil kann eine rasche Flucht und Folge angenehmster Vorstellungen und hiemit willkommenste Unterhaltung dabei stattfinden; indess doch anderseits eben so gewiss ist, dass in gewöhnlichen Zuständen die Zeit um so kürzer scheint, je lebhafter und angenehmer wir uns unterhalten fühlen. Hier müssen noch psychologische Unterscheidungen gemacht werden, die bisher nicht klar gemacht sind, und

denen natürlich auch psychophysische Unterscheidungen zugehören werden.

Die Beobachtungen in betreffender Hinsicht sowohl bei Haschisch- als Opiumrausch sind sehr zahlreich und meist übereinstimmend. Beiläufig folgende Angabe von J. Moreau in seiner Schrift: »Du Hachisch«. Paris 1845, p. 68: »Sous l'influence du hachisch, l'esprit peut tomber dans les plus étranges illusions relativement au temps et à l'espace. Le temps semble d'abord se trainer avec une lenteur qui désespère. Les minutes deviennent des heures, les heures des journées; bientôt, d'exagération en exagérations, toute idée précise de durée nous échappe, le passé et le présent se confondent. La rapidité avec laquelle se succèdent nos pensées, l'état de rêverie qui en est la suite, expliquent ce phénomène; car si le temps paraît plus long que s'il était mesuré par des horloges terrestres, ce sont les actions ou les faits renfermés dans cet intervalle qui en reculent les limites par leur ampleur.«

Ich muss nur hiezu bemerken, dass letztere Erklärung den obigen Widerspruch nicht hebt, der darin liegt, dass uns doch in normalen Zuständen eine Zeit um so kürzer scheint, je besser wir uns darin durch eine Mannichfaltigkeit von Vorstellungen unterhalten finden, und dass ein anderer Widerspruch darin liegt, dass der Verf. von einer »verzweifelnden« Länge spricht, in welche sich die Zeit durch den Haschischrausch ausdehne, indess er von der anderen Seite (an anderer Stelle) das Wonnegefühl, was dieser Rausch mitführt, in lebhaftesten Ausdrücken schildert. Ich glaube mich aber nicht zu erinnern, den Ausdruck, dass die Zeit im Haschischrausche »verzweifelnd« lang scheine, sonst wo gebraucht, oder durch ähnliche Ausdrücke ersetzt gefunden zu haben.

IX. Ueber die Periodicitätsfrage.

Bemerktermassen steigen nach dem Verf. die mittlen Schätzungsfehler $\Delta \left(= \frac{d_o - d_u}{2} = \frac{t_o + t_u}{2} - t\right)$ nicht gleichförmig mit dem t auf, sondern unterliegen dabei einer abwechselnden Vergrösserung und Verkleinerung mit Maximis und Minimis, kurz einer Periodicität, und zwar einer gesetzlichen, welche er sogar (p. 57) durch eine Cosinusfunction zu repräsentiren versucht, ohne freilich auf eine Zusammenstellung zwischen Beobachtung und Rechnung danach einzugehen.

Beim Versuch, diese Periodicität nachzuweisen, fusst der Verfasser hauptsächlich auf denselben normalen und anomalen Reihen der drei Beobachter H, Tr, T (XII, XIII, XIV normal, XV, XVI, XVII anomal), die schon der Prüfung des Weber'schen Gesetzes zu Grunde

lagen, und in unserm IV. Abschnitt unter No. 2 und 3 soweit mitgetheilt sind, als für diese Prüfung genügte, ohne dass aber der Gang der Δ dabei mit verzeichnet ist. Nun liesse sich zwar derselbe aus den dort gegebenen t_o, t_u nach der Gleichung $\Delta = \frac{t_o + t_u}{2} - t$ finden; um ihn aber für die folgende Discussion unmittelbar vorliegend zu haben, gebe ich ihn folgends für die normalen Specialreihen aller drei Beobachter und für die anomale Reihe wenigstens eines Beobachters (H) nach den Tabellen des Verfassers wieder. Die Werthe Δ für die normalen Reihen werden vom Verfasser als $\Delta -$, für die anomalen als Δ_c bezeichnet, wovon erstere Bezeichnung schon bemerktermassen bedeutet, dass die betreffenden Δs negative sind, was zwar auch im Allgemeinen von den Δ_c gilt, aber doch mit ein paar vereinzelten Ausnahmen bei Tr und T. Der Index c bei den Δs der anomalen Reihen erinnert an die Beeinflussung derselben durch den Contrast. Zur Erläuterung der anomalen oder »Contrastreihen«, wie sie auch vom Verfasser genannt werden, ist überhaupt auf die Besprechung derselben im IV. Abschnitt dieser Abhandlung S. 23 ff. zu verweisen; hier rufe ich nur zurück, dass die Werthe der Contrastreihen, die von einem entgegengesetzten Contrast beeinflusst sind, von mir als Werthe $<$ und $>$ unterschieden und im IV. Abschnitt in besonderen Reihen aufgeführt sind. Dies ist vom Verfasser nicht geschehen, sondern die $\Delta <$ und $\Delta >$ sind von ihm für jedes t unmittelbar hinter einander aufgeführt, wie man es in der folgends mitgetheilten anomalen Reihe für H sieht. Da sie sich aber doch danach unterscheiden liessen, ob das t, dem sie zugehören, ein kleineres oder grösseres t_c vorgängig hat, ist die demgemässe Bezeichnung $<$ oder $>$ jedem Δ von mir selbst zugefügt.

Werthe von $\Delta -$ für die normalen Specialreihen.
H, Tr, T (XII, XIII, XIV).

t	H		Tr		T	
	$\Delta -$	n	$\Delta -$	n	$\Delta -$	n
1,50	0,038	4	0,058	4	0,049	3
2,00	055	10	068	7	069	9
2,25	042	3	—	—	063	2
2,50	100	2	079	6	088	2

t	H		Tr		T	
	$\Delta-$	n	$\Delta-$	n	$\Delta-$	n
3,00	0,100	1	0,131	4	0,100	2
3,50	200	1	175	5	183	3
3,75	—	—	137	2	170	5
4,00	180	5	187	6	260	8
4,50	188	2	—	—	—	—
5,00	312	2	362	2	287	2

Werthe von Δ_c für die anomale Specialreihe H (XV).

t	t_c	Δ_c	n	t	t_c	Δ_c	n
2,00	1,50	$-0,047 <$	1	3,50	2,50	$-0,182 <$	8
	4,00	$038 >$	2		4,50	$163 >$	4
	4,50	$025 >$	1	4,00	2,00	$218 <$	7
2,25	1,50	$090 <$	3		5,00	$150 >$	4
	4,50	$033 >$	3	4,50	2,50	$275 <$	1
2,50	2,00	$100 <$	4		4,00	$250 >$	1
	4,00	$068 >$	1		5,00	$250 >$	2
3,00	2,00	$114 <$	11	5,00	2,00	$200 <$	1
	4,50	$100 >$	4		4,00	$175 >$	1

Nach vorigen Tabellen kann man sich selbst von dem bezugsweisen Gange der Δ zu den t überzeugen, und die Schlüsse des Verfassers bezüglich eines periodischen Charakters dieses Ganges danach prüfen. Nun kann der periodische Gang eines Werthes, anstatt in einem wechselnden Steigen und Fallen des Werthes selbst, sich auch in einem solchen von Veränderungen desselben niederer oder höherer Ordnung aussprechen; da sich aber der Verfasser auf einen solchen nicht eingelassen hat, haben wir auch unserseits keinen Anlass es zu thun, sondern achten mit ihm nur darauf, inwiefern der Gang der Δ selbst sich zwischen Maximis und Minimis mit verhältnissmässiger Regelmässigkeit bewegt.

Insofern e i n Maximum oder Minimum noch nichts für Periodicität beweist, in einer fortlaufenden periodischen Reihe aber Maxima und Minima sich in gleicher Zahl entsprechen, beachten wir einfachheitshalber folgends nur die Minima, wie dies auch vom Verf. geschieht, und sehen zuvörderst die drei normalen Reihen auf ihre

Minima an. Die den Minimis von Δ zugehörigen t bezeichnen wir kurz als Minimalzeiten.

In der Reihe H sieht man zwei Minima von $\Delta = 0{,}042$ und 0,180, respective bei $t = 2{,}25$ und 4,0 als Minimalzeiten, in der Reihe T ebenso zwei Minima bei $t = 2{,}25$ und 3,75, und in der Reihe Tr wenigstens ein Minimum bei $t = 3{,}75$; und unstreitig würden sich bei weiterer Fortsetzung der Reihen auch noch mehr Minima in denselben einstellen; wogegen die kleinen Δ-Werthe zu Anfange der Reihen, bei $t = 1{,}50$, nicht unbedenklich als Minima, und also auch $t = 1{,}50$ nicht unbedenklich als Minimalzeit, zählen können, wie doch vom Verf. (p. 56) geschieht, da zum Charakter eines Minimum nicht blos gehört, dass es kleiner als der folgende Werth, sondern auch, dass es kleiner als der vorangehende Werth sei, wir aber das dem Anfange der Reihe vorangehende Δ nicht kennen.

Zwischen den Minimis und zugehörigen Maximis sieht man nun die Δ auf- und absteigen; und nehmen wir mit dem Verf. die Zeit als Abscissen, die Δ dazu als Ordinaten, so stellt sich ein periodischer Gang der Δ durch eine abwechselnd steigende und fallende, kurz undulirende, Curve dar, wie der Verf. wirklich solche Curven zur Repräsentation des Ganges der Δ in den, seiner Untersuchung unterliegenden, Reihen verzeichnet hat. Es darf nicht befremden, dass im Allgemeinen die Δ— immer durch mehrere Werthe hinter einander (in negativem Sinne) aufsteigen, um einmal abzusteigen und dann wieder durch mehrere Werthe aufzusteigen, sofern der Gang der Δ— doch im Allgemeinen ein aufsteigender ist, was nicht hindern würde, dass die einzelnen Senkungen, wodurch der aufsteigende Gang unterbrochen wird, einen periodischen Charakter tragen, der sich im Gange der Curven aussprechen kann.

Nun ist freilich natürlich, ja selbstverständlich, dass, wenn eine gesetzliche Periodicität im Gange der Δ, um die es doch zu thun sein soll, an sich gar nicht bestände, doch wegen unausgeglichener Zufälligkeiten die Curven bald steigen bald fallen und hierdurch einen undulirenden Charakter annehmen könnten; wonach also durch das Dasein einer solchen Form noch gar nichts für eine gesetzliche Periodicität bewiesen wird. Alles kam also darauf an, um das so interessante Resultat einer nicht blos zufälligen oder scheinbaren Periodicität der Δ festzustellen, sich zu überzeugen, ob

die Zufälligkeiten nicht allein hinreichen, die Minima und Maxima im Gange der $\varDelta$ zu erklären; worauf aber der Verf. wieder nicht eingegangen ist.

Des Näheren ist in dieser Hinsicht in Rücksicht zu ziehen, dass die $\varDelta$ nicht isolirte, für sich beobachtbare, Grössen sind, sondern Unterschiede, zu deren Bestimmung man vier Grössen beobachten muss, von denen jede einem zufälligen Beobachtungsfehler unterliegt. Diese können theils in gleicher, theils in entgegengesetzter Richtung gehen, und namentlich erstenfalls sich leicht zu einem zufälligen Fehler des $\varDelta$ zusammensetzen, der mit dem $\varDelta$ selbst von gleicher Ordnung ist*). In der That hat man bemerktermassen:

$$\varDelta = \frac{t_o + t_u - 2t}{2};$$

t_o und t_u aber sind jedes selbst aus zwei zu beobachtenden, mithin Beobachtungsfehlern unterliegenden, Werthen zusammengesetzt, und summiren sich nicht mit $2t$, sondern bilden eine Differenz damit. Und wenn die Gefahr grosser zufälliger Fehler der $\varDelta$ dadurch vermindert scheint, dass die $\varDelta$'s zum Theil Mittelwerthe aus einer ganzen Anzahl (n) von Bestimmungen (bis zu 10 und 11 gehend) sind, so hat sich der Verf. bei anderen mit 1 oder 2 begnügt, ohne, wie gesagt, Gründe anzugeben, warum hier so, da so.

Dies dahingestellt, so hielt sich aber der Verf. des Eingehens auf die Zufälligkeitsfrage vielleicht durch den directen Nachweis überhoben, dass die in den Reihen vorfindlichen Minima trotz aller Zufälligkeiten oder im Uebergewicht über alle Zufälligkeiten, an die man denken möchte, eine nur unwesentlich gestörte Periodicitätsregel zeigen, die es nur gilt, klar vor Augen zu stellen, um allen Zweifel schwinden zu lassen. Lassen wir nun den Verf. in dieser Hinsicht selber sprechen.

Nachdem der Verf. die contrastfreien Reihen in Tab. XII, XIII, XIV und die Contrastreihen in Tab. XV, XVI, XVII seiner Abhandlung für die drei Beobachter gegeben hat, sagt er, nach einigen Zwischenerörterungen, p. 56: »Construirt man aus den oben ange-

*) Dies könnte als ins Leere gesprochen gelten, wenn die factischen Sicherheitsverhältnisse der $\varDelta$ dagegen sprächen; aber hierüber ist in der Abhandlung des Verf. überhaupt kein Anhalt zu finden; und so bleibt der oben ausgesprochenen Möglichkeit noch voller Raum.

gebenen Tabellen XII, XIII, XIV der contrastfreien Versuche den Verlauf von Δ für H, Tr, T, so erhält man die folgenden drei Curven. [Es folgt die Verzeichnung derselben, wonach sie sich in einer sehr geschlängelten, sich durcheinander schlingenden Form darstellen.] Dabei sind die Werthe von Δ für diejenigen Hauptzeiten, für welche keine contrastfreien Versuche vorliegen, in der Weise gewonnen, dass aus den einander am nächsten liegenden Werthen der Contrastversuche das Mittel gezogen wurde, mit Rücksicht auf diejenigen Factoren, welche nach S. 55 die Grösse der Contrastwirkung bestimmen*). Wie der Augenschein lehrt, weichen alle diese Curven in der Form nicht allzusehr von einander ab, wohl aber in Bezug auf die Lage der einzelnen Bogen; es liegen nämlich die Minima von Δ, also die höchsten Puncte der Bogen**):

für H bei ungefähr	1,50;	2,25;	3,00;	3,75;	4,50	Sec.
- Tr - -	1,50;	2,20;	3,00;	3,70;	4,40	-
- T - -	1,55;	2,30;	3,10;	3,80;	4,60	-

Diese Zahlen sind aber fast genaue Multipla von den Zahlen:

H : 0,75 ; Tr : 0,74 ; T : 0,77 ***),

und diese sind die Indifferenzpuncte für die betreffenden Beobachter†).

*) Auf p. 55, wohin der Verf. verweist, kann nur folgende, einer sehr unbestimmten Vermuthung Raum lassende, Bemerkung hieher gezogen werden: »Numerisch lässt sich wenigstens aus den vorliegenden Versuchen die Grösse dieses Contrasteinflusses nicht bestimmen; doch ergiebt sich so viel, dass dieselbe im Allgemeinen abhängt von der Grösse der Differenz der contrastirenden Zeiten, und dass die nachfolgende längere nicht in dem Masse von der vorangehenden kürzeren beeinflusst wird, als umgekehrt.«

**) Da die Δ — als negative Ordinaten von der horizontalen Zeit-Abscissenlinie abwärts gehen, so liegen die Minima derselben natürlich am höchsten, nicht am tiefsten.

***) Der Verf. hat in der Mittheilung der normalen wie anomalen Reihen Tr dem T vorangehen lassen, worin ich ihm in Abschn. IV gefolgt bin, hat hingegen bei obiger Anführung der Zahlen der Multipla und Indifferenzpuncte die Ordnung umgekehrt, was beim Vergleich derselben mit den Werthen der betreffenden Reihen leicht verwirrend wirkt; daher ich hier von der übrigens genauen Wiedergabe der Angaben des Verf. insoweit abgegangen bin, als ich auch hier Tr dem T vorangehen liess, was ich übrigens nur deshalb besonders bemerke, um nicht beim Vergleich meiner Wiedergabe mit der Originalangabe einer Nachlässigkeit oder Verwechselung geziehen zu werden.

†) Anmerkungsweise fügt der Verf. hinzu, für H und T sei der Indifferenz-

Es ist also die Zeitschätzung nicht nur im eigentlichen Indifferenzpunct am genauesten, sondern erreicht auch bei den Vielfachen desselben relative Maxima und Minima der Genauigkeit. Dies ist ein Resultat, das auf die rhythmische Gliederung des zeitlichen Verlaufes unserer Vorstellungen hinweist und in Verbindung mit dem Resultate von *Trautschold* die Annahme nahe legt, dass die oben als Indifferenzwerth bezeichnete Zeit von durchschnittlich 0,727 Secunden Dauer für unser Bewusstsein die Zeiteinheit darstellt.«

Alles dies ist nun sehr interessant; aber die Begründung davon? Zuvörderst hat der Verf. die Frage, wiefern die Minima der Contrastreihen von Zufälligkeiten beeinflusst sind oder abhängen, eben so wenig erwogen als bei den contrastfreien Reihen. — Zweitens ist mir das Princip gänzlich unklar geblieben, nach welchem er geglaubt hat, Werthe aus den Contrastreihen, noch dazu ohne Unterscheidung ihrer beiden Arten $<$ und $>$, so zwischen die der contrastfreien Reihen interpoliren zu können, als wenn man es mit *einer* Reihe zu thun hätte, während doch normale und anomale Reihen aufzeiglich einen verschiedenen Gang verfolgen, der ja eben veranlasst hat, sie zu trennen. Er scheint die Zulässigkeit solcher Vermischung für selbstverständlich gehalten zu haben, indess mir die Unzulässigkeit davon selbstverständlich scheint; jedenfalls ist er nicht einmal auf eine Erörterung der Frage in dieser Hinsicht eingegangen. — Drittens vermag ich selbst bei Absehen hiervon dem Verf. in der Weise, wie er durch Mitbenutzung der Contrastreihen zu seinen fünf Minimalzeiten als einfachen Multiplis des Indifferenzpunctes jedes Beobachters gelangt ist, überhaupt nicht zu folgen. — Und vor Allem meine ich, da die Indifferenzpuncte das ganze Fundament der Behandlung der Periodicitätsfrage für den Verf. bilden, sofern die Multipla nach denselben periodisch abgestuft und zu bemessen sind, dass die Feststellung dieser Puncte für die verschiedenen Beobachter in objectiv genügenderer Weise hätte geschehen sollen, als durch obige kurze Anmerkung und Verweisung, nämlich durch eben so ausdrück-

punct besonders von ihm bestimmt, für Tr ergebe er sich aus Wundt, physiol. Psych. II. p. 286.

*) Experimentelle Untersuchungen über die Association der Vorstellungen. Philos. Stud. T. 2, p. 249.

liche Mittheilung der Versuche, wodurch die Feststellung der Indifferenzpuncte geschah, als der Versuche, wodurch deren Multipla bestimmt wurden, mit Angaben, welche erkennen liessen, wiefern beide der Zeit und den Umständen nach so zusammenhingen und zusammenstimmten, um der Vergleichbarkeit sicher zu sein. Wer aber vermag für diese Vergleichbarkeit zu stehen, da für H und T überhaupt keine Andeutung vorliegt, wie es in diesen Beziehungen stand, indess man bei Tr aus der Anmerkung selbst sieht, dass der Indifferenzpunct aus andern Versuchen hieher übertragen ist, die bei näherem Zusehen (s. unten) in einem für die Frage wesentlichen Puncte von denen abweichen, um die sich's hier handelt. Oder wäre der Indifferenzpunct wirklich eine so feste Grösse für jeden Beobachter, dass man von einer zur andern Zeit und von andern Versuchsumständen her auf seine Constanz rechnen kann? Der Verf. scheint es vorauszusetzen; aber um diese Voraussetzung zu theilen, müsste man die Versuche kennen, worauf sie sich stützt, und von solchen liegt meines Wissens bis jetzt nichts vor. Allerdings sagt Wundt in s. Grundz. d. ph. Ps. II. 286: »Hält man sich an die oben angedeutete [von mir unten näher zu bezeichnende] einfachste Versuchsform, so ergiebt sich, dass bei vorsichtiger Auffassung der Indifferenzpunct eine sehr constante Lage hat, die selbst bei verschiedenen Individuen nur wenig zu variiren scheint«, und wenn schon er keine Versuche dazu mittheilt, dass dies auch von einer Zeit zur andern für dasselbe Individuum gilt, darf man doch voraussetzen, dass er solche Versuche im Rückhalte hat; und so giebt er für die Versuchsform, die er hiebei im Auge hat, den Indifferenzpunct Trautschold's wirklich zu 0,739 an, was sich zu 0,74 abkürzen liess. Die von Wundt »oben angedeutete einfachste Versnchsform« ist aber keine andere, als die, wo zwischen t und t' ein Zwischenintervall $\delta = t$ besteht, wozu Wundt ausdrücklich bemerkt, dass nach Massgabe, als die Zwischenzeit δ grösser wird, die Grösse des Indifferenzpunctes erst zu-, dann rasch wieder abnehme. Also hängt sie jedenfalls überhaupt von der Grösse des δ mit ab, und wird, wenn sie bei $\delta = t$ gleich 0,74 ist, nicht auch bei $\delta = 0$ dieselbe Grösse haben. Die Versuche des Verf. aber, um die sich's hier handelt, gehören zu den Versuchen zweiter Gruppe, wo $\delta = 0$ ist. Wie kann also der Verf. einen für Versuche mit $\delta = t$ gefundenen Werth des Indifferenzpunctes ohne

Weiteres auf Versuche, wo $\delta = 0$ ist, übertragen? Gesetzt aber, wofür doch gar keine Bürgschaft vorliegt, der Indifferenzpunct ändre sich von einer Zeit, einer Versuchsreihe zur andern auch nur wenig, so ändert sich das vier- und fünffache Multiplum davon um das vier- und fünffache, ändert sich die danach zu fordernde Minimalzeit um eben so viel, und kommt hiemit Alles, worauf und wonach man rechnen möchte, ausser Geschick. Also ist die Sicherstellung des Indifferenzpunctes, und die Frage, wie weit eine solche überhaupt zu erreichen ist, keine für die Aufgabe des Verf. so leicht zu nehmende Sache, als sie von ihm genommen worden ist.

Aber stellen wir dies wieder dahin und sehen zu, wie der Verfasser von den, nun einmal wie oben angenommenen, Indifferenzpuncten und danach bestimmten Multiplis seine Aufgabe weiter verfolgt. Kürze halber heisse die Reihe der 5 Multipla des Indifferenzpunctes jedes Beobachters seine *mlt*-Reihe, die damit zusammenhängende Versuchsreihe desselben seine *t*-Reihe; heisse ferner Multiplum-Hypothese die Hypothese des Verfassers — denn vor der Prüfung ist es doch nur Hypothese —, dass die einfachen Multipla des Indifferenzpunctes, wie solche in der *mlt*-Reihe enthalten sind, in der *t*-Reihe desselben Beobachters als Minimalzeiten auftreten und dadurch den periodischen Charakter der Reihe begründen; so wird es zur Prüfung darauf ankommen, einmal, ob wirklich die Multipla der *mlt*-Reihe sich als Minimalzeiten in der *t*-Reihe wiederfinden, zweitens ob die Minimalzeiten, die sich darin finden, mit Multiplen der *mlt*-Reihe stimmen.

Nun hat der Verfasser von den obigen 5 *t*-Werthen der *mlt*-Reihe des Beobachters H 4 in seine normale *t*-Reihe aufgenommen, von Tr blos 2, von T genau keinen, und man fragt sich zunächst, warum nicht überall vollständig alle, mit je einem in die Mitte dazwischen fallenden *t*, da dies die günstigste Anordnung für die Minimalzeiten sein möchte, sich direct als solche zu bewähren, und die ungünstigste für die Zufälligkeiten, die Minimal-*t*'s zu verstecken und zu verschieben. Wohl desshalb, weil alle drei Beobachter gleichzeitig an denselben Versuchen Theil nahmen, ihr Indifferenzpunct aber verschieden war, wonach nicht dieselben *t*'s als Multipla für alle zugleich auftreten konnten. Nun wäre es freilich erwünscht gewesen, die Beobachter danach zu sondern, was aber fast die dreifache Zeit gekostet hätte, die vielleicht nicht zu Gebote stand. Auch kann es

ja sein, dass der Verfasser erst bei Bearbeitung der schon vollendeten Versuche auf die Multiplum-Hypothese kam.

Auch dies dahingestellt, so will es aber nicht stimmen, um nur das Beispiel der H-Reihe specieller in dieser Hinsicht in's Auge zu fassen, dass die *t*-Reihe H bloss überhaupt 2 Minimal-*t*'s, nämlich 2,25 und 4,00, oder, unter Zuziehung des eigentlich nicht geltenden 1,5 (s. S. 68) drei finden lässt, während die *mlt*-Reihe unter dieser Zuziehung 4 Multipla, nämlich 1,5; 2,25; 3,0; 4,5 zur *t*-Reihe geliefert hat; ebensowenig, dass die *t*-Werthe 3,0 und 4,5, welche die *t*-Reihe mit der *mlt*-Reihe theilt, doch nicht als Minimal-*t*'s in der *t*-Reihe auftreten, da ihnen keine Minimal-$\varDelta$'s darin zugehören, wogegen umgekehrt $t = 4,0$ als Minimal-*t* darin auftritt, ohne unter den Werthen der *mlt*-Reihe vorzukommen; was Alles zur Multiplum-Hypothese nicht stimmt.

Soll nun doch Alles dazu stimmen, so kann es nur so geschehen, dass man die nicht stimmenden *t* oder $\varDelta$ der *t*-Reihe durch demgemässe Correctionen stimmend macht. In der That aber braucht man nur das $t = 4,0$ der *t*-Reihe in 3,75 zu verwandeln, so ist der Multiplum-Hypothese genügt; denn 3,75 findet sich unter den Werthen der *mlt*-Reihe. Andrerseits braucht man nur die nachbarlichen $\varDelta$-Werthe 0,188 und 0,180 der *t*-Reihe ihre Stelle bezüglich der nachbarlichen *t*-Werthe 4,0 und 4,5 tauschen zu lassen, so tritt das $t = 4,5$ der *mlt*-Reihe richtig als Minimal-*t* in der *t*-Reihe auf. Auch bei Tr gilt es nur, das 3,75 der *t*-Reihe in das 3,70 der *mlt*-Reihe, und bei T, die Minimal-*t*'s = 2,25 und = 3,75 in die Werthe 2,30 und 3,80 der *mlt*-Reihe zu ändern, so hat man, was man braucht.

Nun geht der Verfasser zwar nicht selbst ausdrücklich auf solche Correctionen ein, aber die Zuflucht dazu versteht sich von selbst, wenn überhaupt die Multipla der *mlt*-Reihen sich als Minimal-*t*'s in den *t*-Reihen wiederfinden sollen. Und es muss ja zugegeben werden, da die Reihen der *t* durch nicht unbeträchtliche Differenzen vorschreiten, und die voraussichtlich günstigste Einrichtung der Versuche, wovon die Rede war, nicht getroffen ist, dass die wirklichen Minimalzeiten nicht überall auf *t*-Werthe treffen können, wie sie sich gerade in der *t*-Tafel finden, sondern ihren Platz dazwischen haben können, und dass auch durch die, vom Verfasser zwar nicht berücksichtigten, Zufälligkeiten, welche die $\varDelta$ afficiren, die eigentlichen

Minimalzeiten verrückt werden können, so dass es wirklich einer Correction der direct gefundenen Werthe bedürfen kann, um sie mit den richtigen einstimmig zu machen, wüsste man nur vorweg, welches die richtigen Werthe sind; aber misslich wird das Verfahren, wenn eine Voraussetzung über die richtigen Werthe erst mit Hülfe von Correctionen, die in Richtung darauf gemacht sind, bewiesen werden soll, und als *fehlgeschlagen* muss der Beweis gelten, wenn sich findet, dass so kleine Correctionen, als in den oben besonders ausgesuchten Fällen hinreichten, nichts weniger als allgemein hinreichen, die *mlt*-Reihe und *t*-Reihe mit einander stimmend zu machen.

In der That aber, nehmen wir in der *mlt*-Reihe von H den Werth 2,30, von Tr 2,20; 2,30; von T 3,10; 4,50; gehen mit diesen Werthen in die *t*-Reihen derselben Beobachter ein, und sehen zu, wiefern sie mit Minimalzeiten derselben stimmen. Nicht nur stimmen sie nicht direct mit solchen, sondern weichen so weit von den darin vorfindlichen Minimalzeiten ab, dass von einer erträglichen Correction, um sie mit solchen zusammentreffen zu machen, gar nicht die Rede sein kann.

Nun, der Verfasser gesteht ja selbst, dass er mit den normalen *t*-Reihen der drei Beobachter nicht ausreicht, indem er eine Ergänzung in den anomalen Reihen derselben sucht. Stelle ich nun den Einwand gegen die Zulässigkeit dieser Zuziehung abermals dahin, der eigentlich gar nicht dahinzustellen ist, so fragt sich aber, wie ist die Weise der Zuziehung seitens des Verfassers zu verstehen?

Zunächst konnte man es rationell finden, da die Werthe $\Delta_c <$ und $\Delta_c >$ einer entgegengesetzten Contrastwirkung unterliegen, die Mittel zwischen beiden, zu demselben *t* gehörigen, Werthen zur Construction einer anomalen Curve zu gebrauchen, zu den Minimis dieser mittlern Δ's die zugehörigen *t*'s als Minimalzeiten zu nehmen und unter die der normalen Reihen ergänzend einzuschalten. Aber näher zugesehen sagen ja die Angaben des Verfassers gar nichts von einer Mittelziehung zwischen $<$ und $>$, sondern sprechen nur von Mitteln »aus den einander am nächsten liegenden Werthen der Contrastreihen« überhaupt.

Nun habe ich noch verschiedene Vorstellungsweisen versucht, um, wie man sich ausdrückt, dahinter zu kommen, einmal, was der

Verfasser mit den betreffenden Mitteln eigentlich gemeint hat, zweitens, wie sich die Rücksicht bei der Mittelziehung, wovon S. 70 die Rede war, überhaupt nehmen liess, da zugestandenermassen die Grösse des Contrasteinflusses, worauf Rücksicht zu nehmen, numerisch nicht bestimmbar war; doch sollten mit dieser Rücksicht numerisch bestimmte Minimalzeiten als Multipla eines numerisch bestimmten Indifferenzpunctes gefunden werden.

Aller Unbestimmtheit in diesen Beziehungen aber hätte der Verfasser dadurch entgehen können und entgehen sollen, dass er statt sich in nicht scharfen allgemeinen Ausdrücken zu halten, die Weise, wie er die anomalen Reihen zur Ergänzung der normalen für seinen Zweck benutzt hat, an einigen Beispielen bestimmt erläutert hätte.

Nun, nachträglich ist es wirklich noch von ihm geschehen, doch nur in einer, auf private Anregung erfolgten privaten Mittheilung an Prof. Wundt, die mir von diesem zugestellt worden ist, wonach ich freilich bedauern muss, mich mit dem Versuche, den Angaben des Verfassers in seiner Abhandlung selbst ein Verständniss abzugewinnen, so viel geplagt zu haben, da ich schliesslich sehe, dass es überhaupt nicht daraus zu gewinnen war. Ich lasse die Mittheilung des Verfassers nun wörtlich folgen:

»Da der Satz in meiner Dissertation p. 22 [Abh. p. 56]: »»Dabei sind die Werthe von Δ für diejenigen Hauptzeiten, für welche keine contrastfreien Versuche vorliegen, in der Weise gewonnen, dass aus den einander am nächsten liegenden Werthen der Contrastversuche das Mittel gezogen wurde mit Rücksicht auf diejenigen Factoren, welche p. 21 [Abh. p. 55] die Grösse des Contrasteinflusses bestimmen««, leicht zu der Vermuthung Anlass geben könnte, ich sei bei dieser Bestimmung willkürlich verfahren, will ich an 2 Beispielen zeigen, wie ich diese Bestimmung vorgenommen habe«.

»I. Zu Tr $t = 2{,}25$ ist Δ ohne Contrast unbekannt. Nun zeigen aber meine Protokolle folgende Contrastwerthe (die in die Tabelle XVI nicht aufgenommen worden sind, da eine Vergleichung derselben mit den contrastfreien Werthen mangels ersterer nicht möglich ist)

t	t_c	Δ_c	n
2,25	2,00	— 0,063	2
	4,00	+ 0,038	2

»Mit Rücksicht auf das Resultat p. 21 oben [Abh. p. 55] folgt

daraus, dass der contrastfreie Werth von Δ für $t = 2{,}25$ jedenfalls (absolut genommen) kleiner ist als 0,063, dass also die Curve Δ für Tr zwischen $t = 2{,}00$ und 2,50 einen Bogen nach oben machen muss, da Δ [in der contrastfreien Reihe] für $t = 2{,}00$ — 0,068 und für $t = 2{,}50$ — 0,079 war. Welchen Werth das Δ für $t = 2{,}25$ in Wirklichkeit haben wird, habe ich nicht ermitteln wollen, schon deshalb, weil ich selbst bemerkt habe (p. 21), dass sich der Contrasteinfluss numerisch nicht bestimmen lässt.

»II. Für T $t = 3{,}25$ fehlt ebenfalls ein direct bestimmter contrastfreier Werth Δ. Es ergab sich aber:

t	t_c	Δ_c	n
3,25	2,00	— 0,240	5
	4,00	— 0,100	5

»Hieraus folgt: Δ contrastfrei grösser als 0,100, ausserdem ergiebt sich aber, dass dieser Werth dem $\Delta = 0{,}100$ näher liegen muss, als dem Werthe 0,240, weil der Unterschied der Hauptzeit 3,25 gegen die Contrastzeit [$t_c = 4{,}00$] im zweiten Falle geringer ist, als im ersten. Demnach muss die Curve für T bei $t = 3{,}25$ durch einen tiefer liegenden Punct gehen, als bei $t = 3$. Dies ist auch in meiner Originalzeichnung der Fall. Im Druck trifft dies nicht zu, weil entweder bei der Uebertragung oder bei der Verkleinerung eine Verschiebung dieses Bogens stattgefunden hat.

»Die Fälle, in denen ich nach den vorstehenden Beispielen den Werth von Δ nicht sowohl bestimmt, als vielmehr in gewisse Grenzen eingeschlossen habe, sind übrigens nicht sehr zahlreich und beschränken sich bei Tr und T auf dieselben, welche ungerade Vielfache von 0'',25 sind, so weit für dieselben Δ nicht direct bestimmt ist.«

Was ich nun meinerseits hiezu nachträglich zu bemerken finde, ist dieses:

1) Zur Prüfung der Hypothese des Verf. liegen in seiner Abhandlung die normalen und anomalen t-Reihen der drei Beobachter vor; daran konnte man sich halten; nun ist es doch eine eigene Zumuthung, dass man zu dieser Prüfung auch noch Angaben zuziehen soll, die nur in den Versuchsprotokollen des Verf. stehen, ohne dass in der Abhandlung selbst auch nur eine Andeutung von diesem Rückhalt gegeben ist, und dass man die Benutzungsweise der ano-

malen Reihen verstehen soll, da diese gerade in Verwerthung der, in den Protokollen stecken gebliebenen, Werthe ruht.

2) Nach wie vor bleibt unerfindlich, wie nach dem Gange der t und Δ in den Contrastreihen Interpolationen in den contrastfreien Reihen sollen vorgenommen werden können, welche mit der Hypothese hinreichend stimmen, ohne solche schon vorauszusetzen; auch bleiben die verzeichneten Widersprüche mit der Multiplum-Hypothese dadurch ungehoben.

3) Hielt es aber der Verf. doch einmal für zulässig, normale und anomale Reihen einander ergänzen zu lassen, so hätte es nicht blos bei den t-Werthen geschehen sollen, die in einer von beiden Reihen fehlten, sondern die Gesammtheit ihrer t's war je nach Gleichheit und Ungleichheit zu superponiren und zwischen einander zu schieben, um an den Minimal-t's und Δ's der so zusammengesetzten Reihe die Hypothese des Verf. zu prüfen.

Bei all' dem habe ich noch von einem ganz fundamentalen Einwande gegen die Hypothese des Verf. abstrahirt, weil er erst in einem späteren Abschnitte (XI) zur Geltung gebracht werden kann. Die Δ des Verf. sind rohe, noch mit einem constanten Fehler behaftete, Werthe, mit dessen Elimination sich nicht nur die Grösse, sondern auch meist das Vorzeichen der Δ ändert. Nun kann man aus den rohen Δ die reinen (unsere ϑ) mittelst einer geeigneten Correction gewinnen, wonach sie aber so klein werden, dass gegenüber den zufälligen Fehlern, welche durch die Correction unvermindert bleiben, nicht daran zu denken ist, irgendwelche gesetzliche Verhältnisse derselben überhaupt empirisch constatiren zu können, und von Multiplis des Indifferenzpunctes nicht mehr die Rede sein kann, weil er für die corrigirten Δ's sich auf Null reducirt. Die Nothwendigkeit der betreffenden Correction aber dürfte sich aus den Erörterungen des X. Abschnittes so entschieden herausstellen, dass hiedurch allein schon eine, auf die Verhältnisse der rohen Δ gegründete, Hypothese unhaltbar wird.

Nach Allem dürfte man zugestehen, dass, wenn die mit der Multiplum-Hypothese solidarische Periodicitätshypothese des Verf. im Gebiete des Zeitsinnes mit voriger Ablehnung derselben noch nicht für erledigt gelten sollte, sie von Grund aus einer neuen, haltbareren und klareren Begründung bedürfen wird, als sie bis jetzt gefunden hat.

X. Ueber den Correctionsfactor p; Correction der rohen Verhältnissschwellen v_o, v_u und rohen relativen Unterschiedsschwellen w_o, w_u durch denselben.

Im VIII. Abschnitt wurde die Ansicht aufgestellt, dass die obere und untere Verhältnissschwelle, wie sie durch den Versuch erhalten werden, noch mit einem constanten Fehler behaftet sind, der durch Mittelziehung eliminirt werden muss, soll dem Weber'schen Gesetze genügt werden. Gehen wir dieser Ansicht jetzt theils mehr auf den Grund, theils etwas weiter nach.

Zunächst scheint es freilich, dass durch die, vom Verf. befolgte, Wundt'sche Methode der Minimaländerungen alle constanten Fehler, welche von einseitiger Versuchsanordnung abhängen, eliminirt sein müssen, und jedenfalls gehören hieher die Fehler, die der Verf. p. 47 damit bezeichnet: »dass der durch Vergrösserung der Differenz $t' - t$ von Null an gewonnene Unterschiedsschwellenwerth in den weitaus meisten Fällen grösser als der durch Verkleinerung von $t' - t$ erhaltene war«. Wenn ich nämlich mit dieser Angabe auf die authentische Erklärung über das Verfahren seitens Wundt (S. 8) zurückgehe, glaube ich sie so verstehen zu können, dass $t_o' - t$ allermeist grösser als $t_o'' - t$, und $t - t_u'$ allermeist kleiner als $t - t_u''$ gefunden wurde. Wird nun aber, wie es wirklich geschieht, t_o als Mittel von t_o' und t_o'', und t_u als Mittel von t_u' und t_u'' genommen, so darf man annehmen, dass die von den einseitigen Richtungen des Verfahrens abhängigen constanten Fehler durch diese Mittelziehung möglichst compensirt sind, gleichviel, ob man die Weise, wie sich der Verf. (p. 47) die Entstehung dieser Fehler denkt, acceptiren oder noch zweifelhaft finden will. Aber es lässt sich noch an andere Fehler denken, die nicht zugleich damit compensirt sind; und so habe ich schon in »Elem.« II. 140. 151. 347 auf einen, von mir mit s bezeichneten, constanten Fehler aufmerksam gemacht, der sich bei Tastversuchen nach der Methode der mittleren Fehler geltend macht, und seinen wahrscheinlichen Ursprung darin hat, dass stets die Fehlgrösse, aber nicht die Normalgrösse der Abänderung bis zur scheinbaren Gleichheit mit der andern unterzogen wird, also letztere immer einseitig als constanter Vergleichsmassstab für die erste auf-

tritt. Eben so aber tritt bei den Versuchen, mit denen wir hier zu thun haben, t immer einseitig als constanter Vergleichsmassstab für t_o wie t_u auf, und so kann es sehr wohl sein, dass hiebei aus entsprechendem Grunde ein constanter Fehler zur Geltung kommt, vermöge dessen t_o und t_u in gleicher Richtung verändert sind. Ist aber dies der Fall, so kann

$$v_o = \frac{t_o}{t} \text{ nicht gleich } v = \frac{t_u}{t}$$

sein, weil t_o im Zähler, t_u im Nenner steht.

Vielleicht aber liegt es noch näher, statt an vorigen Ursprung an folgenden zu denken, ohne dass übrigens damit der vorige ausgeschlossen ist, indem sehr wohl beide coincidiren können, ohne sich deshalb zu identificiren. Bei den Versuchen über Unterschieds-Empfindlichkeit spielen überhaupt zwei constante Fehler eine grosse Rolle, die ich kurz als Raumfehler und Zeitfehler bezeichne, und die es in bekannter Weise durch Entgegensetzung zu compensiren und dadurch zu eliminiren gilt, sollen nicht die auf Unterschiedsempfindlichkeit beziehbaren Resultate dadurch alterirt werden, und die Bewährbarkeit des Weber'schen Gesetzes darunter leiden. In Bezug auf den Raumsinn habe ich beide Fehler einer besondern Erörterung in m. »Elem.« II. 149 ff. unterzogen. Fasse ich nun aber die Versuche über den Zeitsinn nach der Methode der Minimaländerungen ins Auge, wie sie nach der authentischen Erklärung Wundt's über diese Methode (S. 8) auszuführen sind, und sowohl vom Verf. als früher von Kollert wirklich ausgeführt sind, so vermisse ich jede Andeutung, dass der Zeitfehler dabei seine Berücksichtigung gefunden hat; wie denn Wundt selbst einer solchen ausdrücklich nur bezüglich der Schallversuche (»Philos. Stud.« I. 560) gedenkt. Der Zeitfehler ist aber bei den Zeitversuchen darin zu suchen, dass die Hauptgrösse stets vor der Vergleichsgrösse, nicht aber eben so oft und vergleichbar damit auch umgekehrt angewandt wird. Man fragt vielleicht: ist aber ein anderes Verfahren im Gebiete des Zeitsinnes überhaupt denkbar? Sehr wohl, wenn man es nur in entsprechender Weise als beim Raumsinn (nach »Elem.« II. 149) ausgeführt denkt. D. i., indess man nach der bisherigen Weise immer zuerst die constante Hauptgrösse angiebt, dann die Vergleichszeit abändert, und dies so lange wiederholt, bis der Absicht des Vergleichs dadurch

entsprochen ist, kann man umgekehrt die veränderliche Vergleichsgrösse immer zuerst mit irgendwelchem Werth angeben, dann die feste Hauptgrösse, und, nachdem man sich überzeugt hat, ob die Vergleichsgrösse hiegegen zu gross oder klein oder dem Zweck des Vergleiches entsprechend erscheint, die Vergleichsgrösse stufenweise weiter abändern, und nach jeder neuen Stufe durch Angabe der Hauptgrösse den Vergleich damit ziehen. Dass dieses Verfahren bei Versuchen über den Raumsinn nicht nur denkbar, sondern auch praktisch ausführbar ist, beweist sich damit, dass ich wirklich die Elimination des Zeitfehlers danach bewirkt habe. Ob nicht bei Versuchen über den Zeitsinn nach der Methode der Minimaländerungen praktische Schwierigkeiten entgegentreten, vermag ich aus Mangel an Erfahrungen in dieser Beziehung nicht zu sagen; wäre es aber der Fall, und müsste man sich beim bisherigen Verfahren mit einseitiger Zeitlage begnügen, so würde man auch auf einen davon abhängigen uncompensirt bleibenden Zeitfehler zu rechnen haben; jedenfalls hat man sich, so viel ich sehe, bisher dabei begnügt, und hat also auch auf einen solchen zu rechnen*).

Nach Vorigem fehlt es also von vornherein nicht an Gründen, das Dasein eines constanten Fehlers bei den, aus den Versuchen des Verf. hervorgegangenen, Werthen zu vermuthen; und der Umstand, dass wir durch eine Elimination desselben, welche seine Thatsache voraussetzt, eben so zum Weber'schen Gesetze gelangen, als es in andern Gebieten möglich ist, tritt nur bestätigend hinzu. In demselben Sinne aber kann folgender Umstand geltend gemacht werden.

Dass die obere Unterschiedsschwelle von der unteren etwas verschieden sein muss, lässt sich nach S. 10 f. daraus folgern, dass die obere zwischen im Ganzen grösseren Werthen t_o, t, als die untere, zwischen t und t_u, stattfindet; die Unterschiedsempfindlichkeit nimmt

*) In der beispielsweisen Schilderung der Methode der Minimaländerungen (p. 7 f.) lässt der Verf. den Weg nach unten, wodurch t_u gewonnen wird, dem Wege nach oben, wodurch t_o gewonnen wird, vorangehen. Sollte diese Folge bei allen Versuchen eingehalten worden sein, worüber aber, wie über so Manches, worauf etwas ankommen könnte, die Angaben des Verf. in Zweifel lassen, so könnte möglicherweise auch hievon ein constanter Fehler abhängen. Man kann jedenfalls nicht vorsichtig genug gegen constante Fehler sein.

aber mit der Höhe der Werthe, auf die sie bezogen ist, ab, und sofern sie der Unterschiedsschwelle reciprok ist, muss die obere Unterschiedsschwelle grösser als die untere, mithin $\varDelta = \frac{d_o - d_u}{2}$ positiv sein. Doch ist nur ein kleiner Unterschied zwischen beiden zu erwarten, da beide Unterschiedsschwellen sich um denselben Werth t drehen. Factisch aber zeigen die Unterschiedsschwellen d_o, d_u, wie sie aus den Versuchen des Verf. hervorgehen, das gerade entgegengesetzte Verhalten, wie man sich aus Abschnitt V überzeugen kann, wo für alle Reihen, mit denen wir hier zu thun haben, die Σd_o und Σd_u für dieselben t-Summen gegenübergestellt sind. Nämlich: ausser der anomalen Kollert'schen Reihe No. 5. a) mit den kleinen t's von 0,4 bis 1,0, wo Σd_o ein wenig grösser als Σd_u ist, ist in allen Reihen Σd_o kleiner als Σd_u, demgemäss $\Sigma \varDelta$ negativ, und in allen Reihen No. 1, 2, 3, welche von $t = 1,5$ bis 8,0 gehen, überwiegt Σd_u in enormem Verhältnisse über Σd_o.

Wenn sich nun im XI. Abschnitt zeigen lassen wird, dass diese abnormen Verhältnisse der Unterschiedsschwellen d_o, d_u durch Voraussetzung und Elimination desselben Fehlers schwinden, wodurch die Verhältnissschwellen v_o, v_u mit dem Weber'schen Gesetze stimmend gemacht werden, so wird der Schluss auf das Dasein dieses Fehlers um so bindender dadurch werden.

Zu vorigen, immer nur erst indirecten, Gründen seiner Annahme aber gesellt sich endlich noch folgende, in der Abhandlung des Verf. bemerkte, nur nicht zu Folgerungen in betreffender Hinsicht benutzte, Thatsache, welche direct für das Dasein und zugleich für dieselbe Richtung desselben beweist, zu der wir durch die vorigen Betrachtungen geführt werden. Der Verf. sagt bei Besprechung der Versuche der ersten Gruppe, wo zwischen Hauptzeit und Vergleichszeit ein der Hauptzeit gleiches δ eingeschoben wird: »Verschiedene Beobachter, besonders aber Tr, beklagten sich oft darüber, dass ihnen die der Hauptzeit gleich sein sollende Zwischenzeit δ grösser als t erscheine, während beide in Wirklichkeit völlig gleich waren.« Der Verf. erklärt diese Erscheinung unstreitig sachlich richtig daraus, »dass die Hauptzeit in der Reproduction verkürzt ist, die jener gleiche Zeit δ also grösser erscheinen muss«. Das ist doch aber eben nichts Anderes, als die Erklärung durch einen constanten

Fehler, dem eine, mit der Hauptzeit verglichene, ihr folgende, Zeit unterliegt. In der That treffen die beiden möglichen Gründe des Fehlers hier zusammen, sofern die Hauptzeit als Vergleichsmassstab für die Zwischenzeit dient und diese der Hauptzeit folgt. Wenn aber die, unwillkürlich mit der Hauptzeit verglichene, Zwischenzeit einem von diesen Umständen abhängigen Fehler unterliegt, warum sollte ihm die, absichtlich mit der Hauptzeit verglichene, Vergleichszeit weniger unterliegen? Es werden also sowohl t_o als t_u als Vergleichszeiten durch den betreffenden Fehler verkürzt sein, und in umgekehrtem Verhältnisse vergrössert, wie ich sage corrigirt, werden müssen, um vom constanten Fehler befreit zu werden.

Der vorigen Betrachtung steht nicht entgegen, dass nach den, an die Thatsache der Ueberschätzung des δ angeknüpften, Bemerkungen des Verf. (p. 49) diese Thatsache bei sehr kleinen t's, namentlich unter 0,4, sich nicht geltend macht, indem hiemit nur bewiesen wird, was sich aus der folgenden Untersuchung um so bestimmter herausstellen wird, dass der constante Fehler, um den es sich handelt, von der Grösse des t mit abhängig ist, und als Function desselben betrachtet werden muss; was nicht unerwartet sein kann, da das Entsprechende von constanten Fehlern auch in andern Gebieten gilt*). Da nun, wie folgends zu zeigen, die Abhängigkeit der Art ist, dass er mit der Grösse des t wächst, so versteht sich sehr wohl, dass er bei kleinem t wenig merklich sein kann.

Unterscheiden wir nun die Werthe t_o, t_u, wie sie unmittelbar aus den Versuchen hervorgehen und noch mit dem betreffenden einfachen oder zusammengesetzten Fehler behaftet zu denken sind, als r o h e Werthe von den, durch Elimination des betreffenden Fehlers daraus hervorgehenden, Werthen als r e i n e n Werthen, und bezeichnen letztere mit $\mathfrak{t}_o$, $\mathfrak{t}_u$, so können wir, um zugleich zum W e b e r'schen Gesetze und zur Befriedigung der an die Unterschiedsschwellen zu stellenden Forderung zu gelangen, zunächst folgende Fundamentalgleichungen aufstellen:

$$t_o = q\mathfrak{t}_o\ ; \qquad t_u = q\mathfrak{t}_u\ ,$$

*) Der Ausdruck c o n s t a n t e r Fehler ist nämlich überhaupt nur insofern treffend, als er für jedes t insbesondere, bei constant gehaltenen Versuchsumständen, dieselbe Grösse behält, ohne deshalb nothwendig für verschiedene t's dieselbe Grösse zu behalten.

indem wir unter q den constanten Verhältnissfehler verstehen, durch welchen die reinen Werthe $\mathfrak{t}_o$, $\mathfrak{t}_u$ in die rohen t_o, t_u übergehen. Hieraus fliessen natürlich die umgekehrten Gleichungen:

$$\mathfrak{t}_o = \frac{t_o}{q}\,; \qquad \mathfrak{t}_u = \frac{t_u}{q}\,,$$

wonach wir die rohen Werthe t_o, t_u in reine überführen, oder, wie ich kurz sage, corrigiren, indem wir die ersten mit q dividiren, oder, was dasselbe sagt, mit $\frac{1}{q}$ multipliciren. Wegen des häufigen Gebrauchs nun, den wir vom Factor $\frac{1}{q}$ im vorigen Sinne zu machen haben, ersetzen wir ihn durch den einfachen Buchstaben p und nennen diesen den Correctionsfactor. Von seiner Bestimmungsweise wird alsbald die Rede sein. Natürlich ist mit p zugleich q und umgekehrt gegeben, da beides die reciproken Werthe von einander sind*).

Die Werthe t_o, t_u, t sind die Ausgangswerthe, welche von der Beobachtung geliefert werden, und alle davon abhängigen Werthe, als wie d_o, d_u, $\varDelta$, v_o, v_u, w_o, w_u noch als rohe zu betrachten, so lange sie nicht ihrerseits die, aus der Correction von t_o, t_u fliessende, Correction erfahren haben, wonach wir sie als reine mit den, den vorigen entsprechenden, deutschen Buchstaben bezeichnen. Zunächst wenden wir uns mit dieser Correction zu den Verhältnissschwellen, hiemit zur Bestimmung des Correctionsfactors selbst, hienach zur Correction der relativen Unterschiedsschwellen, um auf die der einfachen Unterschiedsschwellen und des mittleren Schätzungsfehlers erst im folgenden Abschnitte einzugehen.

Als obere und untere rohe Verhältnissschwelle haben wir:

$$v_o = \frac{t_o}{t}\,; \qquad v_u = \frac{t}{t_u}\,.$$

Da nun die Correction nicht auf die als bestimmt gegeben anzusehenden Hauptwerthe t zu beziehen ist, sondern nur auf die durch den Verhältnissfehler als alterirt anzusehenden t_o, t_u, so erhalten wir als reine obere und untere Verhältnissschwelle $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$:

*) Das vom Verf. p. 63 gebrauchte p entspricht unserem q, unser p aber seinem $\frac{1}{p}$, ein Unterschied der Bezeichnungen, auf den natürlich sachlich nichts ankommt.

$$\mathfrak{v}_o = \frac{p t_o}{t} = p v_o \; ; \qquad \mathfrak{v}_u = \frac{t}{p t_u} = \frac{v_u}{p} \,,$$

woraus, noch ohne dass wir den Werth p kennen, der Satz fliesst, dass wir die obere Verhältnissschwelle mit demselben Correctionsfactor zu multipliciren haben, mit welchem wir die untere zu dividiren haben, um beide in reine Werthe überzuführen.

Die mittlere Verhältnissschwelle anlangend, so gelangen wir zur reinen $\mathfrak{v}$, indem wir das Verhältnissmittel aus den reinen $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$ ziehen, d. i.

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\mathfrak{v}_o \mathfrak{v}_u} = \sqrt{p v_o \cdot \frac{v_u}{p}} = \sqrt{v_o v_u} = v \,,$$

d. i. die mittlere reine Verhältnissschwelle $\mathfrak{v}$ und die mittlere rohe v stimmen überein, ohne dass diess von der oberen und unteren reinen und rohen für sich gilt. Diess ist ein fundamentaler Punct.

Sofern nun durch die Correction mittelst p die, dem Weberschen Gesetze widerstrebende, Ungleichheit der obern und untern Verhältnissschwelle gehoben wird, können wir hiervon Gebrauch zur Bestimmung von p selbst machen, indem wir setzen:

$$p v_o = \frac{v_u}{p} \text{ oder gleichgeltend } p \frac{t_o}{t} = \frac{t}{p t_u} \,,$$

mithin

$$p^2 = \frac{v_u}{v_o} = \frac{t^2}{t_o t_u}$$

$$p = \sqrt{\frac{v_u}{v_o}} = \frac{t}{\sqrt{t_o t_u}} \,.$$

Diess der Werth von p, mit dem wir im Folgenden zu operiren haben.

Natürlich, wenn durch Correction mit diesem Werthe p die obere und untere Verhältnissschwelle einander gleich werden, werden sie damit auch der mittleren gleich und hat man also:

$$\mathfrak{v}_o = \mathfrak{v}_u = \mathfrak{v} = v \,.$$

Führen wir nun mit vorigem Werthe von p die Correction der relativen Verhältnissschwellen w_o, w_u, w aus, so haben wir roh (nach S. 14)

$$w_o = v_o - 1 \; ; \qquad w_u = v_u - 1 \; ; \qquad w = \sqrt{(v_o - 1)(v_u - 1)} \,.$$

Die Correction aber werden wir dadurch bewirken, dass wir in diesen Ausdrücken v_o mit p multipliciren und v_u mit p dividiren, p aber $= \sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ setzen. Hiedurch geht v_o über in $v_o \sqrt{\frac{v_u}{v_o}} = \sqrt{v_o v_u}$

und v_u in $v_u\sqrt{\frac{v_o}{v_u}}$, was nicht minder $= \sqrt{v_o v_u}$ ist. Mittelst dieser Correctionen nimmt $(v_o - 1)(v_u - 1)$ den Werth $(\sqrt{v_o v_u} - 1)^2$ an, und die Wurzel hievon, d. i. die reine mittlere relative Unterschiedsschwelle $\mathfrak{w}$, erhält den Werth:

$$\mathfrak{w} = \sqrt{v_o v_u} - 1 = v - 1 = \mathfrak{v} - 1 \,,$$

sofern v und $\mathfrak{v}$ gleichwerthig sind.

Also gilt für die reinen relativen Unterschiedsschwellen, dass man die mittle eben so als mittlere Verhältnissschwelle minus 1 bestimmen kann, wie sich die einfachen relativen Unterschiedsschwellen als einfache Verhältnissschwellen minus 1 bestimmen lassen, während dasselbe nicht bezüglich der rohen relativen Unterschiedsschwellen gilt; ein Satz, auf den schon früher (S. 14) verwiesen worden ist.

Um sich über die Leistung des p klar zu bleiben, hat man im Auge zu behalten, dass mit der, durch seine Anwendung zu erzielenden, Gleichheit der oberen, unteren und mittleren Verhältnissschwelle $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}$ für jedes t zwar einer Bedingung des Weber'schen Gesetzes genügt ist, hierin aber noch gar nicht von selbst eingeschlossen ist, dass damit auch der andern Bedingung des Weber'schen Gesetzes genügt sei, dass nämlich die, für jedes t insbesondere gleichen $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}$ auch constant dieselben für alle verschiedenen t bleiben; vielmehr beweist die untere Abweichung vom Weber'schen Gesetze, welche im VIII. Abschnitte besprochen ist, das Gegentheil. Wir können hier die Correction durch p so gut anwenden, als in den Grenzen merklicher Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes, und damit $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}$ gleich machen, ohne damit zu erreichen, dass diese corrigirten Verhältnissschwellen für die verschiedenen t merklich constant werden. Die Correction der oberen und unteren Verhältnissschwelle durch p gehört also zwar wesentlich zur Erfüllung des Weber'schen Gesetzes, reicht aber noch nicht allgemein und schlechthin dazu hin. Nur lehrt die Erfahrung selbst, dass über gewisse Grenzen der Kleinheit des t, die der sog. unteren Abweichung vom Gesetze hinaus, p solche Verhältnisse zu t annimmt, dass die dadurch corrigirten Verhältnissschwellen auch der zweiten Bedingung des Weber'schen Gesetzes, d. i. der Constanz derselben bei abgeändertem t, merklich genügen.

Von der andern Seite ist damit, dass durch Anwendung des

Correctionsfactors p beiden Bedingungen des Weber'schen Gesetzes zugleich nur erst über den Grenzen der sog. untern Abweichung genügt wird, nicht gesagt, dass seine Anwendung auch nur oberhalb derselben statt zu finden habe. Denn es ist kein Grund, dass der in der Einseitigkeit der Versuchsumstände begründete constante Fehler q bei kleinem t weniger stattfinden sollte, als bei grossem, wenn die Einseitigkeit beidesfalls dieselbe ist, dem Fehler q aber entspricht die Correction durch $\frac{1}{q} = p$. Insofern aber die Correction durch p doch nur oberhalb gewisser Grenzen der t zu einer Uebereinstimmung mit dem Weber'schen Gesetze führt, werden auch die mit diesem Gesetze zusammenhängenden Verhältnisse nur oberhalb derselben Grenzen ihre Gültigkeit erlangen.

Dass p selbst für alle t constant bleiben müsse, ist bemerktermassen von vornherein keine Nothwendigkeit; genug, dass es seine Aufgabe für jedes t insbesondere erfüllt. Sollte p bei Aenderung von t constant bleiben, so müsste nach der obigen Gleichung für diesen Werth v_u zu v_o immer daselbe Verhältniss behalten, und $\sqrt{t_o t_u}$ dem t immer proportinonal gehen, was aber beides selbst in den Grenzen merklicher Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes nicht der Fall ist, wie man sich durch einen Rückblick auf die Tabellen des IV. Abschnittes überzeugen kann. Vielmehr lehrt die Erfahrung ganz allgemein für die Versuchsreihen innerhalb wie ausserhalb der Grenzen des Weber'schen Gesetzes, dass p langsam mit t ansteigt, und wenigstens in den Reihen, welche über die untere Abweichung hinausgehen, vorbehaltlich eines Zweifels betreffs derer, die derselben unterliegen, so, dass man den Werth p in jeder, durch eine Stufenfolge von t's vorschreitenden, Reihe zusammengesetzt ansehen kann aus einem für die aufsteigenden t constanten Hauptwerthe und einem kleinen, aber mit den t proportional aufsteigenden, positiven Zusatzwerthe, nach der Formel:

$$p = y + xt ,$$

worin y den constanten Hauptwerth, xt den mit t proportionalen Zusatzwerth bedeutet. Die gewohnten Zeichen der Unbekannten wähle ich, weil y und x als von vornherein Unbekannte aus dem Gange der p bei aufsteigendem t in jeder gegebenen Reihe abgeleitet werden müssen. Diess ist nun von mir für die Reihen No. 1, 2, 3,

4 nach deren Mitteltabellen b) unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate so geschehen, dass dadurch Werthe von y und x hervorgehen, welche eine geringere Summe der Quadrate der Abweichung zwischen beobachteten*) und berechneten p ergeben, als bei irgend anderen Werthen von y und x zu erhalten**). Mit f_y und f_x sind folgends die wahrscheinlichen Fehler respective von y und x bezeichnet, welche sich in Zusammenhange mit y und x selbst berechnen lassen.

Die zur Rechnung gebrauchten Formeln sind diese:

$$y = \frac{\Sigma t^2 \cdot \Sigma p - \Sigma t \Sigma p t}{K}$$

$$x = \frac{m \Sigma p t - \Sigma t \Sigma p}{K}$$

$$K = m \Sigma t^2 - (\Sigma t)^2 .$$

m bedeutet die Zahl (nicht Summe) der zugezogenen t's. Da sich nicht darauf rechnen liess, dass die verschiedenen Beobachter, welche bei den Versuchen betheiligt waren, im p für dasselbe t übereinstimmten, ist (nach Erwägungen des V. Abschnittes) von der Berücksichtigung ihres besondern n abstrahirt.

Die Werthe f_y, f_x sind so bestimmt:

$$f_y = Q\sqrt{\Sigma t^2}\ ; \qquad f_x = Q\sqrt{m}\ ; \qquad Q = 0{,}674449\sqrt{\frac{\Sigma\lambda^2}{(m-2)K}} .$$

$\Sigma\lambda^2$ ist die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen (sog.) beobachteten und berechneten p.

Solchergestalt fand ich für:

	y	x	f_x	f_y
No. 1. b)	1,0588	0,003823	0,00631	0,00148
No. 2. b)	1,0164	0,01098	0,00408	0,00128
No. 3. b) $<$	1,0176	0,01312	0,00698	0,00226
No. 3. b) $>$	0,9848	0,01608	0,01807	0,00586
No. 4. b)	0,8706	0,01680	0,00840	0,00942

und hiernach folgende Zusammenstellung zwischen Beobachtung und

*) Unter beobachteten p werden hier die aus den beobachteten t, t_o, t_u direct folgenden verstanden.

**) Nach strengster Anwendung der Methode wären freilich die p so zu bestimmen, dass die geringste Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen dén direct beobachteten t_o, t_u, aus welchen die p doch erst abgeleitet sind, und dem nach den p berechneten Werthe derselben erhalten würde; doch möchte die Ausführung hiervon wegen ihrer Umständlichkeit nicht durchführbar sein.

Rechnung, in der man die Reihe der t's, zu welchen die p gehören, aus dem Abschnitt IV ergänzen kann, indess die Grenzwerthe derselben eben so wie bei der früheren Zusammenstellung der $v - 1$ (S. 57) oben angegeben sind.

Zusammenstellung zwischen den beobachteten und den berechneten p.

No. 1. b) 1,8 — 8,0		No. 2. b) 1,5 — 5,0		No. 3. b) $<$ 2,0 — 4,0		No. 3. b) $>$ 2,0 — 4,0		No. 4. b) 0,4 — 1,2	
beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
1,0713	1,0657	1,0376	1,0329	1,0435	1,0438	1,0141	1,0170	0,9259	0,9350
385	665	375	384	528	504	279	250	0,9486	0,9511
694	693	419	439	559	570	259	331	0,9942	0,9833
887	697	439	493	637	630	604	411	1,0113	0,9990
755	703	619	548	711	701	379	491	1,0260	1,0316
769	729	545	603					1,0588	1,0638
807	817	753	713						
862	894								

Man sieht nun wohl, dass bei manchen Reihen, wie namentlich bei No. 1. b) und No. 3. b) $>$, starke Unregelmässigkeiten im Gange der beobachteten p vorkommen, welchen natürlich die berechneten Werthe nicht folgen können, da vielmehr durch sie die Unregelmässigkeiten ausgeglichen werden sollen; überall aber sieht man im Ganzen den Fortschritt der Reihen im angegebenen Sinne nach Beobachtung und Rechnung, und in den meisten Reihen die nahe Uebereinstimmung zwischen beobachteten und berechneten Werthen nur ausnahmsweise erheblich gestört, so dass man der Formel für jede Reihe insbesondere wohl Zutrauen schenken, die Verschiedenheit der Constanten y und x aber, die sich zwischen den verschiedenen Reihen zeigt, auf die grössere oder geringere Verschiedenheit der Umstände, unter denen sie angestellt sind, schreiben kann.

In dieser Beziehung kommt nun zuvörderst die Verschiedenheit der Beobachter bei den verschiedenen Reihen, und der Unterschied, ob normal oder anomal, ob mit oder ohne Zwischen-δ, in Betracht. In erster Beziehung darf man am meisten Aufschluss von der Reihe No. 2 erwarten, an welcher sich die drei Beobachter H, Tr, T betheiligt haben, wenn man, statt sich an die Tabelle der Mittel zu

halten, auf die Specialwerthe p für die drei Beobachter zurückgeht, welche unter VIII auf S. 52 verzeichnet sind, und dabei namentlich Acht darauf hat, ob mit dem beträchtlichen Unterschiede, den die $v - 1$ bei H von den $v - 1$ der andern beiden Beobachter zeigen, ein entsprechender Unterschied der p parallel geht.

Nun haben in der Reihe No. 2 die drei Beobachter folgende sieben t's gemein,

1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0

und erhält man als Summe der zugehörigen $v - 1$ und p folgende Werthe:

	H	Tr	T
$\Sigma(v-1)$	0,6171	0,7824	0,8395
Σp	7,3316	7,3755	7,3572

H differirt also in Betreff der $\Sigma(v - 1)$ sehr beträchtlich von Tr und T, wogegen der Unterschied zwischen den zugehörigen Σp für den ersten Anblick zu vernachlässigen scheint. Aber man darf nicht vergessen, dass von den p's der constante Hauptwerth y den Hauptbestandtheil bildet, und man zur Vergleichbarkeit mit $v - 1$ von den p eben so den, oben durchschnittlich $= 1,0164$ gefundenen Hauptwerth abziehen muss, als man 1 von $v - 1$ abzieht. Dann erhält man aber, da diese Werthe von den sieben p's siebenmal, also im Ganzen 7,08148 abzuziehen ist, folgende Σ-Werthe:

	H	Tr	T
$\Sigma(p-y) = \Sigma xt =$	0,2501	0,2940	0,2757

deren Unterschiede allerdings noch auf unausgeglichene Zufälligkeiten geschrieben werden können, ohne dass man sich aber dessen versichert halten kann; zumal die ganzen p eben so wie die nach Abzug von y erhaltenen t bei Tr und T fünfmal, bei H nur zweimal unter sieben Fällen überwiegen. Auch der Vergleich von S und W, so wie von We und E, den ich noch vorgenommen habe, führt zu keiner sicheren Entscheidung, und ich lasse also die Frage in dieser Beziehung dahingestellt. Jedenfalls führt diese Untersuchung zu dem Resultat, dass, wenn, wie wahrscheinlich, ein Unterschied der y, x imund thin p je nach den Beobachtern stattfindet, dieser nicht hin-

reicht, so beträchtliche Unterschiede zu erklären, wie sie namentlich zwischen den Reihen No. 1, No. 2 und der Reihe No. 4 vorkommen.

Was den Unterschied zwischen normal und anomal anlangt, so giebt die normale Reihe No. 2 Anlass zum Vergleich mit der anomalen No. 3. b), sofern bei beiden dieselben drei Beobachter betheiligt waren, und sofern die *t*'s der anomalen Reihe 2,0 bis 4,0 sich zwischen denen der normalen 1,5 bis 5,0 halten, also von der Verschiedenheit der *t*'s bei No. 2 und No. 3 kein erheblicher Unterschied der *p*'s zu erwarten ist. Nehmen wir nun für die anomale Reihe das Mittel von $<$ und $>$ zum Vergleich mit der normalen Reihe, so haben wir:

	y	x
normal	1,0164	0,01098
anomal	1,0012	0,01460

wonach durch die Anomalie y verkleinert, x vergrössert erscheint.

Der erhebliche Unterschied der Constanten in der Reihe No. 1 von den Reihen No. 2 und No. 3 kann darauf beruhen, dass No. 1 mit Zwischen-δ, No. 2 und No. 3 ohne Zwischen-δ angestellt ist.

Die wichtigste und in gewisser Hinsicht fundamentale Frage ist nun aber die, wie sich die Werthe p mit dem Aufsteigen in der Scala der t ändern. Dass sie damit wachsen, ist zweifellos, aber es könnten doch bei dem wachsenden t die Constanten y und x constant bleiben; ja bei jeder Reihe für sich ist diess innerhalb der Grenzen der t, in denen sich die Reihe hält, die Voraussetzung, nach denen y und x berechnet sind. Aber diess würde nicht ausschliessen, dass die Formel $p = y + xt$ blos eine empirische ist, welche innerhalb mässiger Grenzen der t hinlänglich genügt, bei weiterem Verfolg darüber hinaus aber nicht mehr genügen, sondern eine neue Bestimmung der Constanten erfordern würde. Um diese Frage zu untersuchen, müssen wir also die y und x in Versuchsreihen vergleichen, die sich in verschiedener Höhe der t-Scala bewegen.

Nun aber bieten alle Reihen von No. 1 bis No. 3, welche dem Weber'schen Gesetze genügen, keinen Anhalt dazu dar, weil sie sich sämmtlich in den, grossentheils in einander fallenden Intervallen der $t = 1,8$ bis 8,0, $= 1,5$ bis 5,0, und $= 2,0$ bis 4,0 bewegen, ausserdem zum Theil von verschiedenen Beobachtern, theils normal,

theils anomal, theils mit, theils ohne δ, angestellt sind, wovon man, auch abgesehen von unausgeglichenen Zufälligkeiten, die Verschiedenheiten der Constanten in den betreffenden Reihen abhängig machen kann. Hiegegen weicht die Reihe No. 4. b), von $t = 0{,}4$ bis $t = 1{,}2$ reichend, ganz beträchtlich in den t-Werthen und zugleich in den Constanten der p-Werthe von den vorigen Reihen ab, wie man aus der Zusammenstellung (S. 88) ersieht. Nach obiger Bemerkung nun kann man diesen Unterschied nicht von der Verschiedenheit der Beobachter abhängig machen, die Normalität ist der Reihe No. 4 mit den Reihen No. 1 und No. 2 gemein, auch ist sie eben so wie No. 1 mit δ angestellt. Also auf keinen dieser Unterschiede ist der Unterschied ihrer Constanten von den Reihen No. 1 bis No. 3 zu schreiben.

Nun aber verdient Bemerkung, dass dieser Unterschied der Constanten zwischen sehr kleinen und erheblich grössern t-Werthen mit dem Unterschiede zusammentrifft, dass bei ersteren eine untere Abweichung vom Weber'schen Gesetze stattfindet, die bei letzteren merklich überschritten ist; und es liegt nahe, beides auch in sachlicher Beziehung zu einander zu denken; nämlich so, dass, wenn wir den den allgemeinen Ausdruck $p = y + xt$ für die Constitution von p beibehalten, die Constanten y und x sich der wirklichen Constanz um so mehr nähern, je höher man mit den t aufsteigt und dadurch über das Gebiet der unteren Abweichung vom Weber'schen Gesetz hinaus kommt; wogegen bei sehr kleinen Werthen von t die Werthe von y und x mit denen nicht stimmen, welche bei grösseren t erhalten werden. Hienach würde Constanz und Inconstanz von y und x solidarisch mit Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes und Abweichung davon sein. Ich will nicht sagen, dass diese Annahme durch die bisher vorliegenden Versuche als sicher begründet angesehen werden kann; dazu fehlt es noch an einer hinreichenden Ausdehnung derselben mit ausdrücklicher Richtung auf die Prüfung dieser Annahme; jedenfalls erscheint sie mir nach dem, was bisher vorliegt, sehr wahrscheinlich.

Es scheint nur entgegenzustehen, dass doch in der Reihe No. 4 selbst, welche in das Gebiet der unteren Abweichung reicht, sich die Constanz von y und x dadurch zu bewähren scheint, dass die auf die Voraussetzung hievon berechneten Werthe p nahe genug mit den beobachteten stimmen. Indessen könnte diese Uebereinstimmung

trügerisch sein. Was jedenfalls direct für eine starke Variabilität von x im Laufe der Reihe spricht, ist der Umstand, dass der wahrscheinliche Fehler von x grösser als das halbe x ist; nämlich jener $= 0{,}00942$, indess dieser $= 0{,}01680$.

Schliesslich ist zu gestehen, dass über diese Frage noch Unsicherheit besteht.

Erinnern wir uns hienach, dass p den Werth $\sqrt{\frac{v_u}{v_0}}$ hat, sich also aus zwei Bestandtheilen zusammensetzt, wonach sich auch sein Gang aus dem Gange dieser zwei Bestandtheile zusammengesetzt ansehen lassen muss, von denen nach den im Abschnitt IV gegebenen Daten v_0 bei wachsendem t sinkt, v_u aber steigt. Es liess sich nun versuchen, ob dieser Gang sich nicht für jeden Bestandtheil durch eine entsprechende Formel darstellen liesse, als für das zusammengesetzte p, sei es, dass man v_0, v_u oder deren Wurzeln dazu verwendete. Ich habe ersteres gethan, indem ich dazu setzte:

$$v_0 = y - xt\ ; \qquad v_u = y + xt\ ,$$

und die Ableitung von y und x aus der Reihe der v_0, v_u ganz in derselben Weise vornahm, als vorhin aus der Reihe der t, habe mich aber dabei auf die Reihe No. 2. b) und No. 4. b) beschränkt, von welchen erstere dem Weber'schen Gesetze genügt, letztere in das Bereich der unteren Abweichung davon fällt. Hiebei erhielt ich folgende Resultate, welche zunächst allgemein zeigen, dass die Werthe y und x für v_0 nicht mit denen für v_u übereinstimmen, dass also der Unterschied zwischen v_0 und v_u nicht blos auf dem Vorzeichenunterschiede zwischen xt beruht, sondern auch auf verschiedenen Werthen von y und x selbst.

		y	x
No. 2. b)	v_0	1,0710	0,005901
	v_u	1,1092	0,01723
No. 4. b)	v_0	1,2790	0,21310
	v_u	0,9816	0,1515

Hienach folgende Zusammenstellung zwischen Beobachtung und Rechnung:

No. 2. b)

t	v_o beob.	v_o ber.	v_u beob.	v_u ber.	$\sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ ber.
1,5	1,0602	1,0621	1,1428	1,1350	1,0337
2,0	572	592	1379	1436	390
2,5	589	562	1494	1522	445
3,0	624	533	1576	1608	498
3,5	486	503	1834	1694	560
4,0	447	474	1617	1780	619
5,0	400	425	2024	1952	707

No. 4. b)

t	v_o beob.	v_o ber.	v_u beob.	v_u ber.	$\sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ ber.
0,4	1,2200	1,1938	1,0458	1,0422	0,9344
0,5	1996	1725	0794	0574	0,9496
0,7	0769	1295	0643	0876	0,9813
0,8	0760	1085	1004	1028	0,9974
1,0	0530	0659	1084	1331	1,0310
1,2	0617	0233	1901	1633	1,0662

Die in der letzten Verticalspalte enthaltenen Werthe beider Reihen sind aus den berechneten Werthen v_o, v_u der vorhergehenden Spalten hergestellt, und unterscheiden sich, wie man sieht, bei beiden Reihen nur durch Grössen kleiner Ordnung von denen, die nach der Tabelle S. 88 durch directe Berechnung von p erhalten sind. Im Uebrigen stimmt bei No. 2. b) mit Rücksicht auf die Unregelmässigkeiten, welche der Gang der beobachteten Werthe darbietet, Rechnung und Beobachtung eben so befriedigend, als bei directer Berechnung der ganzen p nach S. 88, hingegen bei No. 4. b) so schlecht, dass man den Versuch hier als verfehlt betrachten muss, was die oben aufgestellte Vermuthung unterstützt, dass das Genügen und Nichtgenügen der Formel $p = y + xt$ mit der Gültigkeit und dem Fehlschlag des Weber'schen Gesetzes zusammenhängen, da sich diese Vermuthung bei den Bestandtheilen des p sogar noch entschiedener bestätigt findet, als bei dem ganzen p selbst.

Blickt man nach vorigen Betrachtungen und Ergebnissen auf die früheren Versuche von Vierordt und Mach zurück, so lässt der Umstand, dass bei ihren, wie bei den Versuchen der Verf., überall die constante Hauptzeit der veränderlichen Vergleichszeit voranging, vermuthen, dass ein entsprechender constanter Fehler davon abgehangen hat, also auch eben so Anlass zu einer Correction gäbe, als bei den Versuchen des Verf., nur bieten die Versuche der früheren Beobachter nicht die gleiche Möglichkeit dar, die Correction zu bestimmen.

Nun könnte man fragen: wie liessen sich doch aber in ihren Versuchen die Bewährungen des Weber'schen Gesetzes über die untere Abweichung hinaus, deren ich »In Sachen« p. 178 ff. gedacht habe, finden, ohne die betreffende Correction angebracht zu haben? Hierauf scheint mir, wenigstens vorläufig, Folgendes zu erwidern. Die fehlende Correction bei den Versuchen unseres Verf. bringt allgemein und entschieden mit sich, dass die obere und untere Verhältnissschwelle v_o, v_u bei demselben t ungleich ausfallen. Aber sie bringt, wenn schon wahrscheinlich gleich allgemein, doch nicht überall gleich entschieden, mit sich, dass mit wachsendem t die obere Verhältnissschwelle abnimmt, die untere zunimmt (S. 47), und so kann es sehr wohl Reihen geben, in denen die Constanz der uncorrigirten v_o, v_u mit wachsendem t nur durch Zufälligkeiten gestört erscheint. Mit der Coustanz und Inconstanz der Verhältnissschwellen aber ist die der relativen Unterschiedsschwellen, auf welche bei den Versuchen von Mach und Vierordt Bezug genommen ist, solidarisch.

Dabei wird zuzugestehen sein, dass ohne neue Versuche über die hier einschlagenden Fragen die Untersuchung über den Zeitsinn noch nicht als abgeschlossen gelten kann. Zwar die Thatsache eines in den Versuchen des Verf. sich geltend machenden constanten Fehlers wird sich nicht wegbringen lassen, ob er aber wirklich an den S. 79 ff. angegebenen Ursachen hänge, wird, wenigstens in Betreff des Zeitfehlers, nur dadurch zu entscheiden sein, dass man sich zu den Versuchen mit entgegengesetzter Zeitlage entschliesst, welche zu dieser Entscheidung gehören. Eben so wird der Grund, warum v_0 und v_u sich bald mehr bald weniger constant bei geänderten t zeigen, noch zu ermitteln sein.

Unstreitig hatte es nach all' dem ein Interesse, zu untersuchen,

ob die so entschiedene und überall in gleicher Richtung vorkommende Verschiedenheit, welche zwischen der oberen und unteren Verhältnissschwelle $\frac{t_o}{t}$ und $\frac{t}{t_u}$ im Gebiete des Zeitsinnes stattfindet, und zur Annahme des Verhältnissfehlers q, sowie Anwendung des Correctionsfactors p Anlass giebt, auch bei Versuchen über die Unterschiedsempfindlichkeit im Gebiete eigentlicher Reize statt findet, und ich habe in dieser Hinsicht die Schallversuche der Tischer'schen Abhandlung nach der Redaction, die sie durch Wundt in einer Tabelle der »Philos. Stud.« I. p. 568 erfahren haben, untersucht; aber es zeigt sich hier nichts von einer derartigen Verschiedenheit und also auch kein Anlass, auf eine Correction deshalb einzugehen. In der betreffenden Tabelle vertritt der Schallreiz r unsere Hauptzeit t, und die Werthe $\frac{r_o}{r}$ und $\frac{r}{r_u}$ unsere obere und untere Verhältniss-schwelle $\frac{t_o}{t}$ und $\frac{t}{t_u}$. Nun giebt die Tabelle in einer oberen Abtheilung zu 9 Werthen r, welche von 6,8 bis 6000 reichen, folgende Summen

$$\sum\frac{r_o}{r} = 13,29\ ; \qquad \sum\frac{r}{r_u} = 12,97\ ,$$

und in einer unteren zu 9 Werthen r, welche von 1,9 bis 1315 reichen,

$$\sum\frac{r_o}{r} = 13,38\ ; \qquad \sum\frac{r}{r_u} = 13,58\ ,$$

in Summa für 18 Werthe t von 1,9 bis 6000

$$\sum\frac{r_o}{r} = 26,67\ ; \qquad \sum\frac{r}{r_u} = 26,57\ .$$

Diese Totalsummen $\sum\frac{r_o}{r}$ und $\sum\frac{r}{r_u}$ aber stehen sich viel zu nahe, um in ihrer Verschiedenheit etwas anderes als einen Rest unausgeglichener Zufälligkeiten zu sehen; zumal der Unterschied in der besonders ins Auge gefassten obern und untern Abtheilung eine entgegengesetzte Richtung einhält.

Der Unterschied, den die Versuche über den Zeitsinn in dieser Hinsicht von den Schallversuchen darbieten, würde, wenn von den als möglich in Betracht gezogenen Gründen des betreffenden Fehlers in den Zeitversuchen der erste Geltung haben sollte, darin zu suchen sein, dass er nur extensive, nicht intensive Empfindlichkeit angeht,

wenn hiegegen der zweite den alleinigen oder Hauptantheil an dem Fehler haben sollte, dass bei Schallversuchen der Zeitfehler dadurch berücksichtigt und eliminirt erscheint, dass der Hauptschall und Vergleichsschall die Zeitfolge gewechselt haben.

XI. Correction der rohen Unterschiedsschwellen d_o, d_u und des rohen mittleren Schätzungsfehlers $\varDelta$.

Man würde sehr irren, wenn man daraus, dass sich $t_o = t + d_o$ und $t_u = t - d_u$ dadurch corrigiren lassen, dass man sie mit dem Correctionsfactor $p = \frac{t}{\sqrt{t_o t_u}} = \sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ versieht, schlösse, dass nun auch $d_o = t_o - t$, und $d_u = t - t_u$, d. i. die noch rohen Unterschiedsschwellen, und $\varDelta$, der halbe Unterschied derselben $= \frac{d_o - d_u}{2}$ einfach dadurch corrigirt werden können, dass man sie mit demselben Correctionsfactor versieht; vielmehr da t als fest gegeben keiner Correction unterliegt, wird man in den Werthen

$$d_o = t_o - t \quad \text{und} \quad d_u = t - t_u$$

blos t_o, t_u der angegebenen Correction zu unterziehen haben, woraus dann die Correction von $\varDelta$ von selbst folgt. Nachdem wir nun früher die aus den rohen Werthen t_o, t_u, v_o, v_u, v durch die Correction erwachsenen reinen Werthe mit den entsprechenden deutschen Buchstaben $\mathfrak{t}_o$, $\mathfrak{t}_u$, $\mathfrak{v}_o$, $\mathfrak{v}_u$, $\mathfrak{v}$ bezeichnet haben, wollen wir auch die aus d_o, d_u, $\varDelta$ durch die Correction hervorgehenden reinen Werthe mit den deutschen Buchstaben $\mathfrak{d}_o$, $\mathfrak{d}_u$, $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Aber ehe wir auf die Ausführung dieser Correction selbst eingehen, recapituliren wir erst die im III. Abschnitt entwickelten Hauptverhältnisse der betreffenden rohen Werthe, um sie für die Correction bequem zur Hand zu haben. Wir haben:

$$d_o = t_o - t\,, \quad = (v_o - 1)\,t\,; \qquad d_u = t - t_u\,, \quad = \frac{v_u - 1}{v_u}\,t$$

$$t_o = t + d_o\,; \qquad t_u = t - d_u$$

$$\frac{t_o}{t} = v_o\,; \qquad \frac{t}{t_u} = v_u$$

$$t_o = v_o t\,; \qquad t_u = \frac{t}{v_u}$$

$$w_o = v_o - 1\,; \qquad w_u = v_u - 1$$

Bayerische Staatsbibliothek München

mithin nach verschiedener, sachlich gleichgeltender, Ausdrucksweise:

$$\varDelta = \frac{d_o - d_u}{2} = \frac{t_o + t_u - 2t}{2} = \frac{v_o + \frac{1}{v_u} - 2}{2}\, t\,, \quad \text{kurz} = \frac{Vt}{2}.$$

Hienach betrachten wir bei dem Gewicht, welches der Verfasser mit Wundt auf die Verfolgung des Ganges der noch rohen $\varDelta$ im Gebiete des Zeitsinnes legt, zuvörderst, wie sich dieser Gang bei aufsteigendem t verhält.

Keinesfalls schreiten die $\varDelta$ den t proportional vor; denn hiezu müsste V eine von t unabhängige Constante sein, was aber nicht der Fall ist, da vielmehr die in V enthaltenen uncorrigirten v_o, v_u sich erfahrungsmässig innerhalb wie ausserhalb der Grenzen des Weber'schen Gesetzes mit t ändern (s. Abschn. IV). Stellen wir nun die t als Abscissen, die $\varDelta$ als zugehörige Ordinaten vor, so kann wegen der Abhängigkeit des Werthes V von t die Curve der $\varDelta$ überhaupt in keinem Theile der t-Scala als eine gerade Linie dargestellt werden. — Die Natur der Curve dahingestellt, zeigt ferner die Erfahrung, dass $\varDelta$ bei sehr kleinen Werthen von t positiv, bei grösseren negativ ist, und bei einem gewissen Werthe von t dazwischen, wo $v_o + \frac{1}{v_u} = 2$, null wird, also einen sog. Indifferenzpunct hat, was mit der Erfahrung stimmt, dass v_o mit wachsendem t sinkt, v_u steigt, also $\frac{1}{v_u}$ auch sinkt. Denn hienach kommt man, wenn auch bei kleinem t der Werth $\varDelta$ noch positiv ist, bei wachsendem t in negative $\varDelta$s; und in der That geben alle Versuchsreihen des Verf., die theils mit $t = 1{,}5$, theils 1,8 anheben, mit ein paar ganz vereinzelten, unstreitig nur von Zufälligkeiten abhängigen, Ausnahmen bei einzelnen t's in den anomalen Reihen XVI, XVII (S. 51), nur negative $\varDelta$s, wogegen in den Kollert'schen Reihen No. 4 und 5, welche mit dem kleinen $t = 0{,}4$ anheben, die kleinsten t's positive Werthe $\varDelta$ geben, die aber bei No. 4 schon mit $t = 0{,}8$ in negative umschlagen.

Nächst dem Unterschiede $d_o - d_u$ zwischen den rohen Unterschiedsschwellen, dessen Hälfte $\varDelta$ ist, kann man auch nach dem mittleren Werthe derselben $\frac{d_o + d_u}{2}$ und dem Verhältnisse derselben $\frac{d_o}{d_u}$ fragen, um sie mit den entsprechenden corrigirten

Werthen zu vergleichen. Durch Einführung der obigen Grundgleichungen findet sich:

$$\frac{d_o + d_u}{2} = \frac{t_o - t_u}{2} = \frac{\left(v_o - \frac{1}{v_u}\right)}{2} t = \frac{(v^2 - 1) t}{v_u} .$$

$$\frac{d_o}{d_u} = \frac{v_u (v_o - 1)}{(v_u - 1)} = \frac{v_u w_o}{w_u} .$$

Alle diese Verhältnisse ändern sich nun aber ganz und gar und vereinfachen sich zugleich, wenn wir von den rohen Werthen zu den corrigirten oder reinen übergehen. Vor Eingehen darauf erinnere ich an die, im vorigen Abschnitte (S. 87) gemachte, Bemerkung, dass wir keinen Grund haben, die Correction durch p auf den Theil der t-Scala zu beschränken, in welchem sich das W e b e r'sche Gesetz merklich gültig zeigt, dass aber in den Grenzen der unteren Abweichung vom Gesetze mit dem Fehlschlagen des W e b e r'schen Gesetzes auch anderweite damit zusammenhängende Bestimmungen fehlschlagen. Zunächst jedoch von Bestimmungen, in welchen kein Unterschied in dieser Beziehung zu machen.

Indem wir in den Werthen

$$d_o = t_o - t \quad \text{und} \quad d_u = t - t_u$$

nach angegebenem Princip die Correction nur auf die corrigirbaren Werthe t_o, t_u anwenden, haben wir zunächst:

$$\mathfrak{d}_o = p t_o - t , \qquad \mathfrak{d}_u = t - p t_u ,$$

wobei p beliebig $= \frac{t}{\sqrt{t_o t_u}}$ oder $= \sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ genommen werden kann, da beide Werthe identisch sind. Führt man nun diese Werthe von p ein, so erhält man:

$$\mathfrak{d}_o = (v - 1) t , \qquad \mathfrak{d}_u = \frac{v - 1}{v} t ,$$

worin man v durch $\mathfrak{v}$ ersetzen kann, da $v = \mathfrak{v}$.

Der Ausdruck für $\mathfrak{d}_o$ folgt nämlich daraus, dass man im obigen Ausdruck $\mathfrak{d}_o = p t_o - t$ den Werth p durch $\sqrt{\frac{v_u}{v_o}}$ und den Werth t_o durch $v_o t$ ersetzt. Diess giebt zunächst:

$$\mathfrak{d}_o = v_o \sqrt{\frac{v_u}{v_o}} \cdot t - t = (\sqrt{v_u v_o} - 1) t = (v - 1) t .$$

Der Ausdruck für $\mathfrak{d}_u$ stellt sich nach ähnlicher Ableitung zunächst als $\left(1 - \frac{1}{v}\right)t$ dar, was mit $\left(\frac{v-1}{v}\right)t$ übereinkommt. Hiernach findet sich $\mathfrak{D}$ als corrigirter Werth von Δ:

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{d}_o - \mathfrak{d}_u}{2} = \frac{(v-1)^2}{2v}t$$

wie folgt: zunächst hat man, nach vorigen Ausdrücken für $\mathfrak{d}_o$ und $\mathfrak{d}_u$,

$$\mathfrak{D} = \left[(v-1) - \frac{(v-1)}{v}\right]\frac{t}{2} = \frac{v^2 - 2v + 1}{2v}t\,.$$

Der Werth $v^2 - 2v + 1$ aber ist $= (v-1)^2$. Aus vorigem Ausdrucke für $\mathfrak{D}$ aber fliessen nachstehende Folgerungen.

$\mathfrak{D}$ kann überhaupt für positive t's nur positive Werthe annehmen, weil $(v-1)^2$ als Quadrat an sich selbst, und v als Wurzel aus zwei nothwendig positiven Werthen $\frac{t_o}{t}$, $\frac{t}{t_u}$ positiv ist. Alle negativen Werthe von Δ in den Versuchsreihen des Verf. wie Kollert's müssen sich also durch die Correction in positive $\mathfrak{D}$'s verwandeln, was sich durch die wirkliche Ausführung (s. unten) bestätigt. Einen endlichen Indifferenzpunct, auf dessen Bestimmung der Verf. so grosses Gewicht legt, giebt es für die $\mathfrak{D}$ nicht, sondern der Nullpunct der $\mathfrak{D}$ fällt mit dem Nullpunct der t zusammen. Will man aber, so kann man die Curve der $\mathfrak{D}$ über den Nullpunct der t hinaus dadurch ins Negative verlängert denken, dass man die t selbst als negativ rechnet; was man kann, indem man ihre Länge statt in der Richtung vom Anfang zum Ende zu verfolgen, in der umgekehrten Richtung verfolgt; und es hindert nichts, diess zu thun, nachdem man die positiven t's erst bis zu Null hat abnehmen lassen, ihre Betrachtung dann in derselben Richtung ins Negative fortzusetzen; eine Bemerkung, die ich übrigens nur mache, um dem Einwurf zu begegnen, als ob mit dem Beginn der Curve der $\mathfrak{D}$ bei $t = 0$ ein Bruch der Continuität einträte.

Die reine mittlere Unterschiedsschwelle findet sich nach den Werthen von $\mathfrak{d}_o$ und $\mathfrak{d}_u$:

$$\frac{\mathfrak{d}_o + \mathfrak{d}_u}{2} = \frac{v^2 - 1}{2v}t$$

und das Verhältniss der reinen Unterschiedsschwellen einfach:

$$\frac{\mathfrak{d}_o}{\mathfrak{d}_u} = v = \mathfrak{v}\,,$$

was ein interessantes Gesetz ist, das ich übrigens schon früher in »Revis.« gefunden.

Endlich hat man noch:

$$\frac{\mathfrak{d}_o + \mathfrak{d}_u}{\mathfrak{d}_o - \mathfrak{d}_u} = \frac{v^2 - 1}{(v - 1)^2} = \frac{v + 1}{v - 1}.$$

Alle diese Verhältnisse bestehen unabhängig von der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes, sofern die Correction durch p nach obiger Bemerkung (S. 99) unabhängig von dieser Gültigkeit ist. Nun aber hängt an der Gültigkeit oder Ungültigkeit des Gesetzes folgender Unterschied.

Während angegebenermassen die Δ's weder innerhalb noch ausserhalb der Grenzen des Weber'schen Gesetzes den t proportional gehen und ihre Curve nirgends eine geradlinige Richtung annimmt, findet für die $\mathfrak{D}$'s der Unterschied statt, dass sie innerhalb der Grenzen des Weber'schen Gesetzes den t proportional gehen und sich hiemit durch eine geradlinige Curve darstellen lassen, nicht aber ausserhalb. Gehen wir nämlich auf den Werth:

$$\mathfrak{D} = \frac{(v - 1)^2}{2v} t$$

zurück, so bleibt innerhalb der Grenzen des Gesetzes v und mithin der ganze Factor von t bei wachsendem t constant, nicht aber ausserhalb.

Natürlich lässt sich die Proportionalität der $\mathfrak{D}$ mit t einfach an der Constanz von $\frac{\mathfrak{D}}{t}$ erkennen, von welchem Werth daher in dieser Hinsicht in den folgenden Tabellen Gebrauch gemacht wird.

In jedem Falle aber gelten die vorigen Formeln nur insoweit, als die unregelmässigen Zufälligkeiten dabei als ausgeglichen angesehen werden können; und die folgenden vergleichsweisen Bestimmungen von Δ und $\mathfrak{D}$, $\frac{\Delta}{t}$ und $\frac{\mathfrak{D}}{t}$ in einigen Beispielsreihen sind daher an den Mittelreihen der verschiedenen Beobachter, welche im Abschnitt IV angeführt sind, vorgenommen, um die Ausgleichung wenigstens so weit, als es möglich war, gedeihen zu lassen.

No. 1. b) normal, zwei Beobachter, mit δ.

t	p	$\Delta -$	$\mathfrak{D} +$	$\frac{\Delta}{t} -$	$\frac{\mathfrak{D}}{t}$
1,8	1,0713	— 0,1141	+ 0,0058	0,0634	0,00322
2,0	385	0625	0121	313	605
2,75	694	1698	0093	618	338
2,85	887	2128	0211	747	740
3,0	755	1958	0159	653	530
3,7	769	2424	0235	653	635
6,0	807	4197	0307	704	512
8,0	862	5923	0462	740	578
Summe		— 2,0094	+ 0,1646		

No. 2. b) normal. Drei Beobachter, ohne δ.

t	p	$\Delta -$	$\mathfrak{D} +$	$\frac{\Delta}{t} -$	$\frac{\mathfrak{D}}{t}$
1,5	1,0376	— 0,0482	+ 0,0066	0,0320	0,00440
2,0	375	0640	0086	320	430
2,5	419	0888	0123	355	492
3,0	439	1105	0163	368	543
3,5	619	1861	0190	532	543
4,0	545	1888	0189	472	473
5,0	753	3208	0314	642	628
Summe		— 1,0070	+ 0,1131		

No. 3. b) anomal, <. Drei Beobachter, ohne δ.

t	p	$\Delta -$	$\mathfrak{D} +$	$\frac{\Delta}{t} -$	$\frac{\mathfrak{D}}{t}$
2,0	1,0435	— 0,0745	+ 0,0046	0,0373	0,0023
2,5	528	1135	0125	454	50
3,0	559	1440	0156	480	52
3,5	637	1955	0151	558	43
4,0	711	2465	0204	616	51
Summe		— 0,7740	+ 0,0682		

No. 4. b) normal, vier Beobachter, ohne δ, mit unterer Abweichung.

t	p	$\Delta -$	$\mathfrak{D} +$	$\frac{\Delta}{t}$	$\frac{\mathfrak{D}}{t}$
0,4	0,9259	+ 0,0353	0,00304	0,0883	0,00760
0,5	0,9486	+ 0,0315	417	630	853
0,7	0,9942	+ 0,0058	170	830	243
0,8	1,0113	— 0,0206	187	258	234
1,0	1,0260	— 0,0224	300	224	300
1,2	1,0588	— 0,0589	830	491	692
Summe		± 0,1745	+ 0,02208		

Beim Ueberblick über diese vier Reihen sieht man nun zuvörderst, dass ganz allgemein die mit $\Delta -$ bezeichneten negativen Werthe von Δ durch die Correction in positive $\mathfrak{D}$ übergehen, so dass es keine negativen $\mathfrak{D}$ giebt, dass hiemit auch der Indifferenzpunct der Δ, welcher in No. 4. b) zwischen $t = 0,7$ und $0,8$ liegt, bei den $\mathfrak{D}$ verschwindet, was beides mit oben gezogenen Folgerungen übereinstimmt. Man sieht ferner, dass die Δ ganz allgemein beim Uebergange in die $\mathfrak{D}$ an absoluter Grösse ausserordentlich verlieren, wie denn z. B. bei No. 1. b) nach den unteren Schlusssummen die Δ zu den $\mathfrak{D}$ durchschnittlich im Verhältniss 2,0094 : 0,1646 stehen, d. i. über das zehnfache grösser sind. Ja die $\mathfrak{D}$ kommen hiedurch so weit herab, dass die, durch die Correction unangegriffen bleibenden, Zufälligkeiten auch nach möglichster Ausgleichung durch die Mittelziehung aus den Versuchen mehrerer Beobachter noch verhältnissmässig stark störend einwirken; und hierin liegt der Grund, dass sich die oben gezogene Folgerung, $\frac{\mathfrak{D}}{t}$ müsse bei aufsteigendem t constant bleiben, dahin abändert, diese Werthe müssen ohne deutliche Abhängigkeit von t nur unregelmässig variiren. Auch findet sich dies bei allen Reihen bestätigt, nur etwa mit Ausnahme von No. 2. b), wo $\frac{\mathfrak{D}}{t}$, obwohl auch nicht ohne Unregelmässigkeit und in viel kleinerem Verhältnisse als $\frac{\Delta}{t}$, im Ganzen sichtlich mit t ansteigt.

XII. Ueber einen formellen Streitpunct zwischen Wundt und mir.

Nachdem ich im 30. Abschnitte meiner »Revision« die zur Zeit vorliegenden Versuche über den Zeitsinn zu Gunsten des Weber-schen Gesetzes geltend gemacht, schloss ich (p. 423) mit folgender Bemerkung:

»Bis auf Weiteres würde ich nach Vorigem glauben, dass der Gang der Werthe, auf welche die Versuche über den Zeitsinn führen, überhaupt einerseits durch das Weber'sche Gesetz als Hauptunterlage, andererseits durch zufällige und auf constante Fehler zurückführbare Abweichungen davon als bestimmt angesehen werden könne, und dass die Analyse der Versuche auf diese Bestimmungen zurückzugehen habe. Jedenfalls sind die Werthe T und $\varDelta = T - t$, auf welche Kollert zurückgeht, nur Functionen jener Bestimmungen, und scheinen mir daher von mehr secundärer Bedeutung, indess sie aber für den empirischen Gang der Werthe einen unmittelbareren Anhalt bieten, als der Rückgang auf jene Bestimmungen.«

Unstreitig nicht ohne Rücksicht auf vorige Erklärung äussert sich hiegegen Wundt in einer neueren Abhandlung (Philos. Studien I. p. 562) wie folgt:

»Bei der Untersuchung des Zeitsinnes handelt es sich nicht um die Frage der Gültigkeit des Weber'schen Gesetzes, oder, falls diese Frage erhoben werden sollte, so steht sie doch jedenfalls in zweiter Linie. Das Problem des Zeitsinnes besteht in Beantwortung der Frage, wie sich für unser Bewusstsein ein gegebenes Zeitintervall verändert, wenn es nach einer bestimmten Zwischenzeit reproducirt wird.«*)

Im Verfolge dieser Betrachtungen erklärt nun Wundt (p. 565) als diejenigen Werthe, welche bei den Versuchen über den Zeitsinn das Hauptinteresse beanspruchen, »den mittleren Schätzungswerth T der Vergleichszeit $\left[= \frac{t_o + t_u}{2}\right]$ und seinen Unterschied $\varDelta$ von der Normalzeit t«, den er bemerktermassen als mittlern Schätzungs-

*) Bei den Versuchen zweiter Gruppe unseres Verf. ist allerdings die Zwischenzeit weggelassen, indessen ändert dies principiell nichts in der Streitfrage. F.

fehler bezeichnet, und (p. 565), unter Verallgemeinerung von Zeitgrössen auf Reizgrössen r, seiner Bedeutung nach so bestimmt: »es werde diejenige Grösse dadurch gemessen, um welche wir eine gegebene Reizstärke r zu überschätzen oder zu unterschätzen geneigt sind«.

Was ich nun diesen Gegenbemerkungen Wundt's meinerseits entgegensetzen möchte, sind folgende zwei Puncte: 1) Ich wüsste doch nicht, warum es sich in der Untersuchung des Zeitsinnes nicht um die Gültigkeitsfrage des Weber'schen Gesetzes so gut handeln sollte, als in der Untersuchung anderer Sinnesgebiete, ja warum man nicht ebenso einen Hauptgegenstand der Untersuchung darin finden sollte; 2) warum es weniger wichtig sein sollte, die Frage zu untersuchen, in welchem Verhältnisse zur Hauptzeit sich die Vergleichszeit ändern muss, um bis zum eben merklich werdenden oder eben verschwindenden Unterschiede für die Auffassung zu gelangen, als um welchen absoluten Werth, zumal sich beide Fragen in gemeinsamer Abhängigkeit von denselben Beobachtungsdatis t_0, t_u, t beantworten, ja im Grunde nur dieselbe Frage in verschiedener Form sind. Denn weiss man, in welchem Verhältnisse t_0 den Werth t übersteigt, so weiss man auch, um welchen absoluten Werth d_0. Die Frage in erster Form aber führt natürlicherweise zur Frage, wie weit das Weber'sche Gesetz der Constanz von $\frac{t_0}{t}$ und $\frac{t}{t_u}$ bei Aenderung von t besteht, die andere zunächst zur Frage, welchen Gang die Unterschiedsschwellen d_0, d_u bei Aenderung von t nehmen, wovon dann natürlich auch weiter die Frage abhängt, welchen Gang die $\varDelta = \frac{d_0 - d_u}{2}$ dabei nehmen.

Also möchte ich nicht zugeben, dass die Frage des Weberschen Gesetzes in zweiter Linie gegen die des Ganges der $\varDelta$ stehe. Aus mathematischem Gesichtspuncte sind jedenfalls beide Fragen solidarisch; und kann es statt eines Streites zwischen beiden nur gelten, die gegenseitigen Beziehungen beider ins Auge zu fassen und zu zeigen, wie man von der einen Betrachtungsweise in die andere, von den Werthen, die man im einen Wege als bedeutungsvoll erkennt, zu denen, welche sich im andern Wege als bedeutungsvoll darstellen, gelangen kann.

Nun kann das $v = \sqrt{\frac{t_0}{t_u}} = \sqrt{\frac{t + d_0}{t - d_u}}$, woran ich mich bei der

Frage des Weber'schen Gesetzes hauptsächlich halte, nicht als Function des $\Delta = \frac{t_o + t_u}{2} - t = \frac{d_o - d_u}{2}$, woran sich Wundt bei seiner Verfolgung der Verhältnisse des Zeitsinnes hauptsächlich hält, noch umgekehrt dargestellt werden, wohl aber beide als Function derselben Beobachtungswerthe t, t_o, t_u oder statt dessen t, d_o, d_u, worauf im III. Abschnitt genügend eingegangen sein dürfte.

Hiebei aber hat sich Gelegenheit gefunden, darauf hinzuweisen, dass der Werth $\Delta = \frac{d_o - d_u}{2}$ eigentlich nicht so, wie es seine Bezeichnung als mittlerer Schätzungsfehler zu verrathen scheint, massgebend für grössere oder geringere Unterschieds-Empfindlichkeit oder Schätzungssicherheit ist, sowie darauf, dass der Indifferenzpunct, wo $d_o = d_u$ ist, nichts weniger als den t-Werth bezeichnet, an welchem die Schätzung am genauesten, ja geradezu richtig, ist, sondern eben nur den Punct, wo die obere und untere Unterschiedsschwelle einander gleich sind. Wenn aber beide sehr gross sind, so bleibt die Schätzung beidesfalls sehr ungenau, trotzdem, dass $\frac{d_o - d_u}{2}$ null ist. Auch möchte ich die obige Definition oder Deutung der Δ nicht zugeben, wonach durch Δ diejenige Grösse gemessen wird, um welche wir einen gegebenen Zeitwerth zu überschätzen »oder« zu unterschätzen geneigt sind, sondern finde darin nur den halben Unterschied der beiden Werthe, um welche wir t zu überschätzen und zu unterschätzen geneigt sind; und würde allerdings in dieser Beziehung die Verfolgung des Werthes $\frac{d_o + d_u}{2} = \frac{t_o - t_u}{2}$ interessanter finden. Indess behält doch auch $\frac{d_o - d_u}{2}$ seine Bedeutung für den Zeitsinn; und was lässt sich dagegen sagen, wenn der Gang dieses Werthes zum Gegenstande einer Untersuchung genommen wird. Nun aber tritt folgende Bemerkung hinzu.

Es hat sich gezeigt, dass, wenn man bei den Werthen t_o, t_u, aus welchen, in Combination mit t, sowohl v als Δ, ja alle in Betracht kommenden Werthe abzuleiten sind, stehen bleibt, wie sie unmittelbar aus den Versuchen hervorgehen, weder das Weber'sche Gesetz, noch ein auf ein einfaches Gesetz zu bringender Gang der Δ in irgendwelchen Grenzen der t zu finden ist, wohl aber mittelst der Correction, welche in den beiden vorigen Abschnitten besprochen und angewandt ist, eine Correction, die übrigens keineswegs blos

durch das Bedürfniss, zu einfachen Gesetzlichkeiten zu gelangen, motivirt und bestimmt ist, sondern sich auch auf Thatsachen zu stützen hat, welche das Vorhandensein eines, von der Methode der Minimaländerungen im Gebiete des Zeitsinnes bisher noch übrig gelassenen, constanten Fehlers theils direct erkennen, theils mit überwiegender Wahrscheinlichkeit vermuthen lassen, und dessen Elimination fordern (s. Abschn. X).

Soll nun doch der zu t bezugsweise Gang der $\varDelta$ verfolgt werden, so liegt auch meines Erachtens die Forderung vor, ihn nicht oder doch nicht blos in seinen rohen Werthen zu verfolgen, wie bisher nur geschehen ist, sondern auch in seinen corrigirten Werthen, wo ich $\mathfrak{D}$ für $\varDelta$ setze. Diess ist im vorigen Abschnitte an einigen Reihen ausgeführt; dabei hat sich aber gefunden, dass die $\varDelta$ durch diese Correction zu solcher Kleinheit zusammenschrumpfen, um durch die zufälligen Beobachtungsfehler so gut wie ganz überwuchert zu werden, und mithin den Versuch ihres genauen Verfolges vergeblich zu machen. Der Indifferenzpunct aber verschwindet durch die Correction ganz, sofern $\mathfrak{D}$ nur bei $t = 0$ selbst null wird (S. 100).

Kann ich nun nach all' dem aus formellem Gesichtspuncte dem mittleren Schätzungsfehler nicht dieselbe Wichtigkeit und Bedeutung für das Versuchsfeld des Zeitsinnes beilegen, die ihm Wundt zuerkennt, so habe ich dagegen den sachlichen Gewinn anzuerkennen, der diesem Felde durch die Verbindung des Verfahrens nach Oben und Unten in seiner auch sonst vorzüglich erscheinenden Methode erwachsen ist, sofern sie zur Erkenntniss und Elimination des, die reinen Verhältnisse des Zeitsinnes störenden, constanten Fehlers geführt und dadurch dem Weber'schen Gesetze eine neue und schöne Bestätigung zugefügt hat, die zu der hinzutritt, welche früher das Feld des Gehörsinnes derselben Methode verdankte. Und wenn schon der Verf. der hier besprochenen Abhandlung diesen Gewinn nicht selbst gezogen hat, hat er doch durch die Treue, den Eifer und die Beharrlichkeit, mit welchen er im Sinne der Methode experimentirt hat, die Mittel dazu geboten.

Inhalt.

		Seite
I.	Eingang	3
II.	Ueber die allgemeinere Tragweite des Weber'schen Gesetzes im Gebiete des Zeitsinnes	5
III.	Methode der Minimaländerungen. Bezeichnung und gegenseitige Beziehung der dadurch zu erhaltenden Werthe	7
IV.	Untersuchungsmaterial und Versuchstabellen	16
V.	Nachweis von Verschiedenheiten der Unterschiedsempfindlichkeit bei den verschiedenen Beobachtern	30
VI.	Ueber das bei der Mittelziehung einzuschlagende Verfahren	33
VII.	Einige Nebenbemerkungen	42
VIII.	Ueber die Gültigkeitsfrage des Weber'schen Gesetzes	46
IX.	Ueber die Periodicitätsfrage	65
X.	Ueber den Correctionsfactor p; die Correction der rohen Verhältnissschwellen und rohen relativen Unterschiedsschwellen w_0, w_u durch denselben	79
XI.	Correction der rohen Unterschiedsschwellen d_0, d_u und des rohen mittleren Schätzungsfehlers Δ	97
XII.	Ueber einen formellen Streitpunct zwischen Wundt und mir	104
Inhalt		108

Berichtigung.

Auf S. 78 Z. 22 v. o. setze 𝔇 statt ϑ.

UEBER DIE METHODE

DER

RICHTIGEN UND FALSCHEN FÄLLE

IN ANWENDUNG AUF DIE

MASSBESTIMMUNGEN DER FEINHEIT ODER EXTENSIVEN EMPFINDLICHKEIT DES RAUMSINNES

VON

G. TH. FECHNER,

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº II.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1884.

Vom Verfasser übergeben den 4. August 1884.
Der Abdruck vollendet den 28. October 1884.

UEBER DIE METHODE

DER

RICHTIGEN UND FALSCHEN FÄLLE

IN

ANWENDUNG AUF DIE MASSBESTIMMUNGEN DER FEINHEIT ODER EXTENSIVEN EMPFINDLICHKEIT DES RAUMSINNES

VON

G. TH. FECHNER.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

I. Eingang.

E. H. Weber hat bekanntlich gefunden, dass, wenn man eine Distanz auf der Haut zwischen zwei Zirkelspitzen abgrenzt, die Distanz eine gewisse Grösse haben muss, soll sie als Distanz erscheinen, unter dieser Grösse, der sog. eben merklichen, aber nur den Eindruck einer einfachen Berührung giebt, und dass auf verschiedenen Hautstellen die eben merkliche Distanz eine verschiedene Grösse hat. Hienach legt man den verschiedenen Stellen der Haut eine verschiedene Feinheit des Raumsinnes oder, nach einer Verallgemeinerung des Begriffes der Empfindlichkeit von intensiven auf extensive Grössen, eine verschiedene extensive Empfindlichkeit bei; sie gilt als um so grösser, je kleiner die eben merkliche Distanz ist, und kann, nach dem allgemeinen Massbegriffe der Empfindlichkeit, der Grösse der eben merklichen Distanz umgekehrt proportional gesetzt werden. Ueberschreitet eine Distanz auf der Haut die eben merkliche, so erscheint sie bei gegebenem Verhältnisse der Ueberschreitung um so grösser, je kleiner die eben merkliche Distanz selbst auf derselben Hautstelle ist.

Zu dieser Methode, die extensive Empfindlichkeit verschiedener Hautstellen vergleichungsweise zu bestimmen, der sog. Methode der Ebenmerklichkeit, hat Vierordt eine andere gefügt, die sog. Methode der richtigen und falschen Fälle (kurz: Methode d. r. u. f. F.), welche auf folgender Thatsache fusst.

Es findet sich, dass man innerhalb gewisser Grenzen der Distanz dieselbe bei wiederholten Versuchen nach zufälligen Mitbestimmungen bald als Distanz richtig erkennt, bald die Doppelberührung als einfach empfindet, und insofern falsch urtheilt. Natürlich aber, je öfter

man sie unter vergleichbar gehaltenen Umständen an einer gegebenen Hautstelle richtig erkennt, für desto feiner wird man den Raumsinn, für desto grösser die extensive Empfindlichkeit der Haut an der betreffenden Stelle zu halten haben, und es wird nur, wie bei der vorigen Methode, darauf ankommen, einestheils die Versuche so anzuordnen, anderntheils so zu berechnen, dass vergleichbare Masse der Empfindlichkeit danach mit möglichster Sicherheit gewonnen werden können; und um eine hierauf bezügliche Untersuchung wird es sich im Folgenden handeln.

Insofern die betreffenden Distanzen absolute Grössen, nicht Unterschiedsgrössen sind, bezieht sich auch diese Untersuchung auf sog. absolute, nicht Unterschieds-Empfindlichkeit. Zwar könnte dieselbe Methode auch auf Unterschiedsempfindlichkeit im Tastgebiete angewandt werden, so nämlich, dass man anstatt blos einer Distanz zwei um ein weniges verschiedene Distanzen auf derselben Hautstelle nach einander abgrenzte, und abzählte, wie oft das Dasein und die Richtung des Unterschiedes richtig und wie oft falsch geschätzt wird, entsprechend als bei meinen Gewichtsversuchen; bis jetzt aber liegen derartige Versuche in Bezug auf das Tastgebiet noch nicht vor.

Ein Resumé und Inhaltsverzeichniss am Schlusse der Abhandlung wird die Uebersicht derselben erleichtern, nachdem die Mannichfaltigkeit und Verwickelung der Specialaufgaben, die sich ihrer allgemeinen Aufgabe unterordnen, zu einer an sich nicht erwünschten Ausdehnung derselben geführt hat.

Wegen im Folgenden zu gebrauchender Bezeichnungen ist vorzubemerken, dass D allgemein die Spitzendistanz bedeutet, und π und e die gewohnte Bedeutung als Ludolf'sche Zahl und Grundzahl der natürlichen Logarithmen haben. Mit S. wird auf Seitenzahlen in dieser Abhandlung, mit p. andershin verwiesen. Einschaltungen in Anführungen aus andern Autoren, welche von diesen selbst herrühren, werden in runde Klammern, solche, die von mir herrühren, in eckige Klammern eingeschlossen.

Die Distanzeinheit ist überall, wo nichts Anderes ausdrücklich bemerkt wird, der Millimeter.

II. Allgemeine Sachlage und specielle Aufgaben der folgenden Untersuchung.

Die Versuche über den Raumsinn der Haut nach unserer Methode sind dadurch schon zu grosser Ausdehnung gelangt, dass Vierordt, dem das fundamentale Verdienst gebührt, der Erfinder der Methode überhaupt zu sein, derselben auch durch Versuche in seinem physiologischen Institut eine ausgedehnte Folge gegeben hat. Inzwischen wie es zu geschehen pflegt, dass das Hauptverdienst einer neuen Erfindung noch Nacharbeiten Raum lässt, ist es auch hier der Fall gewesen; indem die bisherige Anwendung der Methode theils zum praktischen Zweck, eine Scala der extensiven Empfindlichkeit für die ganze Haut aufzustellen, theils einer Hypothese Vierordt's bezüglich der Abstufung der Feinheit des Raumsinnes nach den Localitäten zur Stütze zu dienen, noch manche Fragen über die Methode selbst übrig gelassen hat, die sich der endlichen Lösung nicht entziehen dürfen, worauf nun eben die Untersuchung geht, über welche im Folgenden zu berichten sein wird. Diese Untersuchung kann als eine gemeinsame Arbeit von dem durch schon frühere Arbeiten im physiologischen und psychophysischen Gebiete um die Wissenschaft verdienten Dr. Camerer und von mir angesehen werden, wovon die experimentale Seite ganz Camerer's Verdienst ist, indess die Rechnungsseite mir anheimgefallen ist. Eine mehrjährig zwischen uns geführte Correspondenz aber hat die Beziehung zwischen beiden Seiten forterhalten, und zu einer Uebereinstimmung nach den theoretischen Beziehungen der Aufgabe geführt.

Fragen jener Art, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben werden, sind namentlich die folgenden.

1) Lassen sich die Ergebnisse der Methode in Anwendung auf die absolute Empfindlichkeit im Tastgebiete nicht ebenso mit Vortheil durch eine Formel repräsentiren, als es schon bezüglich der Unterschiedsempfindlichkeit in anderen Gebieten, namentlich dem Gewichtsgebiete, geschehen ist; und sofern bisher zweierlei Formeln dazu in Vorschlag gebracht sind, lässt sich einer von ihnen der Vorzug ertheilen?

2) Ist bei den Versuchen das wissentliche oder unwissentliche Verfahren vorzuziehen?

3) Wie sind die Fälle zu verwerthen, welche zwischen dem Eindruck einfacher und doppelter Berührung mitten inne liegen?

4) Welche Rolle spielen die sog. Vexirversuche und Vexirfehler?

5) Wie sind die Versuche verschiedener Beobachter zu einheitlichen Resultaten zu combiniren?

Die nähere Bedeutung dieser Fragen wird Denen, welche überhaupt schon Kenntniss von den Versuchen in diesem Gebiete genommen haben, nicht fremd sein, weiterhin aber noch besonders darauf eingegangen werden. Zunächst nur folgende Bemerkung.

Um nicht bei den einzelnen Resultaten der Versuche stehen zu bleiben, wird man solche jedenfalls durch eine Regel zu verknüpfen suchen, und womöglich, weil am schärfsten, wird eine solche Regel unter einen mathematischen Ausdruck, kurz unter eine Formel zu bringen sein, wonach die Frage nach einer solchen oben vorangestellt worden ist. Aber natürlich, so wie die Formel, um zulänglich zu sein, mit den Erfahrungsdatis stimmen muss, müssen diese so beschaffen sein, um sich der Aufstellung einer Regel oder Formel zu fügen, und muss hiezu ein zulängliches Verfahren eingeschlagen sein. Besteht nun ein Zweifel, welche Formel und welches Verfahren unter den verschiedenen, welche sich dazu darbieten, vorzuziehen ist, so wird derjenigen Combination beider der Vorzug zu geben sein, welche nach möglichster Compensation und Elimination constanter Fehler die beste Uebereinstimmung zwischen den durch das Verfahren gelieferten und den durch die Regel oder Formel geforderten Datis, kurz zwischen Beobachtung und Rechnung gewährt. Dieses, einer Rechtfertigung unstreitig nicht bedürfende, Princip liegt der folgenden Untersuchung als massgebend unter und wird seine Anwendung namentlich im XVI. Abschnitte finden. Zuvor jedoch werden die Versuchsumstände und Rechnungsprincipien, welche dabei in Rücksicht und Anwendung kommen, zu besprechen, und im nächsten Abschnitte die Eingangs gegebenen historischen Notizen noch etwas zu vervollständigen sein.

III. Uebersicht der bisherigen Untersuchungen.

Wennschon Vierordt als Erfinder der Methode der r. u. f. F. überhaupt zu bezeichnen ist, beziehen sich doch seine frühesten Versuche nach dieser Methode nicht auf die uns hier angehende absolute Empfindlichkeit im Tastgebiete, sondern auf Unterschiedsempfindlichkeit im Schallgebiete. Es sind nämlich die von Renz und Wolff unter Vierordt's Leitung angestellten Versuche, worüber in Vierordt's Arch. 1856 2. H. p. 185, sowie in Pogg. Ann. XCVIII berichtet, auch eine Notiz in m. »Elem.« I. 175f. gegeben ist. Wie es scheint unabhängig von Vierordt aber, wenn schon erst nach ihm, ist Volkmann auf dieselbe Methode gekommen und hat sie zuerst auf das Untersuchungsgebiet, was uns hier speciell zu beschäftigen hat, angewandt. Seine Versuche sind an der Fingerspitze vergleichungsweise mit Versuchen nach Weber's Methode der Ebenmerklichkeit ausgeführt und in s. Abh. »Ueber den Einfluss der Uebung auf das Erkennen räumlicher Distanzen« in den »Berichten der königl. sächs. Ges. 1858. Band X p. 46ff. beschrieben. Ohne sehr zahlreich zu sein, sind sie doch nach gewisser Beziehung sehr belangreich (vergl. Abschn. X); aber da sie später nicht wieder von ihm aufgenommen worden sind, ist Vierordt durch seine späteren Versuche bisher der Hauptvertreter unserer Methode geblieben.

Zunächst nämlich veröffentlichte er im J. 1868 in einer besondern Schrift eine Untersuchung über den Zeitsinn nach unserer Methode, und hienach beginnt mit dem J. 1870 eine ganze Reihe von Abhandlungen seiner Schüler über unser Thema, die er in seinem physiologischen Institute zur Untersuchung desselben herangezogen hat, als namentlich Kottenkamp und Ullrich, Paulus, Riecker, Hartmann, Gärttner, Schimpf. Diese Versuche erstrecken sich über die gesammte Hautoberfläche und die Resultate derselben sind von Vierordt in der 5. Aufl. seines »Grundrisses der Physiologie« 1877, p. 344 zusammengefasst und von Erläuterungen begleitet. In Kürze werde ich die Gesammtheit dieser, von Vierordt veranlassten, in seinem Institute angestellten, Versuche als Tübinger Versuche bezeichnen.

Kottenkamp und Ullrich, Haut der obern Extrem. in Zeitschr. f. Biol. (1870) VI. 37. — Paulus, untere Extrem. ebendas. (1871) VII. 237. —

Riecker, Unterschenkel, ebendas. IX. 95. — Derselbe, Kopfhaut ebend. X. 177. — Hartmann, Rumpf u. Hals, ebend. XI. 79. — Gärttner, Finger, Kinn, Vorderarm (bei einem Blinden), ebend. XVII. 56. — Schimpf, Bein, ebend. XVII. 62. — Eigene theoretische und zusammenstellende Abhandlungen von Vierordt in Pflüger's Arch. II. 297, in Zeitschr. f. Biol. VI. 53 u. in s. Grundriss der Physiol. 5. Aufl. 1877. 342 und Physiol. des Kindesalters, 1. Aufl. 1881. 458; wozu seitdem noch eine zweite Aufl. erschienen ist.

Hienach hat Dr. Camerer, selbst früher Schüler Vierordt's, zur Zeit seiner folgends zu besprechenden Versuche Oberamtsarzt in Riedlingen, jetzt in gleicher Stellung in Urach (Württemberg), zunächst auf Anregung durch Vierordt, zwei grosse Versuchsreihen, die eine in den Jahren 1875, 76, die andere in den Jahren 1879, 80 mit seinen zwei Kindern (Hedwig und Ida) an den verschiedenen Theilen der obern Extremität vorgenommen, deren Hauptzweck von vornherein war, »die Leistungen des Raumsinnes in verschiedenen Lebensaltern zu untersuchen«, deren Ergebnisse jedoch über diesen Zweck hinausgreifen. Beide Versuchsreihen sind vereinigt im XVII. Bande der Zeitschr. f. Biol. p. 1 ff. erschienen und die wichtigsten Resultate davon in Vierordt's Physiologie des Kindesalters mitgetheilt.

Da inzwischen nicht nur durch die Tübinger Versuche, sondern auch durch diese früheren Versuche Camerer's die obigen Fragen (S. 113) noch unerledigt geblieben sind, hat Camerer im Interesse ihrer Lösung seit September 1882 noch drei neue Versuchsreihen an Handgelenk und Stirn, unter Mitzuziehung dreier Erwachsenen zu den früheren kindlichen Versuchssubjecten, angestellt, welche in Band XIX 280 ff. der Zeitschr. f. Biol. veröffentlicht sind. Ueber diese wird in einem späteren Abschn. (VIII.) dieser Abhandlung noch besonders zu berichten sein, da sie die Hauptunterlage der folgenden Untersuchung bilden. Jene älteren und diese neueren Versuche (sowie die Abhandlungen, worin sie stehen) werden von mir als No. 1 und No. 2 und die drei verschiedenen Versuchsabtheilungen von No. 2 als no. 1, 2, 3 unterschieden.

Obwohl nun die folgende Untersuchung auf Grundlage der neuen Camerer'schen Versuche in mehrfacher Hinsicht über die Tübinger und Camerer's eigne frühere Versuche hinausführen und zu einigen Modificationen der früher eingeschlagenen Versuchsweise Anlass geben wird, hindert diess doch nicht, dass die früheren Untersuchungen so

wie sie vorliegen, in so weit sie vergleichbar sind, dem praktischen Zwecke, zu dem sie ausgesprochenermassen angestellt sind, fortgehends dienen können; d. h. eine Reihenfolge der extensiven Empfindlichkeit für verschiedene Hauttheile festzustellen, indess sie gegen die Aufgabe eines eigentlichen Massvergleiches in mancher Hinsicht zurückbleiben.

Mit den Versuchen Camerer's über den Tastsinn stehen in verwandtschaftlicher Beziehung andere Versuche desselben über den Geschmackssinn, welche, obwohl auf ein anderes Sinnesgebiet und vielmehr auf intensive als extensive Empfindlichkeit bezüglich, doch das mit jenen gemein haben, dass sie nicht minder nach unserer Methode angestellt sind, sich ebenso auf absolute, nicht Unterschieds-Empfindlichkeit beziehen, sich nach gleichen Principien rechnend behandeln lassen und sich derselben Formel fügen, wenn man Raumdistanz durch Salzgehalt der Lösung ersetzt. Hiedurch ergänzen sich von einer Seite beiderlei Versuche, indess sie sich von der andern Seite controliren und bestätigen, und gewinnt die Untersuchung über diesen Gegenstand ein allgemeineres Interesse, sofern sie auf die Massbestimmungen über absolute Empfindlichkeit überhaupt, rücksichtslos auf das Gebiet, durch welches die Empfindung in Anspruch genommen wird, bezüglich erscheint. Hier jedoch fasse ich die Untersuchung noch nicht in dieser Allgemeinheit, sondern beschränke mich auf den Raumsinn, um nur hier und da vorläufig mit auf die, einer künftigen Darstellung vorzubehaltende, Untersuchung über den Geschmackssinn zu verweisen.

Die bis jetzt veröffentlichten Versuche Camerer's über den Geschmackssinn sind in zwei Abhandlungen, beziehentlich in Pflüger's Arch. 1870. 3. Jahrg. und Zeitschr. f. Biol. 6. Band p. 440 ff. enthalten. Hiezu hat jedoch Camerer neuerdings noch neue Versuche gefügt, die mit den früheren wohl stimmen, bisher aber mir erst privatim mitgetheilt sind.

Kommen wir von der experimentalen zur theoretischen und mathematischen Seite der Untersuchung, so hat zunächst Vierordt selbst durch eine sinnreiche Methode, worauf näher im XI. Abschn. einzugehen, die Aufstellung einer Formel für Bestimmung der Massverhältnisse des Tastsinnes entbehrlich zu machen gesucht, welche, wenn sie auch nicht Alles leistet, was man von einer massgebenden

Formel wünschen kann, doch solche bis zu gewissen Grenzen vertreten kann.

Demnächst hat Dr. G. E. Müller, damals noch Privatdocent, jetzt an Herbart's Stelle ord. Professor in Göttingen, ohne zwar selbst Versuche in unserem Felde angestellt zu haben, auf Grund der, ihm damals erst vorliegenden, Tübinger Versuche eine Theorie dieser Versuche mit einer Formel zur Repräsentation ihrer Ergebnisse aufgestellt, und dieselbe unter dem Titel »Ueber die Massbestimmungen des Ortssinnes der Haut mittelst der Methode der richtigen und falschen Fälle« in Pflüger's Arch. Band XIX, 191 ff. veröffentlicht, woraus sie auch in besonderm Abdruck (1879) unter obigem Titel (Bonn, Strauss) erschienen ist. Da mir jedoch die Müller'sche Formel Bedenken zu unterliegen schien, habe ich ihr in m. »Revision der Hauptpunkte der Psychophysik« p. 425 eine andere Formel*) als wahrscheinlich passender, gegenübergestellt, mit dem vorläufigen Zugeständnisse, dass die bis dahin vorliegenden Versuche noch nicht sicher zwischen beiden entscheiden lassen; wogegen ich nach Abschluss von Camerer's neuen Versuchen diese Entscheidung auf Grund der folgenden Untersuchung (XII. und XVI.) allerdings zu Gunsten meiner Formel gegeben halte. Um jedoch einerseits der Aufstellungsweise von Müller's Formel und damit Müller selbst gerecht zu werden, andrerseits den Grund erkennen zu lassen, weshalb ich trotz der schliesslichen Ablehnung seiner Formel so weit auf dieselbe eingehe, als man finden wird, glaube ich, zu vorigem Urtheile schon vorläufig Folgendes hinzufügen zu müssen.

Der Gesichtspunct, auf den Müller seine Formel begründet hat (s. Abschn. XII), erscheint nicht nur von vornherein rationell, sondern auch demjenigen, welcher zu einer brauchbaren Formel für die Unterschiedsempfindlichkeit geführt hat, ganz analog. Die theoretische Durchführung dieses Gesichtspunctes ist ferner vom Verf. nicht nur mit der bei ihm gewohnten Schärfe geschehen, sondern er hat auch

*) Wenn Müller p. 193 seiner Abh. in einer Anmerkung erwähnt, dass die von ihm gefundene Formel auch von mir gefunden sei, so beruht diess auf einem Missverständniss. Die Formel, deren ich früher beiläufig gegen ihn gedachte, war von vornherein eine andere als die seinige, ist aber später von mir auf Grund einer mir triftig scheinenden Gegenbemerkung Seitens Müller verlassen worden, ohne dass ich doch zu der seinigen bekehrt worden wäre.

nicht versäumt, seine Formel an die zur Zeit vorliegenden Erfahrungen zu halten; und es ist gewiss, dass, so lange man sich an die Tübinger Versuche, ja selbst noch an die älteren Camerer'schen Versuche hält, nicht nur kein empirischer Vortheil meiner Formel vor der seinigen im Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung nachzuweisen ist (Abschn. XIX), sondern auch, dass eine gewisse Beziehung zwischen den Differenzen der aufsteigenden Distanzen und Differenzen der zugehörigen Zahlen richtiger Fälle in den älteren Versuchen entschieden besser zur Müller'schen Formel als der meinigen stimmt. Also war dem Stande der Sache, wie er zur Zeit von Müller's Untersuchung vorlag, durch seine Arbeit wohl genügt. Wenn ich nun doch seiner Formel schliesslich nicht zustimmen kann, und es um so weniger kann, als auch die Geschmacksversuche Camerer's sich besser meiner als Müller's Formel fügen, so hängt diess theils von theoretischen Gründen ab, auf welche der XII. Abschnitt näher eingeht, theils davon, dass das relativ günstige Verhältniss, in welchem die früheren Versuche zur Müller'schen Formel stehen, schwindet, wenn ein gewisser, als solcher nachweisbarer, Missstand der älteren Versuche, dem die Müller'sche Formel besser als die meinige entspricht, beseitigt wird, was aber erst durch die neueren Camerer'schen Versuche geleistet ist (XVI).

Sofern nun doch die Ableitungsweise der Müller'schen Formel nicht nur an sich der Beachtung werth ist, sondern auch die Formel selbst in früheren Versuchen eine Stütze finden kann, wird man es in der Ordnung finden, wenn ich, statt einer kurzen Abfertigung derselben, auf alle Momente, die zur Abwägung derselben mit der meinigen beitragen können, mit Sorgfalt eingehen werde.

Dazu unterlasse ich nicht, zum Voraus ein Verdienst hervorzuheben, was sich Müller (nach den Auseinandersetzungen im XIV. Abschn.) um die Rechnungsseite unserer Methode durch eine erleichterte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate darauf erworben hat, wovon ich selbst Nutzen gezogen habe, und wovon auch über das Gebiet unserer Versuche hinaus Gelegenheit sein kann, Gebrauch zu machen.

IV. Unterscheidung und Bezeichnung der verschiedenen Fälle.

Wir haben S. 111 richtige und falsche Fälle unterschieden. Dabei ist wichtig, die Bedeutung, welche die falschen Fälle bei unseren, auf absolute Empfindlichkeit bezüglichen, Tastversuchen haben, nicht mit derjenigen zusammenzuwerfen und zu verwechseln, welche sie bei den, auf Unterschiedsempfindlichkeit bezüglichen, Versuchen, wie es meine Gewichtsversuche sind, haben. Bei unseren Versuchen im Tastgebiete heisst falsch ein Fall, wo eine wirklich vorhandene Distanz als fehlend, als Null, die Berührung mit zwei Spitzen als einfach erscheint; bei jenen Gewichtsversuchen aber heisst nicht falsch ein Fall, wo der Gewichtsunterschied als fehlend, als Null erscheint, sondern wo er verkehrt, das grössere Gewicht als das kleinere erscheint.

Bei den Gewichtsversuchen habe ich die richtigen Fälle mit *r*, die falschen mit *f*, die Nullfälle mit *z* bezeichnet. Bei den Tastversuchen werde ich die richtigen Fälle ebenfalls mit *r*, die falschen aber, da sie gar nicht mit den *f* der Gewichtsversuche stimmen, auch nicht mit *f*, sondern, wie die Nullversuche der Gewichtsversuche, mit *z* bezeichnen, sofern sie, ohne mit denselben principiell übereinzukommen, doch das gemein damit haben, dass ebenso wie bei den Gewichtsversuchen ein Unterschied, so hier eine absolute Grösse als Null erscheint.

Der scharfen Sonderung der Fälle in richtige *r*, wo zwei getrennte Spitzen entschieden als von 2 Spitzen herrührend erscheinen und falsche oder Nullfälle *z*, wo sie entschieden als von 1 Spitze herrührend erscheinen, tritt leider der Umstand entgegen, dass es Zwischenfälle dazwischen giebt, wo das Beobachtungssubject unentschieden dazwischen bleibt, ob sie vielmehr auf die eine oder andere Seite zu legen, vielmehr zu den *r* oder den *z* zu rechnen sind. So kommen länglich oder breit erscheinende Eindrücke vor, die keineswegs als solche von 2 getrennten Spitzen, aber auch nicht als solche, die von einfacher Berührung mit einer einfachen Spitze herrührend erscheinen. Da nun überhaupt keine scharfe Abgrenzung der Zwischenfälle von den ganz entschiedenen Fällen *r*, *z* stattfindet, so kann

es nicht befremden, wenn überhaupt mannichfache Schwankungen in Unterscheidung, Bezeichnung und Verwerthung solcher Fälle bei den Beobachtern vorkommen, worauf nöthig ist, etwas näher einzugehen, weil die Beurtheilung und Berechnung der Versuche davon grossen Einfluss erleidet.

Bei den Tübinger Beobachtern werden die Zwischen- oder Uebergangsfälle im Allgemeinen als unentschiedene oder unbestimmte (ersteres bei Riecker, Paulus, Schimpf, letzteres bei Hartmann) bezeichnet, und solcher finden sich bei manchen derselben sehr viele, indess sie bei andern (Kottenkamp und Ullrich, Gärttner) ganz fehlen, aber unstreitig blos deshalb, weil sie sei es ganz zu den *r* oder *z* geschlagen, oder zwischen beiden getheilt werden. In etwas anderer Bedeutung als bei den Tübinger Beobachtern erscheinen die unentschiedenen oder unbestimmten Fälle bei Camerer; und um nicht eigene Deutungen denen der Beobachter selbst zu substituiren, lasse ich hier deren eigene Angaben über die Bezeichnung und Charakteristik der von ihnen unterschiedenen Fälle folgen.

Kottenkamp und Ullrich, die frühesten von den Tübinger Beobachtern, sagen (p. 42 ihrer Abh.):

»Die in jedem Einzelfalle bei der gleichzeitigen Berührung zweier Hautstellen möglichen Empfindungen, resp. Urtheile vertheilen sich in folgende Kategorien:

I. Doppelempfindungen, und zwar:

a) mit richtiger } Beurtheilung der beiden afficirten Hautstellen.
b) mit falscher }

II. Einfache Empfindungen; diese selbst können sein:

c) punktförmige;

d) man hat den Eindruck, dass die Haut von einem länglichen Körper berührt wird;

α) richtig oder

β) falsch angegeben.

In den nachfolgenden Tabellen betrachten wir blos die zur Rubrik a) gehörigen Empfindungen als »»richtige««, weil sie in der That die allein richtigen sind.«

Demgemäss enthalten die Versuchstabellen der beiden Beobachter nur procentale Angaben über die in vorigem Sinne verstandenen richtigen und falschen Fälle, ohne dass unentschiedene Fälle vorkommen.

Was die übrigen Tübinger Beobachter anlangt, so beruft sich Paulus (p. 3) hinsichtlich der Anstellungsweise der Versuche auf Kottenkamp und Ullrich, und Riecker auf die seiner Vorgänger überhaupt; beide aber, sowie auch Hartmann und Schimpf, unterscheiden ausser richtigen und falschen Fällen auch unentschiedene Fälle, ohne jedoch eine nähere Charakteristik derselben zu geben.

Was Camerer anlangt, so unterscheidet er bei den früheren, an der oberen Extremität mit stumpfen Spitzen angestellten, Versuchen richtige, falsche und (mit dem Ausdrucke wechselnd) unentschiedene oder unbestimmte Fälle, welche aber nur in fast verschwindender Zahl vorkommen, und, in so weit sie vorkommen, halb zu den richtigen, halb zu den falschen Fällen geschlagen sind. Ueber die nähere Charakteristik dieser verschiedenen Fälle finden sich in s. Abh. No. 1 p. 15f. und p. 17 Angaben, welche im Original nachzusehen sind. Da auf diese älteren Versuche hier nur beschränkte Rücksicht zu nehmen sein wird, so mag hier nur bemerkt werden, dass jedenfalls die Empfindung des Breiten, welche sich bei Kottenkamp und Ullrich von den richtigen Fällen ausgeschlossen findet, bei Camerer's älteren Versuchen denselben zugezählt wird, sofern sie doch den Eindruck einer einfachen Berührung nicht giebt, also richtig auf das Dasein von mehr als einer Spitze schliessen lässt. In der That hat sich Camerer nicht nur brieflich gegen mich hierüber erklärt, sondern es stimmt damit auch eine Angabe in der Darstellung seiner älteren Versuche (No. 1 p. 15. 17), wonach er die »nicht näher qualificirbare Empfindung, dass die Berührung nicht mit einer Nadelspitze, sondern mit etwas Breiterem erfolgt sei«, ausdrücklich unter den Fällen »richtigen Urtheils« mit subsumirt.

Bei den neuen, überall mit scharfen Spitzen angestellten Versuchen (No. 2) an Handgelenk und Stirn suchte Camerer dem Bedürfnisse einer weitergehenden Unterscheidung in der Art zu genügen, dass der Rechnung die Möglichkeit einer verschiedenen Verwerthung der Fälle geboten wird. Die hier vorkommenden Fälle werden von ihm unterschieden als Eindrücke von:

2 Spitzen — Mehr als 1 Spitze — Unbestimmt — Einfach; kurz als: 2 Sp., m., u., 1 Sp.

Zur näheren Charakterisirung dieser vier Fälle finden sich wieder eingehende Bemerkungen auf Grund der Angaben der Versuchspersonen

selbst, in No. 2 p. 282 f., woraus ich folgende Bestimmungen als die wesentlichsten entnehme.

2 Spitzen (2 Sp.). Darunter gehören 2 Fälle: »1) man fühlt 2 Spitzen mit deutlichem Abstande und mit der Möglichkeit, die Richtung des Eindrucks zu beurtheilen. 2) Man fühlt 2 Spitzen, aber unmittelbar neben einander, so dass weder eine Distanz noch die Richtung des Eindrucks zu erkennen ist.« — »Diese Empfindung wird zweifellos auch vom Vexirversuch zuweilen hervorgerufen.«

Mehr als 1 Spitze (m.). »Man hat das Gefühl, dass nicht mit 1 Spitze, sondern mit etwas Anderem berührt worden ist«, »wobei man häufig ganz sicher ist, dass das Urtheil 1 Spitze auszuschliessen ist«, und »geneigt sein kann die Empfindung als länglich oder breit zu bezeichnen, ohne jedoch damit sagen zu wollen, dass die Empfindung eben so sei, als wenn die Haut etwa mit einem Stäbchen berührt worden wäre«.

1 Spitze (1 Sp.). »Man hat das deutliche Gefühl einer Spitze.«

Unentschieden (u.). »Man will sich des Urtheils entschlagen, weil man aus irgend einem Grunde nicht mit sich ins Reine kommen kann«.

»Bei vielen einzelnen Berührungen ist man zwischen zwei benachbarten Fällen unsicher«.

Camerer schliesst diese Bemerkungen mit folgendem Satze:

»Man wird also der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man annimmt, das Urtheil 2 Sp. sei abgegeben worden, wenn die Versuchspersonen glaubten, ihrer Sache sicher zu sein; das Urtheil m, wenn überwiegende Wahrscheinlichkeit für Berührung mit 2 Sp. bestand; das Urtheil 1 Sp. bei Sicherheit oder überwiegender Wahrscheinlichkeit für eine Spitze.«

Wenn nun Camerer bei seinen früheren Versuchen, welche wie die seiner Vorgänger mit stumpfen Spitzen ausgeführt wurden, nicht auf eine so weit gehende Unterscheidung von Fällen als bei den neuen gekommen ist, so bemerkt er dazu (No. 1 p. 282): »es schien mir früher, als mit Stecknadelköpfen berührt wurde, misslich, bei dem Urtheil über die einzelne Berührung zwischen diesen 4 Fällen zu entscheiden, da die zu Grunde liegenden Empfindungen ohne scharfe Grenze in einander überzugehen scheinen«.

Sofern hienach der Eindruck scharfer und stumpfer Spitzen in betreffender Hinsicht nicht recht vergleichbar erscheint, dürfte auch kein reiner Vergleich zwischen den Bezeichnungen der Fälle bei den früheren, mit stumpfen Spitzen und neuen mit scharfen Spitzen angestellten Versuchen zu ziehen sein; doch möchte ich nach den vorliegenden Datis glauben, dass, wenn man einen Vergleich doch ziehen will, um eine Beziehung zwischen den früheren und neuen Versuchen Camerer's herzustellen, man durch die richtigen Fälle der früheren Versuche zugleich die ganze Anzahl der Fälle 2 Sp. und mehr als 1 Sp. gedeckt ansehen, und nur die Fälle 1 Sp. der neuen Versuche mit den falschen der früheren zu identificiren hätte. Dabei ist von den wenigen unbestimmten Versuchen der früheren wie neuen Versuche Camerer's, auf die nicht viel ankommt, abstrahirt, die für Rechnungszwecke bei den älteren Versuchen zwischen den richtigen und falschen, bei den neueren zwischen 2 Sp. und 1 Sp. zu theilen sein dürften.

Uebrigens wird nicht blos die Vergleichbarkeit der früheren und neueren Versuche Camerer's unter einander, sondern auch der Tübinger Versuche mit den Camerer'schen und zum Theil unter sich durch die Frage, inwiefern die Zwischenfälle dabei dieselbe Auffassung, Berücksichtigung und Verwerthung gefunden haben, in Frage gestellt, ein Uebelstand, den ich nicht zu heben weiss, der uns aber insofern hier nicht wesentlich berührt, als es uns hier überhaupt nicht auf den Massvergleich der Empfindlichkeiten verschiedener Hauttheile nach den bisherigen Beobachtern ankommt; sondern das Wesentliche für uns ist Folgendes.

Nach den Erörterungen eines späteren Abschnittes (VII) wird es, wie vielerlei Fälle auch unterschieden werden mögen, für Rechnungszwecke in jedem Falle nöthig sein, sie auf zweierlei, die man als reducirte r und z bezeichnen kann, durch angemessene Vertheilung der Zwischenfälle darauf zu reduciren. Da aber diese Vertheilung eine verschiedene sein kann, wird die Untersuchung selbst mit darauf zu gehen haben, welche von ihnen den Vorzug verdient, und sofern nach den neuen Versuchen Camerer's die Gleichtheilung der Fälle mehr als 1 Sp. so wie unbest. zwischen r und z sich nach Abschn. XVI im Ganzen als die vortheilhafteste im Sinne des S. 114 aufgestellten Princips erweist, wird man diess dahin auslegen können,

dass, wo überhaupt Zwischenfälle vorkommen, die nicht entschieden den Eindruck von 2 Spitzen oder blos von 1 Spitze machen, solche halb zu den *r*, halb zu den *z* zu schlagen sind, um damit reducirte Werthe *r* und *z* zu erhalten, die sich der Berechnung fügen. Eingehender hierüber im Abschn. VII.

V. Unwissentliches, halbwissentliches und wissentliches Verfahren.

Die Versuche können unwissentlich (U.), halbwissentlich oder wissentlich (W.) angestellt werden. Ganz unwissentlich sind solche, wo das Versuchssubject weder vor noch nach dem Versuche mit Aufsetzen der Spitzen erfährt, wie gross der Abstand der Spitzen ist, und ob die Berührung blos mit einer Spitze oder mit 2 Spitzen geschieht, halbwissentlich, wo das Versuchssubject nichts davon vor, noch während dem Versuche weiss, aber es nach dem Versuche erfährt; wissentlich, wo es schon vor dem Versuche und während desselben Kenntniss von den betreffenden Verhältnissen hat.

Natürlich muss bei dem unwissentlichen und halbwissentlichen Verfahren das Aufsetzen der Spitzen, statt vom Versuchssubject selbst, von einem Gehülfen geschehen. Es wird aus einem ganz unwissenlichen zu einem halbwissentlichen dadurch, dass, während das Versuchssubject während der Abgabe seines Urtheils selbst nicht weiss, ob 2 oder 1 Spitze aufgesetzt sind, ihm diess nachher vom Gehülfen mitgetheilt wird, um dem Versuchssubject selbst die Aufzeichnung des Resultates zu überlassen.

Versuche mit Aufsetzen zweier Spitzen heissen Hauptversuche, solche mit Aufsetzen blos einer Spitze Vexirversuche. Hauptversuche, zwischen welchen Vexirversuche, oder umgekehrt, eingeschaltet werden, heissen überhaupt gemischte, solche, wo keine eingeschaltet werden, ungemischte. Wenn bei einem Vexirversuche der falsche Eindruck erhalten wird, als gäbe es 2 Spitzen statt 1 Spitze, so heisst diess ein Vexirfehler.

Bei den unwissentlichen und halbwissentlichen Versuchen werden den Hauptversuchen insgemein Vexirversuche eingeschaltet, um das Versuchssubject immer in Ungewissheit zu erhalten, ob 1 oder

2 Spitzen aufgesetzt sind. Zwar giebt es in Camerer's älteren Versuchsreihen auch eine solche mit unwissentlichem Verfahren ohne Vexirversuche (No. 1 p. 22); hiebei aber konnte die Unwissenheit des Versuchssubjects über das Aufsetzen von 1 oder 2 Spitzen nur dadurch erhalten werden, dass diese Reihen unter andern mit unterliefen, wo Vexirversuche eingeschaltet waren, ohne dass das Versuchssubject wusste, welcher Art die Reihen waren. Abgesehen von dieser Ausnahme ist das unwissentliche und halbwissentliche Verfahren überall solidarisch mit Einschaltung von Vexirversuchen zwischen die Hauptversuche gewesen.

Die Wissentlichkeitsfrage überhaupt aber kommt dadurch in Rücksicht, dass man von der Kenntniss der Distanzverhältnisse einen Einfluss auf das Urtheil über diese Verhältnisse besorgen kann, was sich doch vielmehr auf die reine Aussage der Empfindung gründen soll; und es kann daher von vorn herein nur als eine gerechtfertigte Vorsicht erscheinen, wenn Vierordt in den Tübinger Versuchen und Camerer in seinen älteren Versuchen sich von vorn herein dem halbwissentlichen oder ganz unwissentlichen Verfahren zugewandt haben. In der That sind die Tübinger Versuche halbwissentlich, die älteren Camerer'schen ganz unwissentlich, beide (abgesehen von obbemerkter besonderer Reihe Camerer's) mit Vexirversuchen gemischt angestellt, und erst in seinen neuen Versuchen hat Camerer einen ausdrücklichen Vergleich zwischen dem Erfolge rein wissentlicher ungemischter und ganz unwissentlicher, theils gemischter, theils ungemischter Versuche angestellt.

Den Erfolg ganz unwissentlicher und halbwissentlicher Versuche nicht ohne Weiteres als gleich vorauszusetzen, kann man durch folgende Betrachtung veranlasst sein. Gesetzt, bei dem halbwissentlichen Verfahren ist ein Vexirversuch gemacht, und das Subject erfährt nach abgegebenem Urtheil, dass blos eine Spitze aufgesetzt war, so wird es einen Vergleichsmassstab dadurch für den folgenden Versuch gewinnen, je nachdem der Eindruck dem vorigen ähnlich oder nicht ähnlich erscheint, und wird sein Urtheil, ob einfach oder nicht einfach, dadurch in einer Weise mitbestimmen lassen können, die bei ganz unwissentlichem Verfahren nicht möglich ist. Jedoch liegt ein wirklich experimentaler Vergleich zwischen beiden nicht vor.

Der Grund aber, sich bei jener aprioristischen Voraussicht eines

Nachtheiles der vollen Wissentlichkeit nicht zu begnügen, vielmehr ausdrückliche vergleichende Versuche in Bezug darauf anzustellen, lag in Erwägungen und Thatsachen, die ich schon früher gelegentlich der Besprechung meiner Gewichtsversuche geltend gemacht (»Elem.« I. 118 ff., »Revis.« 58 ff.), und die sich ganz auf unser Versuchsfeld übertragen lassen. Wegen der Wichtigkeit der Frage wird hier darauf zurückzukommen sein.

Man besorgt wie gesagt, dass durch das Wissen, ob 1 Spitze oder 2 Spitzen aufgesetzt sind, das Urtheil im Sinne dieses Wissens bestimmt und abgegeben werden könne, auch wenn ohne dieses Wissen nach dem reinen Eindrucke der Empfindung ein anderes Urtheil gefällt worden wäre; wonach durch das Nichtwissen die erforderliche Unbefangenheit erhalten werde. Nun weiss man aber auch, dass factisch der Eindruck von zwei Spitzen als einfach erscheinen kann, und dass die Absicht der Versuche selbst ist, die Fälle unterscheiden und zählen zu lassen, wo der von zwei Spitzen gemachte Eindruck einfach oder nicht einfach erscheint; ohne im einzelnen Falle voraussetzen zu können, welcher von beiden Fällen eintreten wird. Dieses Nichtwissen ersetzt meines Erachtens das Nichtwissen über das Aufsetzen von 1 oder 2 Spitzen, indem es den Erfolg hat, dass sich nun die Aufmerksamkeit ausdrücklich auf den sinnlichen Eindruck mit dem Streben concentrirt, dessen Beschaffenheit rein aufzufassen. Jedenfalls habe ich selbst bei meinen wissentlichen Gewichtsversuchen das entschiedene Gefühl hievon gehabt, und meine sogar, dass man wissentlich viel unbefangener über die Beschaffenheit des sinnlichen Eindrucks urtheilt, und der Einbildung die Möglichkeit, sich mit einzumischen, viel mehr erschwert, als wenn jeder Versuch sich mit der Frage complicirt, ob es nicht ein Vexirversuch sei.

Auch stimmt hiermit ganz überein, was Camerer selbst (No. 1 288) bezüglich der Anstellung der wissentlichen Handgelenkversuche äussert: »Alle Versuchspersonen — sagt er — sagen aus, dass das wissentliche Verfahren das weniger anstrengende ist, dass man sich unbefangener dem Gefühlseindruck überlassen kann, wenn man nicht durch die Angst vor möglichen Vexirfehlern gestört wird. Geübten Personen kommt es nicht vor, dass sie sich von der Kenntniss des Nadelabstandes, selbst wenn ein solcher vorhanden ist, leiten lassen,

offenbar, weil sie die Erfahrung gemacht haben, dass die jeweilige Empfindung bei den einzelnen Berührungen von vielen unbekannten Nebenbedingungen mit abhängt.«

Endlich trifft hiemit zusammen, was Volkmann gelegentlich seiner Versuche über den Einfluss der Uebung auf die Tastempfindlichkeit äussert*). Diese Versuche wurden nach Weber's bekannter Methode nur mit der Abänderung angestellt, dass sie wissentlich, während Weber's Versuche unwissentlich geschahen. In Bezug darauf sagt nun Volkmann:

»Es lässt sich nicht leugnen, dass die Auslegung unserer Gefühle durch eine schon vorläufig erworbene Kenntniss des Tastobjectes sehr erleichtert wird; auch glaubt man bisweilen Verhältnisse durch das Getast zu erkennen, welche man ohne jene im Voraus erworbene Bekanntschaft mit dem Dinge unfehlbar nicht erkannt haben würde. Gleichwohl kann man bei hinreichender Aufmerksamkeit, besonders nach einiger Uebung, die reine Empfindung von dem, was man anderweitig weiss, allerdings sondern. Dass uns diese Sonderung wirklich gelungen, ergiebt sich unmittelbar aus dem Verlaufe unserer Beobachtungsreihen, zunächst schon daraus, dass wir den Zirkel, obwohl wir sein Offenstehen in allen Fällen kannten, doch häufig dem Gefühl nach für geschlossen erklärten. Wir empfanden im Widerspruch mit dem, was der Augenschein lehrte, nur eine Spitze, wenn die Distanz beider zu gering war, und wir gelangten beim Notiren der kleinsten Distanzen, welche an verschiedenen Puncten des Hautorganes noch wahrnehmbar sind, zu Werthen, die denen Weber's sehr nahe stehen.«

Abgesehen von den directen Aussagen der Empfindung stützte ich bei den Gewichtsversuchen die Rechtfertigung des wissentlichen Verfahrens theils auf die gesetzlichen Verhältnisse, die sich mittelst desselben erhalten liessen, theils auf die grossen äusseren Vortheile, welche ein System wissentlicher Versuche vor einem System unwissentlicher voraus hat, sofern es einen Gehülfen erspart, und die Versuche ohne Schwierigkeit systematisch anordnen lässt, was bei unwissentlichen jedenfalls schwer zu erzielen ist, sofern durch Einhalten eines Systems die Kenntniss von den angewandten Versuchs-

*) Berichte der k. sächs. Ges. 1858. Febr. 11.

verhältnissen sich leicht von selbst macht, auch wenn das Versuchssubject sich nicht durch den Augenschein davon überzeugen kann. Inzwischen nach all' dem lagen weder bei meinen Gewichtsversuchen noch Volkmann's Tastversuchen directe vergleichende Versuche zwischen wissentlichem und unwissentlichem Verfahren vor; und es ist daher ein besonderes Verdienst der neuen Camerer-schen Versuche, dass sie auf solche mit eingegangen sind. Ihre Resultate aber überwiegen im Ganzen zu Gunsten des wissentlichen Verfahrens, worauf im XVI. Abschnitt näher eingegangen wird.

VI. Vexirversuche und Vexirfehler. Aufsteigende und absteigende Versuche. Contrastverhältnisse.

Die im vorigen Abschnitte obenhin besprochenen Vexirversuche, d. i. mit Aufsetzen blos einer Spitze, treten mit den Hauptversuchen, wo zwei Spitzen aufgesetzt werden, dadurch unter einen gemeinsamen Gesichtspunct, dass sie einen besonderen Fall der möglichen Werthe von *D* überhaupt, nämlich den Nullwerth oder untern Grenzwerth der *D* darstellen, was insofern Beachtung verdient, als eine Formel für die Tastversuche, welche allgemeine Gültigkeit für alle *D*'s beansprucht, auch die Erfolge der Vexirversuche und darunter die Vexirfehler decken muss. Zunächst aber besprechen wir rücksichtslos darauf die Verhältnisse der Vexirversuche und Vexirfehler, wie sie nach den bisherigen Versuchen vorliegen.

Von den Tübinger Beobachtern sind die Vexirversuche, wie es scheint, ohne bestimmte Regel nach Zahl und Ordnung den Hauptversuchen eingeschaltet worden, wenigstens findet sich bei ihnen keine Angabe über die Einhaltung einer solchen. Es schien früherhin nichts darauf anzukommen. Eben so wenig findet sich von ihnen bemerkt, ob sie ordnungsmässig mit Aufsteigen und Absteigen der *D*'s auf demselben Hauttheil gewechselt haben; es wird sich aber zeigen, dass beide Puncte einen sachlichen Bezug zu einander haben*). Hiegegen hat Camerer bei den Versuchen, die überhaupt

*) Sollten die Tübinger Versuche sich bei jedem Beobachter so langsam gefolgt sein, um als unabhängig von einander zu gelten, so würde nach den folgenden Betrachtungen weder in erster noch in zweiter Hinsicht auf die Einhaltung

mit Vexirversuchen gemischt waren, allen Hauptversuchen immer die gleiche procentale Zahl von Vexirversuchen eingeschaltet, wobei sich gezeigt hat, dass ein grosser Unterschied im Erfolge stattfindet, je nachdem die Versuche, Hauptversuche wie Vexirversuche, sich rasch genug folgen, dass die früheren Versuche einen Einfluss auf die späteren gewinnen können, was von den ältern Versuchen Camerer's gilt, oder so langsam (in Pausen von 5 Minuten bei no. 2, ½ Stunde bei no. 1), dass ein solcher Einfluss wegfällt, was von den neuen Versuchen gilt. Auch hat Camerer regelmässig mit Aufsteigen und Absteigen gewechselt. Hiernach lassen sich aus seinen Versuchen bestimmtere Schlüsse über die hier in Frage kommenden Verhältnisse ziehen, als aus den Tübinger Versuchen.

Aus den älteren (unwissentlichen) Versuchen Camerer's mit verhältnissmässig rascher Folge nun haben sich folgende drei bemerkenswerthe Thatsachen herausgestellt.

1) Nach Massgabe als das D zunimmt, mit welchem die Hauptversuche angestellt werden, nimmt die relative Zahl der Vexirfehler bezüglich der eingeschalteten Zahl der Vexirversuche ab, und sofern diese immer den gleichen Procentsatz der Hauptversuche bilden, nimmt sie auch bezüglich der Zahl der Hauptversuche ab.

2) Die Hauptversuche mit Einschaltung von Vexirversuchen geben für dieselben D's grössere $r\,\%$ als ohne Einschaltung von solchen.

3) Vergleicht man die $r\,\%$, welche für dieselben D's auf einem gegebenen Hauttheile bei Aufsteigen und Absteigen mit den D's erhalten werden, so zeigen sie sich abgesehen von den kleinsten D's am Anfange der aufsteigenden Reihe und grössten D's am Anfange der absteigenden, in den aufsteigenden Reihen grösser als in den absteigenden; bei den kleinsten und grössten D's ist der Unterschied weniger constant in der Richtung.

Die Unterschiede sind nach allen drei Beziehungen gar nicht unbeträchtlich, wie unten zu belegen.

Kurz, es zeigt sich, dass die Combinationsweise von Vexirversuchen mit den Hauptversuchen und der Hauptversuche unter

einer bestimmten Regel etwas ankommen; aber wenn schon sie sich langsamer als die ältern Camerer'schen Versuchen gefolgt sein mögen, so doch nach den Erörterungen in Abschnitt VIII gewiss nicht so langsam, um eine Abhängigkeit von einander ganz auszuschliessen.

einander bei rascher Folge der Versuche einen entschiedenen Einfluss auf die Resultate hat; wonach Versuchsreihen, die nicht in diesen Beziehungen dieselben Regeln befolgen oder überhaupt keine Regeln befolgen, nicht streng mit einander vergleichbar sein können; es wäre denn, dass sie so langsam auf einander folgten, um als unabhängig von einander gelten zu können.

Ueberblickt man nun die obigen drei Puncte, so kann man nicht in Zweifel sein, dass dasselbe Contrastgesetz, was sich überall sonst zeigt, auch in unserem Versuchsfelde seine gewohnte Rolle spielt, und dadurch die grössere oder geringere Leichtigkeit, Vexirfehler zu begehen, begründet. Nämlich:

Das Grosse erscheint um so grösser, einem je Kleineren es gegenübertritt; das Kleine um so kleiner, einem je Grösseren es gegenübertritt. Das Kleinste aber, was einer Distanz von gegebener Grösse gegenübertreten kann, ist eine Distanz gleich Null, wie solche beim Vexirversuch angewendet wird. Zwar könnte man sagen, ein Nichts kann nichts, also auch keinen Contrast wirken. Aber die einfache Berührung, welche das $D = 0$ giebt, kann durch die Empfindung oder Vorstellung, dass es eben eine einfache Berührung, die untere Grenze einer Distanz sei, allerdings etwas wirken, und ist insofern keineswegs mit Wegfall einer Berührung überhaupt zu identificiren, die allerdings keinen Contrast hervorrufen kann. Hiernach:

1) Je grösser die Distanz D wird, bei welcher Vexirversuche eingeschaltet werden, desto schwerer findet es die Nulldistanz, im Contrast gegen das Grosse sich für die Empfindung oder Vorstellung zur Erscheinung einer Distanz auszudehnen, daher die Vexirfehler mit der Grösse des D abnehmen.

2) Wenn Nulldistanzen in Hauptdistanzen eingeschaltet werden, trägt der Contrast damit bei, das gegebene D vergrössert erscheinen zu lassen, und hiermit ein grösseres $r\%$ herbeizuführen.

3) Bei der aufsteigenden Reihe wird jedes D durch den Contrast mit dem vorhergehenden kleinen D vergrössert, bei absteigender durch den Contrast mit dem vorhergehenden kleineren verkleinert. Da aber das kleinste D bei Aufsteigen, das grösste D bei Absteigen nichts hinter sich hat, womit es contrastirte, so leidet die vorige Regel dabei Ausnahmen.

Folgendes die Belege zu obigen Sätzen:

ad 1) Hier folgt nach den Tabellen der älteren Camerer'schen Versuche (No. 1 p. 5 ff.) für drei Hauttheile, womit sich die übrigen entsprechend verhalten, die Zahl der Vexirfehler, welche unter je 100 Vexirversuchen vorkamen, je nachdem die Vexirversuche bei folgenden *D*'s eingeschaltet wurden. Die Ergebnisse sind Durchschnittswerthe der sechs oder acht Beobachtungsreihen, welche an den betreffenden Hautstellen von jedem der beiden Versuchssubjecte, Hedwig (H) und Ida (I) angestellt wurden.

Procentzahlen der Vexirfehler für gegebene *D*'s.

Fingerspitze			1 Phalanx			Acromion		
D	H	I	*D*	H	I	*D*	H	I
1	8,5	7,0	2	7,17	9,0	14	12,57	9,43
1,5	4,5	3,5	3	4,33	7,43	17	9,63	8,5
2	2,33	2,17	4	2,17	5,33	20	8,25	8,61
2,5	1	1	5	0,67	2,0	23	5,25	6,0
			7	0,33	2,0	25	3,88	5,38
						30	4,5	3,38

ad 2) Es folgen die r% für Hedwig und Ida für vier Hauttheile mit und ohne Vexirversuche (unwissentlich) nach einer mir vom Verf. privatim mitgetheilten Tabelle, von welcher sich die in der Abhandlung des Verfassers No. 1 p. 22, gegebene blos durch Abrundung in Decimalen unterscheidet. Jede Zahl ist aus 150 Versuchen berechnet.

Werthe r%.

	D	mit Vexirversuchen							ohne Vexirversuche						
		11	14	17	20	23	26	30	11	14	17	20	23	26	30
								Hedwig							
1876	Acromion	—	66,6	67,3	82	92,6	97,3	98	—	53,3	63,3	66	74	85,3	94
1876	Oberarm	50,6	58,6	86,6	92,6	96,6	98,6	—	37,3	52	65,3	89,3	90	92,6	—
1876	Ellbogen	45,3	59,3	75,3	81,3	90	93,3	—	40,6	54,6	72	88	90,6	92	—
1876	Vorderarm	40,6	56,6	80	91,3	96	98,6	—	37,3	60,6	75,3	91,3	96	94,6	—

D		mit Vexirversuchen							ohne Vexirversuche						
		11	14	17	20	23	26	30	11	14	17	20	23	26	30
1880	Acromion	—	60,6	79,3	89,3	94	92,6	99	—	58,6	74	82,6	93,3	98,6	98
	Oberarm	62,6	90,6	96,6	98	99,3	—	—	60,6	83,3	94	98	99,3	—	—
	Ellbogen	54	76,6	94	97,3	99,3	—	—	53,3	74	94	96,6	99,3	—	—
	Vorderarm	58	82,6	94,6	98,6	100	—	—	62	76	92,6	98	100	—	—
								Ida							
1876	Acromion	—	10,6	22,6	46,6	60	76	95,3	—	8	25,3	46	55,3	75,3	95,3
	Oberarm	12	32,6	60,6	85,3	94	99,3	—	7,3	32,6	52,6	63,3	84,6	92	—
	Ellbogen	15,3	24,6	67,3	86	90,6	98	—	5,3	33,3	54	75,3	82	86,6	—
	Vorderarm	12,6	25,3	56	82,6	89,3	99,3	—	3,2	14,6	40	72,6	83,3	91,3	—
1880	Acromion	—	55,3	70	80,6	88,6	96,6	100	—	56	60,6	71,3	80,6	92	9,8
	Oberarm	70	79,3	92,0	98,6	100	—	—	64,6	70	82,6	95,3	100	—	—
	Ellbogen	40,6	66,6	80,6	91,3	99,3	100	—	54,6	62	74	88	99,3	97,3	—
	Vorderarm	72	88,6	92,6	98,6	—	—	—	58	68,6	79,3	87,3	98	—	—

ad 3) Eine mir von Camerer manuscriptlich mitgetheilte Tabelle giebt für jeden Hauttheil, bei H und I, je zwei Beispiele, resp. für 1876 und 1880, über den Vergleich der r% zwischen aufsteigenden Reihen ↑ und absteigenden Reihen ↓, woraus folgende Data für 1876 entlehnt sind, womit die übrigen sich ganz ähnlich verhalten.

Werthe r%.

D	Hedwig		Ida		D	Hedwig		Ida	
	↑	↓	↑	↓		↑	↓	↑	↓
	Fingerspitze					1 Phalanx			
1	48	49	3	18	2	25	24	5	18
1,5	90	79	57	50	3	51	43	44	44
2	100	97	90	88	4	72	65	71	59
2,5	100	100	97	100	5	96	98	91	82
					7	100	100	98	100
	Vorderarm					Acromion			
11	36	34	22	36	14	42	42	18	38
14	52	52	54	60	17	64	62	56	56
17	80	66	90	78	20	72	74	76	68
20	94	84	90	88	23	88	86	84	76
23	94	94	94	96	26	98	94	86	82
26	96	98	96	98	100	—	—	100	92

Unter 16 Beispielen bei acht verschiedenen Hauttheilen 1876 und 1880 war $r\%$ bei

H	dem kleinsten D	6	mal grösser bei	$\underset{\downarrow}{V}$	als bei	$\overset{\uparrow}{H}$,	8	mal umgek.,	2 mal gleich
I	- - D	13	- - -	$\underset{\downarrow}{V}$	- -	$\overset{\uparrow}{H}$,	2	- - ,	1 - -
H	- grössten D	5	- - -	$\underset{\downarrow}{V}$	- -	$\overset{\uparrow}{H}$,	3	- - ,	8 - -
I	- - D	10	- - -	$\underset{\downarrow}{V}$	- -	$\overset{\uparrow}{H}$,	4	- - ,	2 - -

Es ist nun von grossem Interesse, mit den Ergebnissen der vorstehenden älteren Versuche, welche rasch hinter einander folgten, die der neueren zu vergleichen, wo jeder Versuch, Vexirversuch wie Hauptversuch, bei derselben Versuchsperson in der ersten Abtheilung (no. 1) der Handgelenkversuche um ½ Stunde, in der zweiten (no. 2) um 5 Minuten vom nächsten Versuche abstand, indem beidesfalls der Einfluss des Contrastes fehlte. Diese neuen Versuche waren eben so unwissentlich als die frühern, theils gemischt, theils ungemischt, angestellt. Bei den gemischten wurden in den angegebenen Zeitabständen während jedes Tages vier bis fünf Vexirversuche zwischen je neun Hauptversuchen an jeder Versuchsperson angestellt, bei den ungemischten entweder nur Vexirversuche oder nur Hauptversuche (je 12 bis 14) mit einem und demselben D. Dabei zeigte sich, dass die Zahl der Vexirfehler merklich dieselbe in den gemischten und den ungemischten Versuchen blieb und keine bestimmte Abhängigkeit von der Grösse der D, wozwischen die Einschaltung geschahe, verrieth, indess aber die Zahl der Vexirfehler überhaupt erheblich grösser war, als bei den früheren sich rascher folgenden Versuchen; was sich so verstehen lässt, dass bei den früheren Versuchen die Nulldistanz durch ihren Contrast gegen die grösseren Distanzen zwar nicht noch unter Null verkleinert erscheinen, wohl aber verhindert werden konnte, eben so oft vergrössert zu erscheinen, als bei den neuen Versuchen, wo der zur Verkleinerung stimmende Contrast wegfiel.

Mit vorigen, die Vexirfehler betreffenden, Verhältnissen traf bei den neuen Versuchen zusammen, dass auch die $r\%$ in den gemischten Versuchen nicht zahlreicher ausfielen, als in den ungemischten, ein Einfluss der Einmischung der Vexirversuche auf die Hauptversuche also wegfiel.

Es würde ziemlich umständlich sein, die vorigen Ergebnisse der neuen Versuche Camerer's nach allen Beziehungen zu specificiren

Wesentlich sind sie in den Tabellen von No. 2 p. 287 und 292 respective für die Handgelenkreihen no. 1 und 2 enthalten; worauf hier Kürze halber verwiesen werden möge.

Alle vorigen Ergebnisse der älteren wie neueren Versuche sind bei unwissentlichem Verfahren erhalten; es fragt sich noch, wie sie sich bei wissentlichem Verfahren stellen. Aber ehe wir hierauf kommen, erheben wir erst noch eine fundamentale Frage.

Mit allem Vorigen ist die Entstehung der Vexirfehler an sich selbst noch nicht aufgeklärt. Es erklärt sich nämlich durch den Contrast wohl, dass sie bei rasch hinter einander folgenden Versuchen häufiger zwischen kleinen als grossen *D*'s erscheinen; aber warum erscheinen sie überhaupt bei Einschaltung in Hauptversuche mit irgend welchem *D*? Da Null *D* gegen jedes endliche *D* durch den Contrast, statt vergrössert, verkleinert erscheinen müsste, wenn etwas überhaupt kleiner als Null erscheinen könnte, so fragt sich, warum doch in gar nicht seltenen Fällen Null *D* bei Einschaltung zwischen Hauptversuchen mit *D* vergrössert erscheint, d. h. einen Vexirfehler giebt. Um so weniger kann der Contrast die Entstehung der Vexirfehler an sich selbst vermitteln, als, wie oben bemerkt, bei wegfallendem Contrast (durch vergrösserte Zwischenzeiten zwischen den Versuchen) die Vexirfehler nicht nur nicht schwinden, sondern häufiger werden; dabei immer Unwissentlichkeit vorausgesetzt.

Es muss also ein, abgesehen von Contrastverhältnissen vorhandener, Anlass sein, welcher eine einfache Berührung mitunter als eine breite oder gar doppelte, als m. oder gar 2 Sp. in Camerer's Sinne, erscheinen lässt, hiermit einen scheinbar richtigen Fall, d. i. Vexirfehler, giebt.

Da der Verdacht nahe lag, dass die bei den Tübinger und älteren Camerer'schen Versuchen allgemein angewandten stumpfen Spitzen, Stecknadelkuppen oder Spitzen von Straminnadeln, leicht Anlass geben könnten, eine einfache Berührung ausgedehnt oder doppelt finden zu lassen, so lag hierin der Hauptgrund, bei den neuen Versuchen scharfe Spitzen anzuwenden; aber nach wie vor traten dabei Vexirfehler auf. Der Grund musste also anderswo liegen.

Nun liess sich noch an andere äussere Bedingungen denken, wovon die Vexirfehler abzuleiten, als wie ungleichförmiges Aufdrücken der Nadel, schiefes Aufsetzen derselben u. dgl., und mög-

lich, dass solche Bedingungen unter Umständen wirklich dazu beitragen; ja Camerer selbst ist früher geneigt gewesen, den ganzen Ursprung der Vexirfehler in solchen zu suchen. Nachdem er jedoch gefunden, dass der Vexirversuch nicht blos zum Urtheil »*m*« führen, sondern sogar deutlich den Eindruck der Doppelberührung (2 Sp.) machen könne, diess aber von äusseren Bedingungen jener Art nicht wohl anzunehmen sei, ist er vielmehr zu der Ansicht gekommen (No. 2 p. 300), »dass der Vexirfehler zum Theil von inneren Ursachen herrührt — wie man ja auch auf anderen Sinnesgebieten Erfahrungen darüber hat, dass die gespannte Erwartung auf das Eintreten einer Empfindung zu sog. Sinnestäuschungen Veranlassung giebt.«

Diese Ansicht scheint mir selbst am Meisten für sich zu haben, und mit Rücksicht darauf sind die folgenden thatsächlichen Verhältnisse besprochen.

Man rufe sich nochmals zurück, dass die älteren Versuche mit Contrast wie neuen Versuche ohne Contrast, bei welchen beiderseits die Vexirfehler verhältnissmässig häufig aufgetreten sind, alle zu den unwissentlichen gehören. Sehr anders aber verhalten sich die Erfolge, wenn man die Vexirversuche bei so grossen Zwischenzeiten der Versuche, dass der Contrast wegfällt, wissentlich vornimmt, indem dann die Vexirfehler entweder ganz fehlen, oder nur sehr sparsam und unsicher auftreten, was eine doppelte Erklärung zulässt.

Einmal kann man annehmen, dass, da man beim wissentlichen Verfahren weiss, dass bloss mit einer Spitze berührt wird, der immer thätigen Einbildungskraft dadurch verwehrt wird, den Eindruck von mehr als einer Spitze darin zu finden, auch wenn ohne dieses Wissen wirklich die Spitze den Eindruck von mehr als einer Spitze gemacht hätte.

Zweitens aber, da man bei dem unwissentlichen Verfahren stets in factischer Ungewissheit bleibt, ob mit einer oder zwei Spitzen berührt wird, zugleich aber weiss, dass wegen mit unterlaufender Hauptversuche mitunter der Eindruck von zwei Spitzen oder mehr als einer Spitze (in Camerer's Sinne) erhalten werden sollte, und da man die Aufmerksamkeit auf das Eintreten solcher Fälle spannt, lässt sich denken, dass der mit dieser Spannung behaftete Gedanke der Möglichkeit, es könne auch mit zwei Spitzen statt einer Spitze

berührt worden sein, mehrfach den Ausschlag für die Einbildung in ersterem Sinne giebt, wo doch nur mit einer Spitze berührt worden ist*).

Beide Erklärungen nehmen die Einbildung oder Phantasie nur in verschiedenem Sinne zu Hülfe, und es möchte wohl schwer sein, bis auf Weiteres ganz sicher zu entscheiden, welche von beiden die richtigere ist, und ob sich nicht beide compliciren. Ich selbst bin mit Camerer geneigt, der zweiten Erklärung den Vorzug zu geben.

Nach Vorigem kann es nicht unerwartet sein, wenn sich ein Unterschied im Erfolge wissentlich angestellter Vexirversuche zeigt, je nachdem sie innerhalb eines Systems von Versuchen, in welches Hauptversuche mit Distanzen eingehen, angestellt werden oder ausserhalb eines solchen Systems ganz für sich, auch wenn erstenfalls der Contrast der Nulldistanzen mit den Distanzen der Hauptversuche durch hinreichende Zwischenzeiten eben so ausgeschlossen ist, als er zweitenfalls von selbst wegfällt, weil man überhaupt blos Berührungen mit einer Spitze vornimmt. Denn die Einbildungskraft ist erstenfalls bei der Gewöhnung, bald den Eindruck von zwei Spitzen, bald von einer Spitze zu erhalten, doch anders prädisponirt als zweitenfalls. Wenigstens bin ich geneigt, mir so den Unterschied zwischen dem Erfolge eigener wissentlicher Vexirversuche, die unter den zweiten Fall treten, von den Camerer'schen Versuchen, die unter den ersten treten, zu erklären.

Ich selbst nämlich, mich blos auf Verxirversuche beschränkend, finde Folgendes. Wenn ich wissentlich die verschiedensten Theile der Haut mit einer scharfen Spitze, sei es leise oder fast bis zum Stechen berühre und die Aufmerksamkeit möglichst concentrirt auf die sinnliche Empfindung, die mir dadurch erweckt wird, richte, mit der ausdrücklichen Frage, ob mir der Eindruck nicht vielmehr breit oder doppelt als einfach erscheint, kann ich ersteres doch

*) Man erinnere sich hierbei an die in meinen »Elem. II« 486 erwähnten Versuche von Meyer. »Auf der Haut — sagt er — gelingt es mir leicht, an welcher Stelle ich will, subjective Empfindungen [als wie Wärme, Kälte, Druck, durch angespannte Vorstellung derselben] hervorzubringen. . . . Die Empfindungen können so lebhaft werden, dass ich, ich mag wollen oder nicht, mit der Hand über die Hautstelle hinstreichen muss, wie man es in Fällen örtlicher Hautempfindungen zu thun pflegt.«

nie finden, kurz kann es bei wissentlichen Vexirversuchen an mir selbst nie zu einem Vexirfehler bringen; ja der Eindruck von einer Spitze ist so entschieden und gleichförmig bei öfterster Wiederholung an verschiedenen Theilen, dass ich nicht glauben kann, mitunter mir blos einzubilden, dass ich nur eine Spitze empfinde, weil ich weiss, dass es eine Spitze ist, indess ich, ohne es zu wissen, mitunter von der einen Spitze den Eindruck zweier Spitzen gehabt haben würde.

Anders aber hat es Camerer bei den wissentlichen Vexirversuchen im Laufe und Zusammenhange seiner neuen contrastfreien Versuchsreihen an Handgelenk und Stirn gefunden, indem die Vexirfehler dabei zwar ohne Vergleich sparsamer als bei den unwissentlichen Versuchen vorkamen, aber doch keineswegs fehlten, in welcher Hinsicht er sich (No. 2 p. 297) wie folgt äussert: »Es ist endlich noch zu berichten über Versuche mit der Vexirnadel bei wissentlichem Verfahren. Den Versuchspersonen war aufgetragen, das Urtheil »2 Sp.« und »m.« abzugeben, wenn eine derartige Empfindung erzeugt wurde, dass sie nach ihrem Dafürhalten bei unwissentlichem Verfahren das entsprechende Urtheil abgegeben hätten. Es wurde an einem Versuchstage am Handgelenk (mit halbstündigen Pausen und allen fünf Beobachtern), und an fünf Versuchstagen an der Stirn (mit Pausen von fünf Minuten und vier Beobachtern) experimentirt. Sämmtliche Beobachter gaben sowohl das Urtheil »2 Sp.«, als auch das Urtheil »m.« ab. Im Ganzen erhielt man bei 301 Berührungen in Procentwerthen

2 Sp.	m.	1 Sp.
2,66	8,30	89,04 .

Da die Sonderung dieser Data für Handgelenk und Stirn sich später nöthig machen wird, gebe ich sie wie folgt nach privaten Mittheilungen seitens Camerer. Er schreibt mir (17. März 1882) bezüglich der im Zusammenhange der neuen Handgelenkversuche no. 1 angestellten wissentlichen Vexirversuche*):

»Die Zahl der Vexirversuche beträgt für jede Person 17, mit halbstündigem Abstand der einzelnen Versuche.

Es sagten unter den 17 Fällen

*) Für no. 2 liegen keine solchen vor.

I. Einmal 2 Spitzen.
II. Einmal 2 Spitzen (eine Spitze stärker als die andere).
Einmal mehr als eine Spitze.
III. Zweimal zwei Spitzen (einmal eine Spitze stärker, einmal eine Spitze später als die andere).
Zweimal mehr als eine Spitze.
IV. Einmal mehr als eine Spitze.
V. Einmal mehr als eine Spitze.

Diese Entscheidungen schienen mir aber doch ziemlich willkührlich, desshalb habe ich die Versuche zunächst aufgegeben.«

Die vorigen Entscheidungen unter den $5 \cdot 17 = 85$ Handgelenkversuchen werden von Camerer als viermal zwei Spitzen, fünfmal mehr als eine Spitze, zweimal eine Spitze gerechnet, d. i. procental

	2 Sp.	m.	1 Sp.
wissentlich	4,72	5,88	89,40;

wogegen die später doch vorgenommenen Stirnversuche im Mittel der vier dabei betheiligten Beobachter unter $4 \times 54 = 216$ Vexirversuchen procental ergaben:

	2 Sp.	m.	1 Sp.
wissentlich	1,85	9,26	88,89.

Um mit vorigen wissentlich erhaltenen Resultaten am Handgelenk mit halbstündigen Zwischenzeiten (no. 1) die unwissentlich daran erhaltenen zu vergleichen, so gaben a) 400 ungemischte Vexirversuche in Summa für die vier Beobachter I bis IV; b) eben so viel mit Hauptversuchen von 1 bis 5 mm gemischte in Summa für dieselben vier Beobachter, c) 200 gemischte für den Beobachter V (d. i. Camerer selbst) insbesondere folgende mittlere procentale Ergebnisse:

		2 Sp.	m.	u.	1 Sp.
unwissentlich	a)	30,75	8	2,75	58,50
	b)	29,25	9	2,5	59,25
	c)	16,5	17	1,5	65

Die merkliche Uebereinstimmung von a) und b) hierbei ist ein Beleg für die früher (S. 134) gemachte Bemerkung, dass bei contrastfreien Versuchen, wie es die hier in Betracht gezogenen sind, hinsichtlich der Häufigkeit der Vexirfehler nichts darauf ankommt, ob

die Versuche gemischt oder ungemischt sind. Der Beobachter V weicht zwar im absoluten Resultate von den andern ab, die nicht sehr stark um ihr Mittel schwanken; immer aber bleibt es für ihn unwissentlich viel grösser als wissentlich. Zieht man aus a), b), c) das Mittel mit der Gewichtsrücksicht, dass zu c) nur ein Beobachter, zu a) und b) je vier beigetragen haben, so hat man für No. 1 procental:

	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.
unwissentlich	28,5	9,5	2,5	59,5

abgeleitet aus 1000 Vexirversuchen, je 200 für jeden Beobachter.

Die mit den obigen wissentlichen procentalen Resultaten an der Stirn no. 3 zu vergleichenden unwissentlichen sind im Mittel der vier Beobachter (nach No. 2. Tab. X. p. 298)

	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.
unwissentlich	9,5	6,1	0,2	84,2

abgeleitet aus 1000 Vexirversuchen im Ganzen, 250 für jeden Beobachter.

Müller hat in seiner Abhandlung die Erscheinung der Vexirfehler aus einem wesentlich anderen Gesichtspuncte, als hier geschehen, betrachtet, indem er sie als ein Irradiationsphänomen glaubt fassen zu können. Die Schwierigkeit, dass trotz der thatsächlich einfachen Berührung beim Vexirversuch zuweilen der Eindruck einer Doppelberührung entsteht, »löst sich [nämlich nach ihm] leicht auf, wenn wir bedenken, dass die Wirkungen jeder Berührung eines Hautpunctes sich in Folge einer äusseren peripherischen und einer inneren, im Nervensystem vor sich gehenden, Irradiation über einen grösseren, mehr oder weniger einem Kreise ähnlichen, Hautbezirk erstrecken. Ist der grösste Abstand zweier in Folge dieser Irradiation noch hinlänglich erregter Puncte des Irradiationskreises $= d$, so verhält es sich also bei Berührung nur eines einzigen Hautpunctes thatsächlich so, als würde bei mangelnder Irradiation der Berührungswirkungen die betreffende Hautgegend an zwei verschiedenen, und von einander abstehenden, Puncten berührt.«

Nun standen Müller bei Aufstellung dieser Ansicht erst blos die Tübinger Beobachtungen zu Gebote; und der Contrasteinfluss auf die Erscheinung der Vexirfehler, der sich erst mit Camerer's

Versuchen ergeben hat, konnte daher bei seiner Ansicht noch nicht berücksichtigt werden; würde derselben aber an sich noch nicht widersprechen. Inzwischen könnte durch die von Müller angenommene Irradiation doch nicht der Eindruck von zwei Spitzen im Sinne von Camerer (nach dessen Erklärung S. 136), wie er mitunter als Vexirfehler vorkommt, sondern nur ein sich von einem Centrum aus verlaufender Eindruck entstehen; und der grosse Unterschied zwischen der Häufigkeit der Vexirfehler bei contrastfreien Versuchen, je nachdem sie wissentlich oder unwissentlich angestellt sind, eben so wenig seine Erklärung dadurch finden.

Ueberhaupt aber glaube ich, bei der precären Beschaffenheit der Unterlagen, welche Müller zur Ziehung seiner Schlüsse über die Vexirfehler zu Gebote standen, von seinen weiteren Bemerkungen über dieselben abstrahiren zu können.

VII. Beziehung des allgemeinen Massprincipes der Empfindlichkeit auf unsere Versuche, und Reduction der Fälle, um sie der Anwendung des Principes zugänglich zu machen.

Nach dem allgemeinen Massprincip der Empfindlichkeit, wie es in meinen »Elem.« besprochen ist, werden wir die extensive Empfindlichkeit eines Hauttheiles für doppelt so gross zu nehmen haben, wenn eine halb so grosse Distanz hinreicht, die Empfindung gleichstark zu afficiren, unseren Falls also ein gleiches Verhältniss richtiger zu den falschen Fällen, oder, was damit zusammenhängt, zur Gesammtheit der Fälle zu erzeugen*), vorausgesetzt, dass wir überhaupt blos zweierlei Fälle, d. i. Eindrücke wie von zwei Spitzen und von einer Spitze als richtige und falsche unterscheiden, wie es bei den früheren Camerer'schen Versuchen und einem Theile der Tübinger Versuche geschehen ist. Sei die Totalzahl der Fälle n, die der richtigen Fälle r, die der falschen im Sinne der oben (S. 120)

*) Müller stimmt freilich dieser Auffassung des Masses der Empfindlichkeit nach unserer Methode nicht bei; ich muss aber die Discussion mit ihm hierüber, die mich bei meiner Auffassung stehen bleiben lässt, auf einen späteren Abschnitt (XII) versparen.

gewählten Bezeichnung z, so wird es mit Rücksicht, dass sich z mit r zu n ergänzt, blos nöthig sein, r als Bruchtheil von n zu bestimmen, was gewöhnlich procental geschieht, um z inclusive mit bestimmt zu haben und nicht noch besonders darauf Rücksicht zu nehmen; und werden wir also einfach sagen können, die extensive Empfindlichkeit verschiedener Hauttheile sei überhaupt umgekehrt proportional der Distanz, welche das gleiche $\frac{r}{n}$ oder gleiche $r\%$ giebt. Unterscheiden wir aber noch Zwischenfälle, Uebergangsfälle zwischen dem Eindruck zweier Spitzen und einer Spitze, wie es nicht nur bei den meisten Tübinger Beobachtungen, sondern auch den neuen Camerer'schen Versuchen der Fall ist, wo die sogenannten Fälle »mehr als eine Spitze« sich als solche Zwischenfälle darstellen, so kann es fraglich erscheinen, wie dann die Fälle überhaupt im Sinne des allgemeinen Massprincipes zu verwerthen sind, und noch verwickelter erscheint die Frage, wenn zu den vorigen drei Fällen noch die sogenannten unbestimmten Fälle Camerer's zutreten.

In aller Strenge nun würde man sagen können: die Empfindlichkeit ist überhaupt reciprok der Distanz, welche ein gegebenes Verhältniss der dreierlei oder viererlei Fälle, die man nun eben zu unterscheiden Anlass findet, erzeugt; und sollten sich auf den verschiedenen Hauttheilen, deren Empfindlichkeiten man vergleicht, Distanzen finden lassen, bei denen dasselbe Verhältniss der dreierlei oder viererlei Fälle wiederkehrt, so würde die principielle Schwierigkeit nicht nur wegfallen, sondern es auch hinreichen, sich bei gegebenem n ein- für allemal an das Zahlverhältniss, was eine bestimmte Art dieser Fälle dazu hat, zu halten, sofern das der übrigen zugleich mit dadurch gegeben ist. Aber es ist praktisch unmöglich, überall wieder auf dasselbe Verhältniss der dreierlei oder gar viererlei Fälle zu kommen; und so ist man darauf verwiesen, zu versuchen, ob nicht eine solche Reduction der vielerlei Fälle auf zweierlei, die man nach schon gemachter Bemerkung als reducirt richtige und falsche Fälle oder reducirte r und z bezeichnen mag, möglich ist, welche mit einer dazu passenden Regel oder Formel zu in sich und mit der Erfahrung einstimmigen gesetzlichen Massverhältnissen führt; denn ohne das würde bei der immer stattfindenden Möglichkeit, mehr als zweierlei Fälle zu unterscheiden, und dem

unbestimmbaren Wechsel ihrer Verhältnisse die ganze Methode sich in Unbestimmtheit verlieren. Auch haben bisher alle Beobachter, welche mehr als zweierlei Fälle in der Beobachtung unterschieden haben, doch für Verwendung zum Masse eine Reduction auf zweierlei vorgenommen, und nur Müller will eine doppelte Rechnung dafür angestellt wissen, worauf ich zuletzt komme, ohne zu glauben, dass etwas damit zu gewinnen ist.

Die Reduction kann nun aber auf verschiedene Weise geschehen, und legen wir der Betrachtung der verschiedenen Möglichkeiten die weitestgehende Unterscheidung von Fällen, welche bisher vorliegt, d. i. in viererlei Fälle bei den neuen Handgelenkversuchen Camerer's, zu Grunde (s. S. 122), auf die wir uns ohnehin vorzugsweise zu beziehen haben werden, und führen dabei folgende Bezeichnungen für die relative Zahl oder Procentzahl der verschiedenartigen Eindrücke ein:

Z_2 zwei Spitzen, Z_1 eine Spitze, Z_m mehr als eine Spitze, Z_u unentschieden oder unbestimmt.

Was nun die unbestimmten Fälle Camerer's Z_u anlangt, welche nach S. 121—123 nicht mit den unbestimmten Fällen der übrigen Beobachter zu verwechseln sind, so kommt überhaupt wenig darauf an, da sie bei anderen Beobachtern und bei den neuen Stirnversuchen von Camerer selbst fehlen, bei den neuen Handgelenkversuchen aber, wo solche allerdings zu finden, nur in sehr geringer relativer Zahl vorkommen, wie man sich aus den Camerer'schen Tabellen überzeugen kann. Möchte man sie verwerthen, wie man will, oder bei der Berechnung ganz ausser Acht lassen, so würden wesentlich dieselben Resultate dabei herauskommen; und da man absolut keinen Grund hat, sie vielmehr auf die eine oder andere Seite zu schlagen, so theilen wir sie bei der Reduction gleich zwischen die *r* und *z*.

Es scheint am Natürlichsten, diess auch mit den Zwischenfällen Camerer's »mehr als eine Spitze« und den unbestimmten Fällen der Tübinger Beobachter zu thun; jedenfalls liegt aprioristisch nichts Anderes nahe; inzwischen ist doch nicht aprioristisch zu behaupten, dass eine andere Verwerthungsweise dieser Fälle mit einer dazu passenden Formel im Sinne der S. 114 gepflogenen Betrachtung nicht zu noch genügendern Resultaten führen könnte; und es ist um so mehr Anlass, auf die Möglichkeit davon einzugehen, als man jene

Gleichtheilung nicht überall befolgt hat. So hat es Paulus (dessen Abh. p. 4) vorgezogen, die unentschiedenen Fälle ganz auf die Seite der falschen zu schlagen, weil bei seinen Versuchen »die Zahl der richtigen Fälle bei jener Gleichtheilung mit zunehmender Distanz der berührten Hautpuncte nicht ganz so regelmässig zunahm, als wenn er bloss die wirklich richtigen Fälle der Rechnung zu Grunde legte«. Auch Vierordt hat nach einer Bemerkung in seinem Grundr. p. 341 bei Verwerthung der Tübinger Versuche zur Construction seiner im XI. Abschnitt mitzutheilenden Massscala die »unentschiedenen« Fälle weggelassen und nur die wirklich richtigen Empfindungen als solche aufgeführt. Von anderer Seite scheint, dass bei den älteren Camerer'schen Versuchen, wo fast blos richtige und falsche Fälle unterschieden sind, die unentschiedenen Fälle im Tübinger Sinne in die von ihm als richtig bezeichneten mit eingehen.

Hiernach unterscheide ich folgende drei Möglichkeiten als α, β, γ:

α, wo man die Zwischenfälle ganz von den r ausschliesst und auf die Seite der z schlägt;

β, wo man sie umgekehrt ganz auf die Seite der r schlägt;

γ, wo man sie zwischen beiden Seiten gleich theilt, was von vornherein am Angemessensten erscheint und sich auch am Besten bewähren wird.

Kurz also dürften α, β, γ dadurch zu unterscheiden sein, dass die Uebergangsfälle, wo bei aufgesetzten zwei Spitzen ein Zweifel besteht, ob man den Eindruck von zwei Spitzen oder einer Spitze darin sehen will, nach α alle zu den z, d. h. falschen, nach β alle zu den richtigen r geschlagen, nach γ zwischen beiden gleich getheilt werden.

Nun kommt aber zur Entscheidungsfrage zwischen diesen verschiedenen Reductionsweisen der Fälle noch die Frage, ob man dabei im Sinne des S. 114 aufgestellten Principes besser mit wissentlichem oder unwissentlichen Verfahren, was ich als W und U unterscheide, besser mit meiner oder Müller's Formel, was ich als F und M unterscheide, fährt, wodurch sich die Aufgabe der Untersuchung leider sehr complicirt, indem es danach folgende 12 Combinationen und nach Entscheidung sei es für F oder M immer noch 6 Combinationen in Betreff ihres Genügens zu vergleichen gilt, nämlich:

$FW\alpha$	$MW\alpha$
$FW\beta$	$MW\beta$
$FW\gamma$	$MW\gamma$
$FU\alpha$	$MU\alpha$
$FU\beta$	$MU\beta$
$FU\gamma$	$MU\gamma$.

Die Tübinger Versuche sowie die älteren Camerer'schen Versuche bieten keinen genügenden Anhalt zu dieser Untersuchung, und das grösste Verdienst der neuen Camerer'schen Versuche liegt nun eben darin, dass sie solchen bietet.

Meinerseits ziehe ich nach der folgends (im Abschn. XVI) gepflogenen Untersuchung die Combination $FW\gamma$ vor, d. i. also Berechnung der Versuche nach meiner Formel, wissentliches Verfahren und Herstellung der reducirt richtigen und falschen Fälle r und z, mit welchen die Rechnung zu operiren hat, durch Gleichtheilung der Zwischenfälle dazwischen, d. i. der unentschiedenen Fälle im Sinne der Tübinger Beobachter, oder Fälle »mehr als 1 Spitze« im Sinne Camerer's, indess die paar Fälle Z_u, welche bei Camerer's neuen Versuchen vorkommen, in allen Fällen der Gleichtheilung unterliegen.

Zur Erläuterung fassen wir den Anfang der im folgenden Abschnitt zu reproducirenden Camerer'schen Tabelle (no. 1) aus der ersten Abtheilung der neuen Handgelenkversuche in's Auge, welcher für Beobachter I, Abstand 1 Mill. gilt, und also lautet:

	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.
unwissentlich (U)	38,7	11,3	0	50
wissentlich (W)	22	15,3	2	60,7

wobei die Zahlen Procentwerthe der Totalzahl n sind, welche für U wie W 150 für jedes D betrug. Reducirt hat man hiefür nach:

		$r\frac{0}{0}$	$z\frac{0}{0}$
α	U	38,7	61,3
	W	23	77

		$r\frac{0}{0}$	$z\frac{0}{0}$
β	U	50	50
	W	38,3	61,7
γ	U	44,35	55,65
	W	30,65	69,35

Die $z\frac{0}{0}$ könnten als solidarische Ergänzungen der $r\frac{0}{0}$ zu 100 hiebei übergangen werden. Man sieht, wie sehr verschieden je nach der Combination von U, W, α, β, γ die Verhältnisse zwischen r und z ausfallen. Für F und M bleiben sie bei Gleichheit jener Combinationen dieselben und geben nur nach der durch die Verschiedenheit der Formeln bedingten verschiedenen Berechnungsweise sehr verschiedene Ergebnisse.

Die Combination $U\alpha$ stimmt in unserem Beispiel nahe mit der Combination $W\beta$; doch ist diess nichts Allgemeingültiges und keine principielle Betrachtung darauf zu gründen.

Was die Weise anlangt, wie Müller beim Dasein unentschiedener Fälle verfährt, so verschmäht er dabei eine Reduction der gesammten Fälle auf zweierlei, behandelt vielmehr die Aufgabe einmal nach der Reductionsweise α, zweitens nach Reductionsweise β besonders, indem er im Sinne seiner später zu betrachtenden Theorie erstenfalls eine Schwelle unentschiedener Fälle, zweitenfalls eine Schwelle richtiger Fälle in die Rechnung einführt, und dazu bemerkt, die eine könne eben so wie die andere zur Bestimmung der Feinheit des Ortssinnes dienen, wobei man sich im Allgemeinen vorzustellen habe, dass »wenn die Schwelle der richtigen Fälle eine positive oder negative zufällige Schwankung erfährt, alsdann immer auch die Schwelle der unentschiedenen Fälle eine zufällige Schwankung nach derselben Richtung hin erfährt«. Aber solchergestalt erhält man für dieselbe Hautstelle zweierlei Empfindlichkeitsbestimmungen statt einer; und man könnte freilich, obwohl Müller diess nicht ausdrücklich sagt, nach Analogie seines Verfahrens bei den Gewichtsversuchen, aus beiden Massbestimmungen das Mittel nehmen, um zu einer einheitlichen Bestimmung zu gelangen; da sich aber nach den Erörterungen in m. »Revision« diess Verfahren dort als unstatthaft erwiesen hat, würde auch hier nichts Anderes davon zu erwarten sein. Die Mög-

lichkeit einer Reduction der gesammten Fälle auf blos zweierlei im Fall des Daseins von Zwischenfällen ist von Müller überhaupt weder erwogen noch geprüft worden; und wenn Müller auf der Reductionsweise α und β besonders fussen lässt, so wird sich weiterhin finden, dass jede von beiden für sich der einfachen Reductionsweise γ nachsteht. Endlich ist auch jene Voraussetzung über eine entsprechende Bewegung beider Schwellen von ihm ohne Beweis hingestellt, und bestätigt sich nicht in der Erfahrung, denn danach müsste mit zufälligem Wachsthum und zufälliger Abnahme von Z_2 immer zugleich Z_m in gleicher Richtung wachsen oder abnehmen, aber man braucht nur in den Tabellen der neuen Versuche Camerer's die Ergebnisse der verschiedenen Beobachter I, II, III u. s. w. für dieselben Abstände und dasselbe U oder W (in Abschn. IX) zu vergleichen, so findet man bald einen gleichsinnigen, bald entgegengesetzten Gang von Z_2 und Z_m. Nach all' dem glaube ich, dass man von Müller's Behandlungsweise der unentschiedenen Fälle abzusehen hat, indess es allerdings nöthig ist, so lange man seine Grundformel selbst noch zu prüfen hat, diess mit Bezug auf die drei möglichen Reductionsweisen α, β, γ zu thun, was daher auch im Folgenden geschehen wird.

Für die nachfolgende Behandlung ist es nun überhaupt nöthig, die Originaltabellen der im folgenden Abschnitt näher zu besprechenden Camerer'schen Versuche, worin viererlei Fälle unterschieden werden, in solche zu übersetzen, worin diese viererlei Fälle auf zweierlei, d. i. r und z, reducirt sind, und diess nach α, β, γ für W und U besonders zu thun, was eine sechsfache mühsame Arbeit ist, die um so zeitraubender dadurch wird, dass man sie, wegen sehr leicht sich einschleichender Versehen bei der Reduction, durch Wiederholung zu verificiren hat; doch kann man sie nicht entbehren, soll eine Prüfung der verschiedenen Reductionsweisen unter den verschiedenen, zur Untersuchung sich darbietenden, Umständen durchgeführt werden. Nun würde es viel zu viel Raum kosten, diese Uebersetzungen, die übrigens jeder auf Grund der Originaltabellen leicht selbst vornehmen kann, hier ausgeführt darzubieten; nur probeweise und zum Anhalt für spätere Betrachtungen mag die Uebersetzung der Tabelle der 1. Abth. der Handgelenkversuche (no. 1), welche von mir im IX. Abschnitt wiedergegeben wird, für $W\gamma$ hier mitgetheilt werden, eine andere hat man für $W\alpha$, eine andere für

$W\beta$, eine andere für $U\alpha$, weiter für $U\beta$ und $U\gamma$, indess diese Tabellen für F und M dieselben bleiben. Die Zahlen der folgenden Tabelle sind Procentzahlen $r\frac{a}{0}$, welche sich mit den weggelassenen $z\frac{a}{0}$ zu 100 ergänzen. Die Anordnung der Tabelle in Bezug auf die Beobachter (Versuchssubjecte) I, II u. s. w. und Distanzen 1, 2 Mill. u. s. w. ist aus formellen Gründen verschieden von der Anordnung der unreducirten Camerer'schen Tabelle, worauf sachlich nichts ankommt. Statt Zahlen wie 30,65 und 15,99 in der reducirten Tabelle hätte man 30,7 und 16 setzen können, doch gebe ich die reducirten Zahlen so wie sie direct aus den Datis der unreducirten hervorgehen.

Weiterhin wird gezeigt werden, dass die reducirten $r\frac{a}{0}$ nach einer sog. Fundamentaltabelle für Rechnungszwecke in Werthe t zu übersetzen sind, welche je nach F oder M sehr verschieden ausfallen, und erst im XII. Abschnitt ihre Erläuterung finden werden. Doch füge ich schon vorläufig für später darauf zu nehmende Beziehungen zur folgenden Tabelle der $r\frac{a}{0}$ eine Tabelle der dazu gehörigen t mit den Mitteln der t für die verschiedenen Beobachter und den nach der Fundamentaltabelle für meine Formel (F) zu diesen Mitteln zugehörigen $r\frac{a}{0}$. Diese unterscheiden sich ein wenig von den direct erhaltenen mittlern $r\frac{a}{0}$ der ersten Tabelle, was keine Rechnungsungenauigkeit ist, sondern in der Natur der Sache liegt, worauf im XI. Abschnitt zurückzukommen sein wird. Müller hat den Buchstaben τ für das hier gebrauchte t.

Tabelle der wissentlich erhaltenen, nach γ reducirten, $r\frac{a}{0}$ für die 1. Abtheilung (no. 1) von Camerer's neuen Handgelenkversuchen (s. Abschn. IX).

	1 Mill.	2 Mill.	3 Mill.	5 Mill.
I	30,65	37,70	51,70	63,4
II	36,65	44,40	45,35	63,3
III	39,40	47,00	55,35	61,95
IV	15,05	22,65	27,70	35,3
V	15,99	27,00	35,95	51,05
Summe	137,74	178,75	216,05	275,00
Mittel $r\frac{a}{0}$	27,55	35,75	43,21	55,00

Die unten stehenden Mittel sind die mittleren reducirten r_0^0 für alle fünf Beobachter von I bis V.

Tabelle der Werthe t (oder τ), in welche sich die einzelnen reducirten r_0^0 der vorigen Tabelle respective nach mir (F) und Müller (M) übersetzen, mit den zu diesen Mitteln zugehörigen r_0^0.

	1 Mill.	2 Mill.	3 Mill.	5 Mill.
		Nach *F*.		
I	0,6654	0,7157	0,8282	0,9416
II	7080	7671	7747	9405
III	7283	7883	8613	9262
IV	5645	6121	6453	6982
V	5701	6406	7028	8225
Summe	3,2363	3,5238	3,8123	4,3290
Mittel t	0,64726	0,70476	0,76246	0,86580
Zugeh. r_0^0	27,99	36,21	43,82	55,84
		Nach *M*.		
I	— 0,3577	— 0,2216	+ 0,0292	+ 0,2422
II	— 0,2413	— 0,0997	— 0,0827	+ 0,2403
III	— 0,1901	— 0,0532	+ 0,0952	+ 0,2151
IV	— 0,7314	— 0,5306	— 0,4185	— 0,2669
V	— 0,7035	— 0,4333	— 0,2545	+ 0,0186
Summe	— 2,2240	— 1,3384	— 0,6313	+ 0,4474
Mittel t	— 0,44480	— 0,26768	— 0,12626	+ 0,08948
Zugeh. r_0^0	26,50	35,25	42,91	55,03

Bemerkung. Die t-Werthe (τ-Werthe) nach M sind negativ, wenn sie zu Werthen r_0^0 unter 50 gehören, positiv zu Werthen über 50, indess nach F alle Werthe t positiv sind.

VIII. Die Camerer'schen Versuchsreihen insbesondere.

Nachdem wir der Camerer'schen Versuche schon aus allgemeineren Gesichtspunkten im III. Abschnitt, und nach verschiedenen besonderen Beziehungen in den darauf folgenden Abschnitten gedacht haben, wird für den weiteren Verfolg der Untersuchung theils im

Zusammenhange darauf zurückzukommen, theils mehr im Detail darauf einzugehen sein.

Die älteren Versuche Camerer's sind bemerktermassen an seinen zwei Kindern, Hedwig und Ida, in einer ersten Epoche 1875, 76, respective 8 und 6 Jahre, in einer zweiten 1879, 80, 12 und 10 Jahre alt, an 8 verschiedenen Theilen der oberen Extremität, mit Querlage der Spitzendistanz gegen die Längsrichtung der Extremität, sämmtlich in rascher Folge, mit stumpfen Spitzen, unwissentlich, gemischt, d. i. mit Einschaltung von Vexirversuchen, angestellt; letzteres abgesehen von einer besonderen Versuchsreihe (s. S. 133), worin gemischt und ungemischt verglichen wurde. Von mehr oder weniger kleinen Distanzen anhebend, sind sie bei jedem Hauttheile durch 4 bis 6 Distanzen so weit fortgeführt worden, bis die höchste Distanz alle oder beinahe alle Fälle als richtig gab.

Die geprüften Hauttheile waren: 1) Spitze des Mittelfingers, 3—4 Mill. vom Rande des Nagels entfernt; 2) 1. Phalanx (dem Handteller nächstes Glied) des Mittelfingers. 3) Vola manus, Handteller, Mitte, volar. 4) Handgelenk, Mitte, volar. 5) Vorderarm, Mitte, volar. 6) Ellbogengelenk. 7) Oberarm, Mitte, volar. 8) Acromion. Die Distanzen nach der Zirkelweite ohne Rücksicht auf die Krümmung der Theile, mit der Bemerkung Camerer's, dass diese bei Oberarm »von bedeutendem Einfluss auf das Resultat sei«. An jeder Localität sind im Ganzen 6 bis 8, von Camerer nach der Zeitfolge unterschiedene Reihen, jede à 200 Versuche für jedes D (ohne die Vexirversuche) angestellt, wovon die Hälfte auf die rechte, die Hälfte auf die linke Seite kommen, welche aber so wenig unterschiedene Resultate gaben, dass sie vom Verfasser zusammengefasst sind. Die Fingerspitzen wurden mit Straminnadeln, welche nicht stechen, die übrigen Localitäten mit Stecknadelknöpfen berührt. Hinsichtlich weiteren Details, insbesondere die Anordnungsweise nach der Zeit und die Einschaltungsweise der Vexirversuche betreffend, ist auf die Originalabhandlung zu verweisen.

Vorstehende Versuche Camerer's sind bemerktermassen in der, nach S. 116 als No. 1 bezeichneten Abhandlung veröffentlicht. Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie ganz methodisch, in sehr grosser und für alle besonders geprüfte Verhältnisse gleicher Zahl, ganz vergleichbar für die verschiedenen Hauttheile, für rechte und linke Seite,

für beide Kinder und beide Versuchsepochen, regelmässig wechselnd mit Aufsteigen und Absteigen der Distanzen (↓ und ↑) angestellt sind, auch die Vexirversuche mit den Hauptversuchen überall in gleiche Beziehung gesetzt sind, dass sie ferner von einer genauen Angabe der eingehaltenen Versuchsverhältnisse begleitet sind, und dass sie über die Rolle der Vexirfehler und den Einfluss des Contrastes beachtenswerthe Aufschlüsse geben, endlich, dass sie, wenn auch nicht eine sichere Verhältnissscala doch eine sichere Stufenfolge der extensiven Empfindlichkeit der verschiedenen Hauttheile der oberen Extremität ergeben. In diesen Beziehungen haben sie allerdings wesentliche Vorzüge vor den, ihnen vorangegangenen, weniger methodisch angeordneten und gehaltenen, weniger in sich und unter einander vergleichbaren, Vexirversuche und Hauptversuche unbestimmt mischenden, Tübinger Versuchen voraus, indess man Nachtheile der älteren Camerer'schen gegen die Tübinger Versuche darin erblicken könnte, dass die Camerer'schen in rascherer Folge der Einzelversuche angestellt scheinen, als die Tübinger, was eine mindere Unabhängigkeit derselben von einander mitführen musste, dass eine, wenigstens von der Mehrzahl der Tübinger Beobachter gemachte Unterscheidung, die der unentschiedenen oder unbestimmten Fälle von den richtigen und falschen, bei Camerer wenn auch nicht ganz fehlt, doch nur spurenweise auftritt, und dass die Beobachtungssubjecte bei Camerer Kinder waren. Indess dürften sich diese Nachtheile bei näherer Betrachtung mindestens in der Hauptsache als nur scheinbare erweisen.

Was nämlich den ersten Punct anlangt, so hat sich allerdings durch die Camerer'schen Versuche selbst herausgestellt, dass bei Versuchen, die mit verschieden grossen Distanzen auf demselben Hauttheile rasch hinter einander angestellt werden, sich ein Einfluss der vorgängigen Versuche auf die spätern geltend macht, welcher nach den im VI. Abschnitt gepflogenen Erörterungen als ein Contrasteinfluss zu deuten ist, und der natürlich am sichersten dadurch vermeidbar ist, dass man die Versuche mit den verschiedenen Distanzen so weit in der Zeit auseinander hält, um sie unabhängig von einander zu machen; und diess ist oder scheint jedenfalls bei den Tübinger mehr als bei den älteren Camerer'schen der Fall gewesen, indess bei den neuen dieser Nachtheil ganz vermieden ist. Inzwischen ist demselben

schon bei den ältern Versuchen dadurch so weit als möglich begegnet, dass die Versuche in regelmässigem Wechsel von Aufsteigen und Absteigen mit den Distanzen angestellt, und mittlere Zahlen daraus genommen wurden. Auch die Tübinger Versuche aber sind unstreitig nicht weit genug auseinander gehalten, um jenen Einfluss ganz zu beseitigen, und ein methodischer Wechsel zwischen Aufsteigen und Absteigen mit den Distanzen scheint nicht stattgefunden zu haben, da sich nichts darüber angeführt findet. Was zur Beurtheilung dieser Frage vorliegt, ist in folgender Einschaltung enthalten.

In den Abhandlungen der Tübinger Beobachter finde ich nur folgende Angabe von Kottenkamp und Ullrich (p. 40), welche einen ungefähren Schluss auf die Zwischenzeit der Versuche machen lässt.

»Jeder von uns diente abwechselnd nur je $\frac{1}{4}$ Stunde als Versuchsperson, auch folgten die Einzelversuche nicht allzuschnell, indem jedesmal die bezüglichen Einträge in die Register gemacht werden mussten, und erstreckte sich die Versuchszeit an jedem Tage nie über eine Stunde hinaus.«

Nun schreibt mir zwar Vierordt: »meine jungen Leute hatten die Instruction, ihre Versuche ganz langsam auf einander folgen zu lassen«; aber aus vorstehender Angabe lässt sich schliessen, dass sie diess »ganz langsam« in »nicht allzuschnell« übersetzt und schwerlich mehr Zwischenzeit zwischen den einzelnen Versuchen gelassen haben, als eben zur Eintragung des Resultats in die Register gehörte, womit folgende Notiz von Paulus stimmt, die Camerer auf eine an ihn gerichtete briefliche Anfrage über die Ausführungsweise seiner Versuche im Tübinger Institut erhielt: »Experimentirt habe ich täglich etwa $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{2}$ Stunde (länger absichtlich nie); die Versuche wurden schnell nach einander gemacht; es lag nur so viel Zeit zwischen jedem, als ich zum Aufschreiben des Resultates brauchte, so dass wohl auf einen Versuch $\frac{1}{2}$ bis 1 Minute höchstens gekommen sein mag.«

Nun hat auch Camerer zwischen den einzelnen Versuchen Zeit zum Notiren des Resultats gebraucht; da er aber (in No. 1. p. 2) sagt, dass »12 Versuche sammt Eintrag etwa 35 Sec. Zeit brauchten«, so stimmt diess freilich schlecht mit letzterer Angabe von Paulus, bei der man aber berücksichtigen muss, dass sie nach blosser Erinnerung gemacht ist.

Was den zweiten Punct anlangt, so ist eine strenge Unterscheidung von Zwischenfällen zwischen richtigen und falschen Fällen überhaupt nicht möglich, weil keine strenge Scheidung besteht, und die Tübinger Beobachter selbst schwanken bemerktermassen in dieser Hinsicht, sofern sie theils unentschiedene Fälle ausser richtigen und falschen aufführen, theils blos zwischen richtigen und falschen unterscheiden (s. S. 121). Nur kann im Allgemeinen zugestanden werden, dass, insofern sich eine Unterscheidung machen

lässt, es auch erwünscht ist, sie gemacht zu finden, und so ist diess auch in den neuen Versuchen Camerer's geschehen, worüber schon im IV. Abschnitt gehandelt ist, und worauf später zurückzukommen sein wird.

Was endlich den dritten Punct anlangt, so hebt sich ein daher zu entnehmendes Bedenken zum Theil schon dadurch, dass die Aussagen der Kinder unter Controle eines geübten Beobachters standen, welcher eine Willkür oder Faselei derselben eben sowohl zu erkennen als zu zügeln vermocht hätte; vollends aber wird diess Bedenken durch die schöne Uebereinstimmung des Ganges der Versuche beider Kinder mit einander und in sich selbst, die gleichen Folgerungen, die sich daraus bezüglich des Vexireinflusses u. s. w. ziehen lassen, ausgeschlossen.

Gehen wir zu den neuen Versuchen (1881, 1882, 1883) über, welche in der mit No. 2 bezeichneten Abhandlung enthalten sind. Diese sind angegebenermassen nur an Handgelenk (Mitte, Volarseite) und Stirn, alle, wie die früheren mit Querlage der Distanz gegen die Längsaxe des Körpers angestellt.

Am Handgelenk sind blos die vier kleinen Distanzen 1, 2, 3, 5 Mill., an der Stirn die sechs Distanzen 0,5, 1, 2, 4, 6, 8 Mill. in den Versuch genommen.

In den Stirnversuchen wechselte die Entfernung des Spitzenaufsatzes von der Nasenwurzel bei den verschiedenen Versuchspersonen, je nachdem Falten der Haut oder kleine Wärzchen einen Anhaltspunct für die Berührung gewährten (bestimmtere Angaben s. in No. 2 p. 296).

Die Versuche an beiden Hauttheilen sind nicht wie die früheren schnell hinter einander angestellt, sondern am Handgelenk in einer ersten Versuchsabtheilung (no. 1) in Zwischenzeiten von nicht weniger als $\frac{1}{2}$ Stunde bei einem und demselben Versuchssubjecte, in einer zweiten (no. 2) in Zwischenzeiten von 5 Minuten, welches letztere auch die Zwischenzeit bei den Stirnversuchen (no. 3) war, die den Versuchen am Handgelenk folgten.

Während ferner die früheren Versuche eben so wie die Tübinger sämmtlich mit stumpfen Spitzen (Stecknadelkuppen oder Spitzen von Straminnadeln), sämmtlich (mit Ausnahme einer Versuchsabtheilung) unwissentlich mit Einschaltung von Vexirversuchen angestellt waren,

sind die neuen sämmtlich mit scharfen Spitzen angestellt, und enthalten einen Vergleich zwischen wissentlich und unwissentlich.

Als Beobachter oder Versuchssubjecte dienten bei den neuen Versuchen am Handgelenk (no. 1 und 2) ausser den beiden, seitdem mehr erwachsenen, Töchtern Camerer's noch drei andere Personen, nämlich im Ganzen überhaupt folgende 5, als I, II, III u. s. f. unterschieden (das Alter für 1881 angegeben):

I. Hedwig } Töchter Camerer's, resp. $13\frac{1}{2}$ und $11\frac{1}{2}$ Jahr
II. Ida } alt.
III. Eine 20-jährige französische Schweizerin.
IV. Camerer's Frau, 40-jährig.
V. Camerer selbst (desgleichen 40-jährig).

Zu den Stirnversuchen (no. 3) waren blos die 4 Versuchssubjecte I, II, IV, V zugezogen, fehlte also III.

Als Gesammtreihen bezeichne ich nun folgends die ganze Verbindung der Reihen, wozu sämmtliche Versuchssubjecte beigetragen, als Specialreihen die dazu beitragenden Reihen der einzelnen Versuchssubjecte.

Ueber die Zeitfolge der verschiedenen Abtheilungen no. 1, 2, 3 der neuen Versuche ist (zum Theil nach schriftlichen Mittheilungen) Folgendes zu sagen:

1) Die Versuche mit halbstündigen Pausen am Handgelenk, also no. 1, wurden angestellt: a) unwisssend vom 16. Sept. 1881 bis 28. Jan. 1882, b) wissend vom 29. Jan. 1882 bis 13. März 1882.

2) Die Versuche mit Pausen von 5 Minuten, also no. 2, sind angestellt a) unwissend vom 17. März bis 28. April 1882, b) wissend vom 18. Mai bis 22. Juni 1882, wonach noch c) wissentliche Versuche an der seitlichen Partie des Handgelenkes vom 1. Juli bis 5. Sept. folgten, die aber bei der Benutzung der Versuche im XVI. Abschnitt nicht mitzählen, sondern im XVIII. Abschnitt besonders berücksichtigt werden sollen.

3) Die Stirnversuche (also no. 3) wurden mit Pausen von 5 Min. im Nov. 1882 bis in März 1883 abwechselnd zwischen unwissentlichen und wissentlichen angestellt, und zwar unwissentlich vom 11. Nov. bis 14. Dec. 1882; wissentlich vom 10. Nov. bis 6. Dec.; unwissentlich vom 15. Dec. 1882 bis 11. Jan. 1883; wissentlich vom

13. Dec. bis 5. Jan.; unwissentlich vom 12.—19. Jan.; wissentlich vom 11.—27. Jan.

Die Zahl der Versuche, Hauptversuche wie Vexirversuche, ist in jeder der 3 Hauptabtheilungen, no. 1, 2, 3, für jede Person (mit einer unten anzugebenden Ausnahme) und jede Distanz wissentlich und unwissentlich streng gleich gehalten, variirte aber von einer Abtheilung zur anderen, betrug nämlich, was die Hauptversuche anlangt, in den Handgelenkversuchen für jede der 5 Personen bei jeder der 4 Distanzen sowohl wissentlich als unwissentlich in no. 1 150; mit Ausnahme von V, wo sie unwissentlich blos 100 betrug, in no. 2 200. Bei den Stirnversuchen no. 3 betrug sie für jede der 4 Personen bei jeder der 6 Distanzen sowohl wissentlich als unwissentlich 125, in Summa also bei no. 1 wissentlich $5 \cdot 4 \cdot 150$; unwissentlich $4 \cdot 4 \cdot 150 + 1 \cdot 4 \cdot 100$, in Summa 5800; bei no. 2 $2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 260 = 8000$; bei no. 3 $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 125 = 6000$. Hinsichtlich der Vexirversuchszahl vergl. die Originalabhandlung.

Noch ist zu bemerken, dass die Versuche no. 1 sämmtlich an der rechten Hand angestellt sind, bei den Versuchen no. 2 aber wurde sowohl beim wissentlichen als unwissentlichen Verfahren, nachdem die erste Hälfte der Versuche an der rechten Hand gemacht war, mit der zweiten, wegen einer sich allmälig einstellenden Reizung der Haut durch die scharfen Spitzen, deren unten gedacht wird, auf die linke Seite übergegangen.

Speciellere Angaben über die Austheilungs- und Anstellungsweise der Versuche sind wiederum im Original bei Camerer selbst nachzulesen; ohne dass im Folgenden Anlass sein wird, auf diese Specialitäten Rückbezug zu nehmen, deren Ausführung aber beweist, dass entsprechende Massnahmen, als bei den älteren Versuchen dienten, die Vergleichbarkeit zu sichern, auch bei den neuen Versuchen genommen worden sind. Nur in Betreff der Anordnung der Versuche im Ganzen und Grossen könnte man zunächst folgende Bedenken hegen.

In no. 1 wie no. 2 sind die wissentlichen und unwissentlichen Versuche (*W* und *U*) nicht eben so wie in no. 3 in kleinen Partieen abwechselnd angestellt, sondern die unwissentlichen Versuche in einem besonderen Versuchsabschnitte zuerst, die wissentlichen in einem zweiten Abschnitte danach. Nun wird es an sich einen ge-

wissen Vortheil haben, beide Versuchsweisen im Zusammenhange für sich, undurchbrochen und ungestört durch die anderen, durchzuführen, um sie dann nach ihren Resultaten im Ganzen zu vergleichen; aber von der anderen Seite liegt der Verdacht nahe, dass der erhebliche Vortheil, den *W* in no. 1 wie no. 2 vor *U* nach den im XVI. Abschnitt geltend zu machenden Kriterien zeigt, dem Umstande zuzuschreiben sei, dass dem *W* eine, durch die vorherigen *U*-Versuche erlangte, Uebung zu Statten gekommen ist, die bei den *U*-Versuchen noch fehlte oder nach den letzten, im Jahre 1879—1880 angestellten älteren Versuchen wieder erloschen war. Aber man muss sich hüten, zweierlei Vortheile zu verwechseln. Der Vortheil, der durch Uebung erlangt werden kann, besteht darin, dass allmälig immer kleinere Distanzen noch als Distanzen erkannt werden, mithin die Schwelle der ext. Empfindlichkeit sinkt, und dass für dieselben Distanzen ein grösseres $\frac{r}{n}$ gewonnen wird, indem die Fälle 2 Spitzen und m. (im Sinne Camerer's), woraus $\frac{r}{n}$ nach Abschnitt VII abzuleiten, gegen die Fälle 1 Spitze zunehmen. Käme es uns nun bei der später zu behandelnden Vorzugsfrage zwischen *W* und *U* auf diesen Vortheil an, so würde jedenfalls bei den kleinen Distanzen, in denen sich die neuen Versuche halten, das *U*-Verfahren unbedingt in Vortheil vor dem *W*-Verfahren sein*), sofern es, wie man sich aus den Originaltabellen überzeugen kann, überall für dieselben *D*'s grössere $\frac{r}{n}$ giebt. Der Vortheil aber, nach dem wir fragen, bezieht sich vielmehr darauf, ob das wissentliche oder unwissentliche Verfahren Werthe von $\frac{r}{n}$ giebt, die sich besser einer, durch eine einfache Formel ausdrückbaren, Gesetzlichkeit (nach S. 113) fügen; und es liegt wenigstens bis jetzt kein Grund vor, anzunehmen, dass der Vortheil in erster Hinsicht zugleich einen solchen in letzter Hinsicht mitführe, vielmehr ist von vornherein von einer zulänglichen Formel zu verlangen, dass sie eben so für geringere als grössere extensive Empfindlichkeit passe. Auch liesse sich ein Verdacht aus obigem Gesichtspuncte, falls er überhaupt Grund hätte, von vornherein füglich nur für no. 1 erheben, wo mit den neuen

*) Dass für grössere Distanzen sich der Vortheil umkehren kann, wird aus späteren Erörterungen (XVII) erhellen.

Versuchen begonnen wurde, wogegen nach deren Fortführung vom Sept. 1881 bis in März 1882 die Uebung beim Beginn von no. 2 schon bis zu ihrem Ziele gelangt oder so weit vorgeschritten sein musste, dass in no. 2 kein weiterer Fortschritt mehr zu erwarten war. Die im IX. Abschnitt folgende Prüfungstabelle zeigt aber ein ganz entsprechendes Uebergewicht des von uns gesuchten Vortheiles von *W* über *U* für no. 2 als no. 1.

Unter den drei Abtheilungen no. 1. 2. 3 erscheinen die Stirnversuche no. 3 von vornherein dadurch in Vortheil gegen die Handgelenkversuche no. 1 und 2, dass sie sich über eine grössere Zahl und Ausdehnung von Distanzen erstrecken, nämlich angegebenermassen auf 6 Distanzen von 0,5 bis 8 Mill., indess die Handgelenkversuche nur auf 4 Distanzen von 1 bis 5 Mill. Aber dieser Vortheil wird mehr als aufgewogen durch den Nachtheil grösserer Unsicherheit, der sich in folgender Bemerkung Camerer's (No. 2 p. 296) kundgiebt, so wie aus den Versuchen selbst zu folgern ist. Camerer sagt: »Bei den einzelnen Versuchen sind kleine Abweichungen von der gewählten Berührungsstelle nach oben und unten, so wie nach rechts und links bei Berührung aus freier Hand unvermeidlich; überhaupt ist es bei der Stirne besonders schwierig (da die zu berührende Fläche senkrecht steht anstatt horizontal wie bei der auf dem Tische liegenden Hand), die Berührung weder zu stark noch zu schwach zu machen, die Nadeln rechtwinklig aufzusetzen und in der Art, dass beide Nadeln eines Nadelpaares gleichzeitig und gleich stark die Haut berühren; diess letztere ist um so schwieriger, je grösser die Nadelabstände.« Dieser Umstand war es auch nach einer brieflichen Bemerkung von Camerer, der ihn hinderte, mit den Distanzen auf der Stirn nicht wenigstens bis 10 Mill. fortzugehen; und nach einer im XVI. Abschn. geführten Untersuchung wird sich zeigen, dass schon $D = 8$ so abnorm grosse Abweichungen zwischen Beob. und Rechn. giebt, um es zweckmässig zu finden, die Beobachtungen bei diesem *D* von den für unsere Fragen massgebenden auszuschliessen.

Hienach noch einige Bemerkungen zur bestimmtern Motivirung der Abweichungen, welche bei den neuen Versuchen gegen die früheren Platz gefunden haben.

Der hauptsächlichste Grund, dabei bis zu sehr kleinen Distanzen herabzugehen, war der, dass sowohl die Müller'sche als meine

Formel zwei Constanten enthält, von denen die eine nach Müller sich subtractiv, nach mir additiv zur Distanz oder dem Product der Distanz in die andere Constante fügt, und bei Müller und mir eine verschiedene Bedeutung, hiemit auch verschiedene Beziehung zur relativen Zahl der richtigen Fälle $\frac{r}{n}$ hat. Nun leuchtet aber ein, dass, zu je höheren Distanzen man übergeht, um so mehr verschwindet diese Constante dagegen, und die Abhängigkeit der Resultate davon und Richtigkeit der einen oder andern Formel nach Vergleich von Beobachtung und Rechnung, ja die Nothwendigkeit, eine Zusatzconstante zur Distanz in die Formel überhaupt einzuführen, kann sich daher nur bei Versuchen mit kleinen Distanzen genügend herausstellen, was bei den früheren Versuchen Camerer's, welche sämmtlich mit grösseren Distanzen operiren, nicht der Fall war.

Nun wäre es allerdings erwünscht gewesen, wenn die neuen Versuche an denselben Hauttheilen als die ältern von den kleinsten Distanzen aus bis zu den grössern der ältern Versuche im Zusammenhange hätten fortgeführt werden können, da bei den neuen Massregeln der neuen Versuche keine hinreichende Vergleichbarkeit derselben mit den ältern stattfand, also beide nicht als durch einander ergänzt gelten konnten. Inzwischen traten theils äussere, theils innere Schwierigkeiten der vergleichbaren Fortführung der neuen Versuche bis zu grossen Distanzen entgegen.

Ersteres anlangend, so ist die Beharrlichkeit und Geduld, womit Camerer seine Versuche vom Beginn der älteren bis zum Schluss der neueren mit einem so colossalen Zeitaufwand und durch so viele Jahre (1875 bis 1883) durchgeführt hat, um damit den immer neuauftretenden Fragen nachzugehen, an sich bewunderungswürdig; endlich aber hat doch eine Erschöpfung der zu Gebote stehenden Zeit und Geduld theils Camerer's selbst, theils seiner Beobachtungssubjecte, der Fortsetzung der Versuche ein wenigstens zeitweises Ziel gesetzt. Ausserdem ist betreffs der Stirnversuche schon oben eines äusseren Umstandes gedacht, welcher von Erweiterung derselben auf grössere Distanzen abhielt. Die inneren Schwierigkeiten aber anlangend, so ist die wichtigste in folgendem Umstande zu suchen.

Die Massbestimmung der extensiven Empfindlichkeit gründet sich principiell darauf, die Grösse der Distanzen zu bestimmen, welche dasselbe für die Empfindung leisten, also bei unserer Methode nach

den Aussagen der Empfindung ein gleiches Verhältniss richtiger (resp. darauf reducirter) Fälle zu den übrigen Fällen geben, wonach die Empfindlichkeit diesen Distanzen umgekehrt proportional ist. Um nun einen Vergleich zwischen verschiedenen Hauttheilen in dieser Beziehung zu ziehen, kann man sich nicht begnügen, auf jedem blos bei einer einzigen Distanz zu beobachten, sondern es müssen auf jedem eine Reihe von Distanzen (allermindestens zwei) in den Versuch genommen werden, um dadurch sei es direct auf solche zu kommen, die an den verschiedenen Hauttheilen für die Empfindung äquivalent sind, oder Data für eine Formel zu erhalten, welche die directe Bestimmung in dieser Beziehung ersetzen kann. Dabei aber ist die Voraussetzung zu machen, dass die Empfindlichkeit innerhalb der Strecke, in welche die geprüften Distanzen fallen, sich nicht von den kleineren zu den grösseren Distanzen ändert. Diese Voraussetzung ist nun jedenfalls streng genommen überall unrichtig, da schon durch Weber's Versuche nach der Methode der Ebenmerklichkeit bekannt ist, und durch Versuche nach unserer Methode sich bestätigt, dass die Empfindlichkeit von einer Stelle der Haut zur andern sich ändert; nach dem Gesetze der Continuität aber vorauszusetzen ist, dass diese Aenderung nicht blos zwischen von einander entfernten Stellen, sondern im Uebergange zwischen ihnen auch zwischen einander nächsten Stellen stattfindet. Diess hindert nun zwar nicht, für praktische Zwecke mittlere Empfindlichkeitswerthe auch für grössere Hautstrecken vergleichbar mit andern zu gewinnen, setzt aber Versuchen, welche über die Gültigkeit dieser oder jener Regel oder Formel Aufschluss geben sollen, naheliegende Grenzen in Vergrösserung der Distanzen, ohne doch solche Versuche innerhalb gewisser Grenzen überhaupt unthunlich zu machen, wenn man nur den Spielraum der Distanzen klein genug hält, um die Veränderungen der Empfindlichkeit innerhalb desselben gegen die Zufälligkeiten der Versuche vernachlässigen, oder in denselben als mit aufgehend ansehen zu können. Ob nun diess der Fall sei, kann man theils durch directe Versuche zu ermitteln suchen, indem man mehr centrale und mehr seitliche Theile besonders auf ihre richtigen und falschen Fälle untersucht, oder auch auf Rechnungswege Schlüsse in betreffender Hinsicht aus blos centralen Versuchen von verschiedener Distanzweite zieht (Abschn. XVIII).

Wirklich hat Camerer zu ersterem Zwecke unter seinen neuen Versuchen eine besondere Reihe zur Vergleichung mehr centraler und seitlicher Theile am Handgelenk angestellt, die eher auf eine schwache Abnahme als Zunahme der ext. Empfindlichkeit nach der Seite hin schliessen lässt, jedoch, von ihm selbst zugestanden, keine sichere Entscheidung giebt (Abschn. XVIII). Andrerseits habe ich selbst auf zweitem Wege gefunden, dass, wenn man diejenige Rechnungs- und Verfahrungsweise einschlägt, die ich nach Allem überhaupt für die zulänglichste halte (später mit $FW\gamma$ zu bezeichnen), die kleinen und grossen centralen Distanzen auf dem Handgelenk, von 1 bis 5 Mill., innerhalb deren sich Camerer gehalten hat, auf keinen grössern Unterschied für die verschiedenen Theile dieses Spielraums führen, als man durch Zufälligkeiten erklärlich finden kann.

Zu diesem für unsere Untersuchung jedenfalls günstigen Resultate, dass wir auf in Betracht kommende Verschiedenheiten der Empfindlichkeit innerhalb des Spielraums unserer Versuche keine Rücksicht zu nehmen haben, kann möglicherweise eine Massnahme beitragen, worüber sich Camerer bei Darstellung der Handgelenkversuche (No. 2 p. 284) so äussert: »Um immer dieselbe Hautstelle zu treffen, konnte man sich als Merkmal an die Querfalten der Haut halten; kleine Abweichungen von der Mitte nach rechts und links waren dabei unvermeidlich, übrigens eher von Vortheil für das Verfahren. Denn sollte sich die Empfindlichkeit der Haut von der Mitte des Gliedes gegen die Peripherie hin merklich ändern, so ist es besser, wenn die kleinsten Nadelabstände nicht immer genau in der Mitte, sondern zuweilen etwas gegen die Peripherie hin aufgesetzt sind.«

Hienach steht die Sache so: Gesetzt Camerer wäre mit den Versuchen bis zu grossen Distanzen fortgeschritten, so würde doch von vornherein kein Zusammenstimmen der Versuche durch die ganze Ausdehnung dieser Distanzen mit irgend einer einfachen Formel oder Regel zu erwarten gewesen sein, welche auf der Voraussetzung einer Constanz der Empfindlichkeit durch diese Ausdehnung fusst, weil sich eine solche Constanz über grössere Ausdehnungen hinaus factisch nicht findet; möglicherweise aber wäre die Nichtzusammenstimmung auch auf die Unbrauchbarkeit der angewandten Formel oder Regel zu schreiben gewesen; und hierüber hätten die Versuche an sich selbst nicht entscheiden können. Nun ist es erwünscht, dass

Camerer's Versuche jedenfalls einen Anhalt zur Entscheidung zwischen verschiedenen Formeln oder Regeln innerhalb einer hinreichend kleinen Ausdehnung centraler Distanzen geben, wo ersterer Grund der Nichtzusammenstimmung noch nicht in erheblichen Betracht kommen kann, und es liegt kein Wahrscheinlichkeitsgrund vor, dass eine Formel oder Regel, die für centrale Distanzen in den Grenzen constanter Empfindlichkeit zutrifft, nicht auch für seitliche Distanzen innerhalb solcher Grenzen zutreffen sollte, wenn man nur, im Fall die seitlichen Distanzen einem andern Grade der Empfindlichkeit zugehören, die demgemässen andern Constanten dafür in Anwendung bringt; was übrigens nicht ausschliesst, dass ausdrücklich hierauf bezügliche Versuche von Nutzen sein könnten. Nun bleibt allerdings immer noch die abstracte Frage übrig, ob eine Formel oder Regel, die innerhalb einer kleinen Ausdehnung von constanter Empfindlichkeit zutrifft, noch in einer grossen Ausdehnung zutreffen würde, wenn innerhalb derselben von einer Stelle zur andern dieselbe Empfindlichkeit bestände. Nur hat diese Frage kein Interesse für Anwendung unserer Methode, weil die Voraussetzung des wenn nicht in der Wirklichkeit zutrifft, und die Erstreckung der Versuche über grosse Ausdehnungen hinaus schon aus dem Grunde nicht möglich ist, weil dann alle Fälle richtig werden, indess die Anwendbarkeit der Methode sich auf ein Verhältniss zwischen richtigen und falschen Fällen zu stützen hat. Principiell wäre es überhaupt am Besten, wenn es nur praktisch durchführbar wäre, dass die Versuche an jeder auf ihre Empfindlichkeit zu prüfenden Hautstelle nur in möglichst kleiner Ausdehnung angestellt würden, hiemit aber von Stelle zu Stelle fortgeschritten würde, und eine Formel oder Regel, welche dieser Aufgabe für jede Stelle von möglichst kleiner Ausdehnung genügte, würde überhaupt als genügend anzusehen sein. Diese Betrachtung dürfte schon hinreichen, die Beschränkung der neuen Camerer'schen Versuche auf kleine Ausdehnungen zugleich zu motiviren und zu rechtfertigen. Es tritt aber zur vorigen Schwierigkeit, welche der Ausdehnung der Versuche auf grössere Distanzen entgegensteht, bei vielen Hauttheilen noch die zweite, dass nach Massgabe, als man sich bei den Versuchen mit wachsender Distanz vom Centrum der Distanzen entfernt, eine Krümmung der Haut bemerklich wird, welche einerseits mitführt, dass die parallel auf-

gesetzten Spitzen eine schiefe Richtung gegen die Haut annehmen, vermöge deren die Haut, namentlich bei etwas stärkerem Druck, von jeder Spitze in einer etwas stärkeren Ausdehnung gestreift, statt blos punktmässig berührt wird; dass andrerseits der Abstand der Spitzen von einander und der Abstand der dazwischen gefassten Hautpunkte, nach der Hautkrümmung gemessen, einander nicht entsprechen. Bisher hat nur ein Tübinger Beobachter, Paulus, diesen Unterschied messend berücksichtigt, indem er für die Hauttheile und Distanzen, wo eine Krümmung bemerklich wird, sowohl die geradlinige Distanz zwischen den Spitzen, als die Distanz nach der Krümmung der Haut gemessen, angeführt hat; indess sonst immer, auch von Camerer bei den früheren Versuchen, blos erste Distanz angegeben ist; nur bemerkt Camerer ausdrücklich zu seinen Versuchen über den Oberarm (No. 1 p. 12): »an dieser Stelle sei die Krümmung der Hautfläche von bedeutendem Einfluss auf das Resultat der Versuche«,*) während bei den übrigen, in den Versuch genommen Theilen (s. S. 150) dieser Einfluss unstreitig geringer, oder merklich fehlend, war.

Die Wahl von Handgelenk und Stirn bei den neueren Versuchen war nun wesentlich mit dadurch bestimmt, dass innerhalb der in den Versuch genommenen Distanzen das Versuchsfeld als hinlänglich eben angesehen werden konnte, um eine Berücksichtigung der Hautkrümmung überflüssig erscheinen zu lassen.

Die Anwendung scharfer Spitzen statt stumpfer hat theils den Vortheil, die Distanzen schärfer abgrenzen zu können, theils eine feinere Unterscheidung von Fällen möglich zu machen, theils endlich, wie schon früher bemerkt, den naheliegenden Verdacht auszuschliessen, dass die Breite der Berührung mit stumpfen Spitzen das Entstehen von Vexirfehlern verschulden oder doch begünstigen könne. Natürlich dürfen die Versuche mit scharfen Spitzen auf demselben Hauttheile nicht in kurzer Zeit zu sehr gehäuft werden, um nicht nachtheilig zu reizen. Inzwischen ist Camerer bei seinen neuen,

*) Nach einer brieflichen Mittheilung Camerer's entspricht 14 Mill. Nadelabstand am Oberarm bei seinen älteren Versuchen einer nach der Krümmung gemessenen Entfernung der berührten Hautpuncte = 15,5 Mill., und 26 Mill. Nadelabstand einer Entfernung = 29,5 Mill. auf der Haut.

an jedem Subject sich nur sehr langsam folgenden, Versuchen damit ausgekommen, und bemerkt nur in letzter Hinsicht: »Eine geringe Affection der berührten Hautstelle, bestehend in leichter Schuppenbildung und Abschilferung der Haut, sei nach monatelang fortgesetzten Versuchen bei allen Versuchspersonen aufgetreten und habe zum Uebergang vom rechten Handgelenk, auf welchen begonnen worden war, zum linken genöthigt.« Ausserdem fand es Camerer ziemlich schwierig, die Berührung mit scharfen Spitzen so einzurichten »dass sie deutlich empfunden wird, und doch keinen (stechenden) Schmerz macht«.

IX. Tabellen der neuen Camerer'schen Versuche und ihrer Resultate.

Da es zuviel Raum und Zahlenaufwand kosten würde, sämmtliche Versuchstabellen Camerer's, welche die Unterlage dieser Untersuchung bilden, hier aufzunehmen, man aber nach Bedürfniss immer selbst auf die Originalabhandlungen Camerer's wird zurückgehen können, so gebe ich hier nur probeweise eine der Originaltabellen aus den neuen Versuchen Camerer's wieder, indess ich die Mittheilung einer andern aus den ältern, die hier überhaupt nur eine nebensächliche Berücksichtigung erfahren können, auf einen spätern Abschnitt (XIX) verspare.

Die hier unter A mitzutheilende Tabelle nach den neuen Versuchen ist eine getreue Wiederholung der, in der Abhandlung No. 2 vorfindlichen Tabelle III für die von mir mit no. 1 bezeichnete erste Abtheilung der Handgelenkversuche; eine entsprechende findet sich in der Originalabhandlung als Tab. VI für die zweite Abtheilung der Handgelenkversuche (no. 2) und eine dritte als Tab. X für die Stirnversuche (no. 3). Hinsichtlich der zwei letzten Tabellen ist also von hier auf die Originalabhandlung verwiesen. Auch ist die Tabelle für no. 1 blos für die Hauptversuche gegeben; betreffs der Vexirversuche mag es genügen, auf die Angaben S. 134, 138 ff. zu verweisen.

A. Tabelle der neuen wissentlichen und unwissentlichen Versuche am Handgelenk (No. 2. no. 1).

Nadel-abstände	I				II				III				IV				V				
	Sp.	m.	u.	1 Sp.	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.	
1 mm.	38,7	11,3	—	50	46	19,3	4	30,7	46	14	—	40	17,3	6,7	1,3	74,7	17	24	—	59	unwiss.
	22	15,3	2	60,7	16,0	39,3	2	42,7	28,7	18,7	2,7	50	8,7	12,7	—	78,7	7,3	17,3	—	75,3	wissentl.
2 mm.	48	10,7	—	41,3	53,3	14	1,3	31,3	51,3	12,7	0,7	35,3	26	9,3	0,7	64	19	25	2	54	unw.
	28,7	16,7	1,3	53,3	26,7	34,7	0,7	38	38	16	2	44	18	9,3	—	72,7	16	22	—	62	w.
3 mm.	44,7	6,7	0,7	48	54,7	10	8	27,3	50,7	11,3	2,7	35,3	17,3	16	—	66,7	23	27	1	49	unw.
	40	22,7	0,7	36,7	30	30	0,7	39,3	50	8,7	2	39,3	22,7	10	—	67,3	19,3	33,3	—	47,3	w.
5 mm.	60,7	9,3	0,7	29,3	63,3	9,3	2	25,3	54	12,7	0,7	32,7	31,3	14	1,3	53,3	34	26	2	38	unw.
	50,7	22,7	2,7	24	49,3	28	—	22,7	53,3	16	1,3	29,3	33,3	4	—	62,7	38,7	24	0,7	36,7	w.
Mittel von allen Nadel-abständen	48,02	9,5	0,35	42,15	54,32	13,15	3,82	28,65	50,5	12,67	1,02	35,82	22,97	11,5	0,82	64,67	23,25	25,5	1,25	50,0	unw.
	35,35	19,35	1,67	43,67	30,50	33,0	0,85	35,67	42,5	14,85	2	40,65	20,67	9	—	70,35	20,32	24,15	0,17	55,32	w.
	Abstand 1 mm.				Abstand 2 mm.				Abstand 3 mm.				Abstand 5 mm.								
Mittel von allen Ver-suchspers.	33,0	15,06	1,06	50,88	39,52	14,34	0,94	45,18	38,08*)	14,2	2,48	45,26	48,66	14,32	1,34	35,72	unwissentlich				
	16,54	20,66	1,34	61,48	25,48	19,74	0,80	54,0	32,4	20,94	0,68	45,98	45,06	18,92	0,92	35,08	wissentlich				

Bemerkung. 1. In der Rubrik »Mittel von allen Nadelabständen« beträgt die absolute Zahl der Versuche für jede Versuchsperson 600 sowohl bei unwissentlichem als bei wissentlichem Verfahren, mit Ausnahme von No. V, wo nur 400 Versuche bei unwissentlichem Verfahren vorhanden sind.

2. In der Rubrik »Mittel von allen Versuchspersonen« beträgt die absolute Zahl der Versuche für jeden Nadelabstand 700 bei unwissentlichem und 750 bei wissentlichem Verfahren.

*) Im Original statt dieser Zahl verdruckt 30,08.

Hiezu füge ich nun gleich für künftig darauf zu nehmende Beziehungen eine Anzahl Tabellen, die aus Bearbeitung der drei Haupttabellen der neuen Camerer'schen Versuche nach den, im XIV. Abschnitte anzugebenden, Regeln hervorgehen, und bei der, im XVI. Abschnitt zu verhandelnden, Entscheidungsfrage zwischen den verschiedenen Combinationen $FW\alpha$, $FW\beta$ u. s. w. ihre Verwendung finden werden, wobei insbesondere die als »Prüfungstabelle« bezeichnete Tabelle C in massgebende Rücksicht kommt.

Da nach einer, schon S. 157 gemachten, Bemerkung und einer im XVI. Abschn. folgenden Untersuchung die Versuche an der Stirn bei dem grössten D, d. i. 8, als gar zu unzuverlässig zu gelten haben, sind sie in den, später hauptsächlich zu benutzenden, Tabellen B, C, D von der Berechnung ausgeschlossen, doch in der Tabelle E auch eine besondere Berechnung der $\Sigma\varepsilon^2$ unter Zuziehung von $D = 8$ zugefügt.

Zur Erläuterung der Bezeichnungen in den folgenden Tabellen mögen vorläufig folgende Bemerkungen dienen, vorbehältlich eines näheren Eingehens in darauf folgenden Abschnitten.

h und k sind Constanten, welche zur Massbestimmung der extensiven Empfindlichkeit in der, im XII. Abschnitt anzugebenden, Weise dienen, und von den, durch die Beobachtung gegebenen Werthen $r\frac{f}{0}$ wie folgt abhängen. Die $r\frac{f}{0}$ übersetzen sich nach den sog. Fundamentaltabellen des XIII. Abschn. in Werthe t, welche mit h, k in einer Beziehung stehen, die sich nach meiner Formel (F) als $t = hD + k$, nach Müller's Formel (M) als $t = hD - k$ darstellt. Auf Grund dieser Formeln sind die Constanten h, k aus den Beobachtungen selbst bei verschiedenen D abzuleiten, was für jeden Beobachter I, II u. s. w. insbesondere geschehen kann, wofür Tabelle D gilt, oder auch im Mittel für alle, wofür die Tabellen B, C, E gelten. Zu dieser Mittelbestimmung liegen zwei verschiedene Methoden vor, die ich als Methode der mittlern t und mittlern r, kurz als R und T unterscheide, worüber Näheres im XV. Abschnitt.

Unter $\Sigma\varepsilon^2$ ist die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den direct beobachteten und den nach h, k rückwärts mittelst obiger Formeln berechneten $r\frac{f}{0}$ verstanden. Wo, wie in Tabelle D, die Rechnungen für die einzelnen Beobachter specificirt sind, sind die beobachteten Werthe, womit die berechneten zu vergleichen, unmittel-

bar durch die beobachteten selbst gegeben. Wo es sich aber, wie bei den übrigen Tabellen, um Mittelbestimmungen aus den Ergebnissen der verschiedenen Beobachter handelt, werden die $r\frac{0}{0}$, welche als beobachtet in den Vergleich eingehen, je nach R-Methode oder T-Methode durch die direct zu ziehenden arithmetischen Mittel der $r\frac{0}{0}$ oder die zu den mittleren t derselben gehörigen $r\frac{0}{0}$ vertreten.

Die Werthe $\Sigma\varepsilon^2$ haben das Interesse, dass nach Massgabe als sie für eine Combination als wie $FW\alpha$, $FW\beta$ u. s. w. kleiner ausfallen, diess für einen Vorzug der betreffenden Combination spricht, wonach die Tabelle C, worin die in dieser Beziehung massgebenden Bestimmungen vereinigt sind, von mir Prüfungstabelle genannt wird. Ueber ihre Verwerthung in dieser Hinsicht s. Abschn. XVI.

Sämmtliche, in den folgenden Tabellen vorkommenden Werthe h, k, $\Sigma\varepsilon^2$, sind zwar von mir auf mehr Decimalen berechnet worden, als in den Tabellen angegeben sind, und insbesondere ist die Vergleichung von Rechnung mit Beobachtung, wodurch $\Sigma\varepsilon^2$ bestimmt ist, nach Werthen von h, k mit 5 geltenden Ziffern geschehen. Doch schien für die Zwecke vorliegender Mittheilung die Anführung von weniger Decimalen um so mehr genügend, als weitere Decimalen nicht nur an sich sehr unsicher sind, sondern auch von ihrer Berücksichtigung oder Nichtberücksichtigung nur merklich zu vernachlässigenden Unterschiede abhängen.

Die Ableitung der einfachen wie mittleren Constanten h, k aus den Beobachtungen kann nach einer minder scharfen Methode, welche ich als Summationsmethode mit Summ. bezeichne oder nach der schärferen Methode der kleinsten Quadrate, die ich mit Qu. bezeichne, geschehen. Näheres über beide s. im XIV. Abschn. Die Bestimmungen nach Qu. sind für den Gebrauch vorzuziehen, doch kann nach Gründen, die im XIV. Abschnitt besprochen sind, ein Vergleich derselben mit den nach Summ. erhaltenen nicht nur von Interesse, sondern auch von Nutzen sein; daher die Beifügung derselben in den Tabellen C und D. In den Tabellen B und E sind zwar blos die nach Qu. berechneten Werthe angegeben, jedoch auch hier die Bestimmung nach Summ. vorausgegangen, hauptsächlich zur Controle, dass die nach Qu. berechneten $\Sigma\varepsilon^2$ kleiner als die nach Summ. erhaltenen ausgefallen sind.

B. Tabelle der mittlern h, k (nach Qu. bestimmt).

	Hgl. no. 1.		Hgl. no. 2.		Stirn ohne $D = 8$	
	h	k	h	k	h	k
			Nach T			
$FW\alpha$	0,0499	0,532	0,0491	0,529	0,0861	0,482
β	0624	662	0591	692	1248	610
γ	0549	594	0482	610	0977	547
$FU\alpha$	0,0295	0,667	0,0258	0,567	0,0765	0,509
β	0327	787	0349	685	0910	631
γ	0302	722	0303	625	0837	567
$MW\alpha$	0,1475	0,801	0,151	0,819	0,208	0,883
β	1305	353	125	301	222	406
γ	1300	544	112	477	200	605
$MU\alpha$	0,0723	0,385	0,0735	0,717	0,193	0,819
β	0655	090	0737	285	181	395
γ	0669	223	0923	515	180	586
			Nach R (für die Combinationen mit M nicht ganz durchgeführt).			
$FW\alpha$	0,0494	0,531	0,0476	0,528	0,0827	0,483
β	0601	659	0593	677	1183	607
γ	0538	592	0486	600	0947	549
$FU\alpha$	0,0285	0,660	0,0242	0,568	0,0751	0,510
β	0327	770	0337	685	0917	607
γ	0303	713	0305	621	0813	568
$MW\alpha$	0,1374	0,755	0,130	0,803		
β	1198	321	115	274		
γ	1264	527	115	565		
$MU\alpha$			0,0745	0,666		
β						
γ						

C. Prüfungstabelle.

$\sum \varepsilon^2$.

	Nach T						Nach R					
	Hgl. no. 1		Hgl. no. 2		Stirn no. 3 ohne $D = 8$		Hgl. no. 1		Hgl. no. 2		Stirn no. 3 ohne $D = 8$	
	Summ.	Qu.	Summ.	Qu.	Summ.	Qu.	Summ.	Qu.	Summ.	Qu.	Summ.	Qu.
FWα	0,657	0,642	7,5	6,3	27,2	26,6	0,521	0,512	6,3	5,4	26,5	24,6
β	329	292	2,2	2,0	85,7	72,6	1,130	1,032	3,1	2,6	110,5	85,7
γ	407	374	1,9	1,5	45,9	42,0	0,541	0,535	1,46	1,2	55,2	42,7
FUα	12,5	10,8	9,2	8,8	16,1	16,1	13,0	12,4	13,1	9,8	19,5	15,3
β	14,2	12,6	9,7	7,3	7,4	7,1	14,3	10,7	8,7	7,3	2,95	2,63
γ	12,8	9,7	20,4	18,3	7,75	6,57	14,0	10,6	12,9	12,3	7,7	8,8
MWα	11;6	10,7	111,1	65,1	103,3	86,1	8,09	7,6	4,9	3,9		
β	5,5	4,7	12,7	12,6	158,9	150,5	4,04	3,9	8,1	7,5		
γ	6,8	6,0	3,45	2,8	121,3	99,8	1,053	1,047	4,0	3,2		
MUα	17,8	12,9	28,0	18,2	11,7	7,6	13,5		15,1	10,3		
β	12,4	11,4	11,1	8,0	9,8	9,6	11,6					
γ	14,8	11,2	30,8	18,0	11,3	6,64	14,4	9,96				

D. Tabelle einiger Bestimmungen für die einzelnen Beobachter I, II u. s. w. *)

	Summ.			Qu.			
	h	k	$\Sigma \varepsilon^2$	h	k	$\Sigma \varepsilon^2$	n
			Handgel. no. 1 $FW\beta$				
I	0,103	0,594	30,0	0,0969	0,620	26,3	150
II	046	828	45,7	0529	806	40,6	150
III	052	752	0,49	0534	749	0,32	150
IV	029	580	7,2	0273	584	6,6	150
V	086	542	27,7	0824	552	25,8	150
			Handgel. no. 1 $FW\gamma$				
I	0,078	0,574	17,1	0,0723	0,591	13,6	150
II	048	665	29,9	0536	648	25,4	150
III	054	677	9,9	0513	685	9,11	150
IV	033	538	4,4	0334	538	4,38	150
V	063	511	1,0	0632	510	0,98	150
			Handgel. no. 1 $FU\gamma$				
I	0,031	0,76	64,7	0,0427	0,722	60,2	150
II	030	85	0,4	0302	854	0,4	150
III	014	84	6,0	0151	841	5,8	150
IV	017	61	65,5	0215	599	53,4	150
V	035	61	3,4	0356	612	3,1	100
			Handgel. no. 2 $FU\beta$				
I	0,053	0,66	8,1	0,0505	0,663	7,3	200
II	039	72	10,5	0390	720	9,7	200
			Handgel. no. 2 $MU\beta$				
I	0,11	0,34		0,102	0,311	5,1	200
II	0,076	19		0750	185	7,2	200
			Stirn ohne $D = 8$. $FW\gamma$				
I	0,135	0,551	36,0	0,141	0,543	29,9	125
II	080	559	48,8	0775	561	48,2	125
IV	070	578	362,4	0699	567	361,4	125
V	081	529	134,4	104	504	29,7	125

*) Da der Unterschied der T- und R-Berechnung sich blos auf Mittelwerthe aus den Datis der verschiedenen Beobachter bezieht, giebt es bei dieser Tabelle keinen solchen zu machen.

E. Tabelle der Werthe $\Sigma\varepsilon^2$ für die Stirn mit $D = 8$ (T und Qu.).

	$\Sigma\varepsilon^2$		$\Sigma\varepsilon^2$
$FW\alpha$	77,1	$MW\alpha$	86,2
β	73,4	β	150,3
γ	45,1	γ	110,2
$FU\alpha$	114,9	$MU\alpha$	20,4
β	42,8	β	14,2
γ	7,0	γ	16,3

X. Die Volkmann'schen Versuchsreihen insbesondere.

Die auf S. 115 bezeichnete Abhandlung Volkmann's, auf die wir uns hier zu beziehen haben, enthält bemerktermassen, ausser Versuchen nach Weber's Methode der Ebenmerklichkeit, vergleichungsweise damit, auch Versuche nach unserer Methode. Sie betreffen den Einfluss der Uebung und einer künstlichen Verdünnung der Haut auf die Tastempfindlichkeit, und sind an der Spitze des linken Zeigefingers, Volarseite, wissentlich, vom Verf. an sich selbst angestellt. Einheit der Distanz $\frac{1}{10}$ paris. Linie*).

Nach ihrer doppelten Aufgabe theilen sie sich in zwei Gesammtreihen, deren jede sich aus mehreren unmittelbar hinter einander folgenden Specialreihen I, II u. s. w.**) zusammensetzt, welche eben so viel successiven Uebungszeiten entsprechen, wobei sich eine rasche Zunahme der Uebung findet.

In jeder Specialreihe kommen auf jedes D 50 Versuche oder Fälle, wovon die erste Hälfte (25 Fälle) im Absteigen, die zweite im Aufsteigen mit den Distanzen erhalten wurde. Die folgenden Zahlen $r\frac{1}{0}$ sind Procentzahlen, abgeleitet aus diesen 50 Fällen. Es wurden blos richtige und falsche Fälle unterschieden.

In der ersten Gesammtreihe befand sich die Haut in gewöhnlicher Beschaffenheit; der zweiten war folgende Vorbereitung voraus-

*) Diess ist eine Ausnahme von der sonst überall in dieser Abhandlung festgehaltenen Einheit 1 Millim.

**) Nicht zu verwechseln mit der Bedeutung von I, II u. s. w. bei den Camerer'schen Versuchen, wo verschiedene Beobachter dadurch bezeichnet werden.

gegangen: Die obersten Schichten der Epidermis mit einem Rasirmesser weggenommen, und 24 Stunden lang ein Handschuhfinger aus Caoutchouc getragen, wodurch die Haut viel weicher und zarter geworden war.

Es ist nicht angegeben, ob die Zeit, welche zwischen der ersten und zweiten Reihe innelag, hinreichte, den durch die erste bewirkten Uebungsfortschritt wieder aufzuheben; jedenfalls musste er durch die zur Vorbereitung der zweiten Reihe erforderliche Zeit wenigstens theilweis rückgängig geworden sein.

Die später zu verwerthenden Rechnungsresultate h, k sind wie bei den Camerer'schen Reihen der vorigen Abschnitte mit Bezug auf die folgenden Abschnitte zu verstehen. Ihre Ableitung ist überall nach der Methode der kleinsten Quadrate (Qu.) erfolgt.

Erste Gesammtreihe, mit unverdünnter Haut. Werthe $r\frac{0}{0}$.

D	I	II	III	IV	V
5	6	14	80	86	88
6	24	34	88	88	92
7	32	42	84	98	94
8	78	76	88	98	96
9	88	88	88	100	100

Zweite Gesammtreihe, mit verdünnter Haut. Werthe $r\frac{0}{0}$.

D	I	II	III	IV	V
4	68	72	76	86	92
5	68	82	78	90	94
6	88	86	90	92	98
7	90	92	92	96	100
8	96	100	100	100	100

Rechnungsresultate nach Formel F.

Bei der Specialberechnung der 1. Gesammtreihe wurden I, II, III besonders behandelt, und dabei alle 5 D's von 0,5 bis 0,9 zugezogen; IV und V sind nach der T-Methode des XV. Abschn. combinirt, aber $D = 0{,}9$ dabei weggelassen, weil $r\frac{0}{0}$ hier $= 100$. Bei der 2. Gesammtreihe wurden alle 5 Specialreihen besonders behan-

delt, aber (wegen der mehrfachen $r\frac{t}{n} = 100$) blos I durch alle D's durchgeführt, II, III, IV nur von 0,4 bis 0,7 (inl.); V blos von 0,4 bis 0,6. So wurden für I, II u. s. w. folgende Specialbestimmungen in beiden Reihen erhalten:

	1. Gesammtreihe			2. Gesammtreihe	
	h	k		h	k
I	0,1450	— 0,2433	I	0,1355	0,4006
II	0,1537	— 0,0078	II	0,1283	0,5258
III	0,0399	+ 0,9904	III	0,1175	0,6011
IV, V	0,1393	+ 0,5891	IV	0,1023	0,8691
			V	0,1315	0,9144

Dass in der ersten Gesammtreihe die Werthe III ganz ausser der Ordnung der übrigen fallen, erklärt sich aus der enormen Anomalie, welche III bei $D = 6$ zeigt, und lässt das Resultat dieser Specialreihe ausser Rücksicht beim Verfolg des Ganges der Specialwerthe fallen. Von III also abgesehen, zeigt sich gemeinsam für beide Gesammtreihen, dass h durch den Uebungsfortschritt von I bis V nur zufällig scheinende Veränderungen erleidet, wogegen k continuirlich in positivem Sinne wächst. Auch durch Hautverdünnung (nach Vergleich von 1. zur 2. Gesammtreihe) wächst h nicht, eher ist eine Abnahme im Ganzen sichtbar, wogegen k entschieden damit wächst. Wonach also der Vortheil sowohl der Uebung als Hautverdünnung für Vergrösserung der Empfindlichkeit vielmehr auf das Wachsthum von k als h zu schreiben ist.

Eine Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung ist wegen zu geringem n der Specialreihen blos nach den durch die T-Methode des XV. Abschn. erhaltenen, mittlern h, k derselben vorgenommen, und zwar bei der ersten Gesammtreihe unter Zuziehung aller Specialreihen für die 4 D's von 5 bis 8, bei der zweiten Gesammtreihe, unter Weglassung der Specialreihe V, für die 4 D's von 4 bis 7. So wurden als Mittelwerthe erhalten für:

	h	k
1. Gesammtreihe	0,1374	0,2614
2. -	0,1515	0,4688

hienach folgende Zusammenstellung zwischen beobachteten und berechneten $r\frac{f}{0}$.

D	1. Gesammtreihe		2. Gesammtreihe	
	beob.	ber.	beob.	ber.
4	—	—	76,3	74,2
5	65,9	64,0	80,8	83,4
6	75,0	75,0	89,7	89,7
7	82,2	83,3	94,3	93,9
8	90,6	89,1	—	—

Rechnungsresultate nach Formel M.

Ich habe hier blos die 2. Gesammtreihe einer entsprechenden Berechnung als nach F unterworfen, wobei ich für die Specialreihen (nach Qu.) erhielt:

	h	k	S
I	0,2125	0,5954	2,87
II	0,1869	0,3250	1,74
III	0,1725	0,2316	1,34
IV	0,1356	— 0,2095	— 1,53
V	0,1548	— 0,3598	— 2,32

Indess die mit F entsprechend geführte Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung nach den mittlern h, k der 2. Gesammtreihe

$$(h = 0{,}17403\ ; \qquad k = 0{,}23014)$$

folgendes Resultat gegeben hat:

D	$r\frac{f}{0}$	
	beob.	ber.
4	76,1	74,5
5	80,5	81,7
6	89,2	87,5
7	92,8	91,9

Blicken wir hienach von den Resultaten für M auf die für F zurück, so sieht man, dass der Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung nach den mittlern h, k der Gesammtreihe bei F und M ungefähr gleich gut stimmt; aber die Berechnung der specialen h, k führt nach M für die höchsten Uebungszustände IV, V zu einem absurden Resultate, nämlich zu negativen Werthen der mittlern Schwelle S, als welche nach Müller's Formel den Werth $\frac{k}{h}$ hat, also wegen des überall positiv bleibenden h mit negativen Werthen von k selbst negativ werden muss. Und um sich ohne mühsamen Rückgang auf die Methode der kl. Qu., welche zu obiger Bestimmung für h, k geführt hat, zu überzeugen, dass hier kein Rechnungsirrthum vorliegt, wende man die einfache Summationsmethode (nach XIV) an, durch die man zwar minder sichere Werthe für jene Constanten erhält, die aber im negativen Vorzeichen von k mit den angegebenen stimmen, nämlich für IV $h = 0{,}1404$; $k = -0{,}2035$; für V $h = 0{,}2293$; $k = -0{,}0764$. Die grosse Abweichung der letzten Werthe von den nach Qu. gefundenen aber erklärt sich daraus, dass überhaupt für V blos 3 D's zur Berechnung kommen, von denen nach Summ. das mittlere bei der Bestimmung der Constanten ausfällt; indess es nach Qu. mit eingeht.

XI. Vierordt's Massbestimmung der extensiven Empfindlichkeit ohne Formeln.

Nach den, im VII. Abschnitte aufgestellten, Principien kann man den Massvergleich der extensiven Empfindlichkeit verschiedener Hautstellen ohne Zuziehung einer Formel dadurch bewirken, dass man Distanzen darauf ermittelt, welche für die Empfindung äquivalent sind, d. i., die unmittelbar oder nach vorgenommener Reduction der Zwischenfälle, das gleiche Verhältniss von r zu n oder das gleiche procentale r_0^0 geben, indem man die Empfindlichkeit diesen äquivalenten Distanzen umgekehrt proportional setzt. Aber man kann auch bemerktermassen eine Formel suchen, welche, ohne directe Bezugnahme auf äquivalente Distanzen, Masswerthe hergiebt, die dem Princip äquivalenter Distanzen entsprechen und solche selbst rechnungsweise ableiten lässt. Den ersten Weg hat Vierordt eingeschlagen und auf ein praktisches Verfahren gebracht, den zweiten

Weg Müller und ich. Fassen wir nun hier den ersten Weg in's Auge, um auf den zweiten im folgenden Abschnitt zu kommen.

Der Vierordt'sche Weg hat ausser dem Vortheil, auch Solchen zugänglich zu sein, die mit Formeln überhaupt nicht umzugehen wissen, den Vortheil, von der Frage, welche von den vorgeschlagenen Formeln den Vorzug verdient, und ob eine solche überhaupt genügen kann, unabhängig zu sein, unterliegt aber allerdings einigen unten zu betrachtenden Nachtheilen, von denen eine triftige Formel, gelingt es anders eine solche zu finden, frei ist. Auch gestattet eine solche, die Massverhältnisse der Empfindlichkeit unmittelbar unter einfache Ausdrücke zu bringen, und fügt sich dadurch allgemeineren Betrachtungen und Verwendungen, was nicht eben so in der Natur des Vierordt'schen Verfahrens liegt. Wenn ich nun aus diesen Gesichtspunkten den Formelweg im Ganzen vorziehe und nur möglichsten Fleiss darauf wende, die triftigste Formel zu finden, so verdient doch das Vierordt'sche Verfahren um so weniger achtlos bei Seite gelegt zu werden, als es nicht nur sehr sinnreich ist und so zu sagen den ersten Schritt zu einer allgemeinen Massbestimmung in unserm Felde darstellt, sondern auch in gewissen Grenzen, nämlich für den Bereich höherer D-Werthe, als nahehin zutreffend an sich und mit dem Formelwege zusammentreffend gelten kann; wonach ich nicht unterlasse, folgends etwas näher darauf einzugehen.

Unmittelbar gelangt man überhaupt durch die Versuche nach unserer Methode zu keinen äquivalenten Distanzen im obigen Sinne; denn gesetzt, man stellt auf zwei Hauttheilen Beobachtungen mit denselben Werthen D an, so wird der empfindlichere Hauttheil ein grösseres $\frac{r}{n}$ oder einen grösseren procentalen Werth $r\,^0\!/_0$ dafür liefern, als der minder empfindliche, und hierauf lässt sich unmittelbar wohl ein Urtheil über die grössere oder geringere Empfindlichkeit des einen und andern Hauttheiles, aber kein Massvergleich derselben gründen, wozu nicht gleiche Distanzen mit verschiedenen $r\,^0\!/_0$, sondern verschiedene Distanzen mit gleichem $r\,^0\!/_0$ auf den verschiedenen Hauttheilen bestimmt sein müssen, und wie hiezu ohne langwieriges Tatonnement gelangen? Nun kann man zwar auf dem Formelwege von ersteren auf letztere zurückkommen; aber das Verfahren Vierordt's soll eben den Formelweg ersparen.

Eine authentische Angabe Vierordt's über sein Verfahren erinnere ich mich nur, bei Camerer in s. Abh. No. 1 p. 19 mit der Bemerkung gefunden zu haben, dass sie ihm von Vierordt mitgetheilt sei, wogegen sich die nach diesem Verfahren gewonnene, unten wiederzugebende, Vierordt'sche Scala mit Zusatzbemerkungen von Vierordt in seinem »Grundriss der Physiologie« 5. Aufl. 1877. p. 316 findet. Das Verfahren selbst kommt nach Anhalt an jene Darstellung darauf zurück, dass Vierordt mittelst eines graphischen Interpolationsverfahrens zwischen den r%*) der in den Versuch genommenen abgestuften D's jedes Hauttheiles ermittelt hat, welche D's auf demselben Hauttheil angewendet werden müssten, um gerade 20%, 30%, 40% u. s. w. bis zu 100% richtige Fälle, hiemit äquivalente Distanzen für diese r% auf den verschiedenen Hauttheilen zu erhalten; und um eine möglichst allgemeingültige Scala derselben zu gewinnen, hat er die Gesammtheit der in seinem Institut bis dahin von den verschiedensten Beobachtern an den verschiedensten Theilen angestellten Versuche, mehr als 6000 Einzelversuche befassend, zur Bestimmung zugezogen**).

Statt des, bei r% = 100 jeweils erhaltenen Nadelabstandes wurde nun überall die Zahl 1000 eingesetzt und die übrigen, für 20%, 30% u. s. w. gefundenen, Nadelabstände im Verhältniss hiezu ausgedrückt, kurz danach reducirt. Endlich wurden von allen so reducirten Nadelabständen, welche einer und derselben Procentzahl richtiger Fälle entsprechen, die arithmetischen Mittel genommen. So gelangte Vierordt zu folgender Scala zusammengehöriger r% und D, die ich hier so gebe, wie sie mir nicht nur früher von Vierordt selbst privatim mitgetheilt ist, sondern sich auch in den oberen Zahlen der von ihm verzeichneten Curve in seinem Grundr. p. 316 findet, nur dass da verschrieben oder verdruckt 554 statt 524 und 576 statt 567 steht***).

*) Die r% sind von Vierordt nach einer Bemerkung in s. Grundriss unter Weglassung der unentschiedenen Fälle, also nach Reductionsweise α bestimmt.

**) Die wohl erst später angestellten Versuche von Gärttner und Schimpf dürften hierin noch nicht mit inbegriffen sein.

***) Die unteren Zahlen derselben Curve entsprechen meiner früheren einfachen Formel, in welche die Constante k noch nicht mit eingeht, und die ich für kleine Distanzen nicht mehr zulänglich halte.

$r\frac{0}{0}$	D	$r\frac{0}{0}$	D
100	1000	50	439
95	861	45	411
90	776	40	385
85	680	35	359
80	634	30	332
75	599	25	306
70	559	20	277
65	524		
60	495		
55	467		

Nach dieser Tabelle nun weiss man, wenn auf einem gegebenen Hauttheil bei einem gewissen, auf beliebige Einheit bezogenen D, z. B. bei $D = 10$ Mill. ein $r\frac{0}{0}$ z. B. $= 85$ erhalten wird, dass ein $r\frac{0}{0} = 75$ auf demselben Hauttheile erhalten werden wird bei einem D, welches sich zu 10 Mill. verhält, wie sich 599 zu 680 verhält, sofern diess die in der Vierordt'schen Tabelle zu $r\frac{0}{0} = 75$ und 85 zugehörigen D-Werthe sind; und wenn man auf zwei verschiedenen Hauttheilen die verschiedenen D's bestimmt hat, die demselben $r\frac{0}{0}$ entsprechen, so wird man nach dem Princip der Vierordt'schen Tabelle in dem Verhältnisse dieser D's das allgemeine Verhältniss der D's haben, die auf diesen Hauttheilen irgend welchen gleichen $r\frac{0}{0}$ entsprechen.

Gegen die Wahl der mit D_{100} zu bezeichnenden Minimaldistanz, bei welcher $r\frac{0}{0} = 100$ wird, als Grundmass zum Vergleich der übrigen Distanzen damit, lässt sich nun freilich der Einwand erheben, dass diese Distanz D_{100} von der Grösse der Totalzahl n der Fälle mit abhängig ist, nämlich durchschnitttlich um so grösser ausfällt, je grösser n ist; wie sich nicht nur theoretisch, sondern auch empirisch bestätigt finden lässt. In der That, wenn ein gewisses D der kleinste Werth ist, welcher bei $n = 100$ alle Fälle richtig giebt, mithin diess D als D_{100} erscheinen lässt, kann doch bei $n = 200$ oder 1000 recht wohl noch ein oder der andere falsche Fall z unterlaufen, hiemit diess D die Bedeutung des D_{100} verlieren; es hat diess principiell gar keine Grenze, so dass ein absolutes D_{100} blos für ein unendliches n annehmbar ist, was nicht nur experimentell nicht erreichbar ist, sondern sich auch der graphischen Interpolation entzieht. Wirklich

geben die von mir darauf untersuchten älteren Camerer'schen Reihen, deren Werthe $r\frac{0}{0}$ sowohl aus $n = 200$ als $n = 100$ abgeleitet vorliegen, für $n = 100$ natürlicherweise doppelt so viel Reihen als für $n = 200$, aber weit mehr als doppelt so viel Werthe D_{100}. So hatte Hedwig im Ganzen (nur mit Beiseitlassung des Oberarms) 18 D_{100} für $n = 200$, hingegen 48 für Theilung derselben Fälle in $n = 100$; Ida 3 für $n = 200$, 17 für $n = 100$. Die Tübinger Beobachter aber haben keineswegs alle bei demselben n beobachtet, und selbst vielfach bei verschiedenen D's gewechselt. Ausserdem hat die genaue Bestimmung des wirklich minimalen D_{100} bei jedem n ihre Schwierigkeit.

Inzwischen trifft diese Bemerkung nicht die Triftigkeit des Verfahrens überhaupt, sondern eben blos die Wahl des D_{100} als Grundmass, mit dem man die andern D's vergleicht; diese aber behalten rücksichtslos auf den Werth von D_{100}, den man für $r\frac{0}{0} = 100$ ansetzt, und ob man die Scala überhaupt bis $r\frac{0}{0} = 100$ fortsetzt, das aus dem Interpolationsverfahren hervorgehende Verhältniss, und so ist auch Camerer, indem er diesem Verfahren seine ältern Versuche unterzog (No. 1 p. 19) nur bis zu $r\frac{0}{0} = 95$ aufwärts damit gegangen, welchem in Vierordt's Scala ein $D = 851$ zugehört. Kurz, von hier aus erhebt sich kein wesentlicher Einwand.

Hienach liess sich zusehen, wiefern die von Camerer in jenen älteren Versuchen gefundenen Verhältnisse mit den obigen in Vierordt's Scala stimmen; und der von $r\frac{0}{0} = 95$ bis $r\frac{0}{0} = 55$ herabgeführte Vergleich ergiebt eine sehr zufriedenstellende Zusammenstimmung zwischen beiden, nämlich:*)

$r\frac{0}{0}$	95	85	75	65	55	
D	851	680	599	524,8	467	Vierordt
	850	684,7	595,9	527	471,5	Camerer

Nicht minder stimmt in diesen Grenzen das Ergebniss meiner früheren einfachen Formel, in welche eine, gegen höhere D's weniger

*) Camerer giebt in dieser Zusammenstellung als Vierordt'sche Zahlen statt der obigen, welche der Tabelle S. 177 entnommen sind, vielmehr folgende: 850, 685, 594, 524, 468; doch sind das nicht die von Vierordt direct nach seinem Verfahren gefundenen, sondern nach meiner früheren einfachen Formel von ihm corrigirten.

in Betracht kommende Constante (k) bei Seite gelassen ist, mit Vierordt's obigen Zahlen sehr nahe überein, man hat nämlich nach Reduction der Ergebnisse meiner Formel auf Vierordt's Einheit**)

$r\frac{0}{0}$	95	90	85	80	75	70	65	60	55	
D	851	776	680	634	599	559	524	495	467	Vierordt
	866,5	757,5	688,3	635,9	593,1	556,5	524,3	495,4	469,1	Fechner

Nur bei den zwei allerhöchsten $r\frac{0}{0}$, d. i. 90 und 95, gehen die Zahlen für D zwischen Vierordt und Fechner etwas stark auseinander; dass aber jedenfalls das Vierordt'sche D für $r\frac{0}{0} = 90$ hiebei in Nachtheil gegen das Fechner'sche ist, ergiebt sich leicht aus dem Vergleich des Ganges der beiderseitigen Differenzen zwischen den aufsteigenden D's, wesshalb auch Vierordt sich zu einer Correction des D für dieses $r\frac{0}{0}$ nach meiner einfachen Formel, welche ihm damals allein vorlag, entschlossen hat.

Unstreitig nun spricht diese nahe Uebereinstimmung zwischen Vierordt, Camerer und mir von vornherein eben so für Vierordt's Verfahrungsweise als Camerer's ältere Versuche als meine einfache Formel; und es kann zunächst nur auffallen, dass eine solche nahe Uebereinstimmung überhaupt möglich war. Die Versuche im Tübinger Institut, deren Resultate Vierordt in seiner Scala zusammengefasst hat, sind doch nach früher gemachten Bemerkungen nicht alle vergleichbar unter einander und mit Camerer's Versuchen angestellt, und meine einfache Formel genügt nach den neuen Versuchen Camerer's nicht vollständig, und hat desshalb später einer allgemeiner zutreffenden Platz gemacht. Man muss also glauben, dass auf Abweichungen dieser verschiedenen Bestimmungswege oberhalb $r\frac{0}{0} = 55$ überhaupt nicht viel ankommt; unter $r\frac{0}{0} = 55$ ist aber von Camerer der Vergleich seiner Versuchsergebnisse mit den Vierordt'schen Zahlen nicht fortgeführt; und schon die Ergebnisse meiner einfachen Formel stimmen nach demgemäss vorgenommener Prüfung nicht sonderlich mit den Vierordt'schen unter $r\frac{0}{0} = 55$; um so weniger können

*) Diese Reduction ist dadurch geschehen, dass, wenn ΣV die Summe der Vierordt'schen Zahlen für die D, ΣF die der Fechner'schen ist, jede einzelne Fechner'sche Zahl mit $\frac{\Sigma V}{\Sigma F}$ multiplicirt ist.

die meiner vollständigeren Formel damit stimmen, welche sich an den kleinen Distanzen der neuen Camerer'schen Versuche gut bestätigt, indess die einfache Formel hier nicht mehr ausreicht; wonach ich es allerdings bedenklich halten muss, die Vierordt'schen Zahlen unterhalb $r\frac{0}{0} = 55$ noch für massgebend zu halten.

Der principiellste Einwand gegen das Vierordt'sche Verfahren aber, wenn es bis auf kleine Distanzen ausgedehnt werden soll, ist dieser.

Die Construction der Vierordt'schen Scala für den Empfindlichkeitsvergleich setzt bemerktermassen voraus, dass die Distanzen, welche ein gleiches $r\frac{0}{0}$ auf verschiedenen Hauttheilen geben, bei niederen und höheren Distanzen ein gleiches Verhältniss zu einander behalten, womit natürlich zusammenhängt, dass, wenn von zwei Hauttheilen *A*, *B* der eine bei kleinen Distanzen grössere $r\frac{0}{0}$ als *B* giebt, diess auch bei grösseren Distanzen der Fall sein wird; aber diess ist keineswegs allgemein der Fall, sondern das Verhältniss des Vortheils ändert sich im Allgemeinen im Uebergange von den kleineren zu den grösseren Distanzen und kann sich selbst umkehren, ohne dass Beobachtungsfehler oder Ungleichförmigkeiten der Empfindlichkeit zur Erklärung hinreichen. Das Vierordt'sche Princip giebt hievon keine Rechenschaft, und Vierordt's Scala repräsentirt diesen Umstand nicht, indess die Möglichkeit solcher Umkehr sowohl durch meine als Müller's Formel repräsentirt wird. Inzwischen hindert diess nicht, dass für grössere Distanzen das Vierordt'sche Princip und die Vierordt'sche Scala nahehin richtig bleibt, weil der constante Werth (k), von dem diese Möglichkeit der Umkehr abhängt, nach Massgabe als D wächst, an Einfluss verliert, wie weiterhin (im XII. Abschn.) zu zeigen.

XII. Massbestimmung durch Formeln. Müller's Formel (M) und meine Formel (F). Einige fundamentale Discussionen mit Müller.

Es sind mehrerwähntermassen bis jetzt zwei Formeln für Massbestimmung der extensiven Empfindlichkeit der Haut aufgestellt worden, eine solche von Müller (M) in seiner S. 118 erwähnten Abhandlung und eine solche von mir (F) in m. »Revision« p. 425, wo-

zwischen die Entscheidung theils nach theoretischen Gesichtspunkten, theils auf empirischen Wege zu suchen ist. Auf ersten Weg wird schon in diesem Abschnitte, auf den zweiten erst im XVI. Abschnitte näher eingegangen werden; die letzte Entscheidung ist jedenfalls blos auf dem zweiten zu finden. Vor Eingehen auf den Streit beider Formeln aber richten wir erst das Augenmerk auf die ihnen gemeinsamen Gesichtspunkte.

Beide Formeln sind als Grundformeln Integralformeln, welche sich auf keinen endlichen Ausdruck reduciren lassen, indem in beide das Gauss'sche Integral der Fehlerwahrscheinlichkeit, nur in sehr verschiedener Verwendung, eingeht. Unmittelbar lässt sich daher weder von der einen noch andern Gebrauch für unsere Zwecke machen, wohl aber, indem man sie, nach schon früher (S. 165) gemachter kurzer Bemerkung, in eine, für beide verschiedene, Fundamentaltafel übersetzt, welche im Sinne der betreffenden Grundformel zu jedem Werthe $r\,\%$ einen Werth t (oder τ) giebt, dessen Beziehung zu den Masswerthen der extensiven Empfindlichkeit durch eine sehr einfache Formel gegeben ist, die wir die secundäre nennen wollen. Diese secundäre Formel mit der zugehörigen Fundamentaltafel vertritt für die praktische Verwendung und empirische Prüfung vollkommen die Grundformel selbst, und es würde müssig sein, auf diese selbst zurückgehen zu wollen, so lange man nur eben die praktische Verwendung und Prüfung der Formel im Auge hat. Da es indess im theoretischen Interesse doch nöthig ist, auch die Grundformeln selbst und die Gesichtspunkte, aus denen man dazu gelangt ist, kennen zu lernen, so wird zuletzt noch darauf eingegangen werden, nachdem wir zuvor die secundären Formeln angeführt und für die davon zu machende Anwendung erläutert haben.

Beide, Müller und ich, beziehen unsere Formeln principiell auf die Unterscheidung nur von zweierlei Fällen, richtigen und falschen, nach Müller r und f, nach mir r und z. Wo bei den Versuchen noch Zwischenfälle vorkommen, wird dieselbe Formel von Müller einmal auf die r ohne Zurechnung der Zwischenfälle, zweitens auf die r mit Zurechnung derselben angewandt, wovon ersteres bemerktermassen unserm Verfahren α, letzteres unserm Verfahren β entspricht (s. S. 144), ohne dass er eine Zurückführung beider Bestimmungen auf eine einheitliche vornimmt, wogegen von mir im Falle von Zwischen-

fällen zunächst die Frage freigelassen wird, ob die Reduction auf zweierlei Fälle nach α, nach β oder nach einem Mittel zwischen beiden γ zu geschehen habe, indem diess von einer erfahrungsmässigen Prüfung abhängig gemacht wird. Im Princip der Aufstellung und Verwendung der Formeln selbst ändert sich jedoch durch diese Verschiedenheit nichts. Uebrigens ist dieser Unterschied zwischen Müller und mir schon früher (S. 146) hinreichend besprochen.

Die im folgenden Abschnitt mitzutheilenden Fundamentaltafeln sind für procentale Werthe von r aufgestellt. Wir gehen also mit dem irgendwie reducirten $r\frac{r}{n}$ in die Müller'sche oder Fechner'sche Fundamentaltafel ein, je nachdem wir die eine oder andere Formel prüfen oder verwenden wollen; und finden dazu einen Werth t. Müller hat dafür die Bezeichnung τ, die ich aber aus dem formellen Grunde leichteren Vergleiches beider Formeln durch den von mir für beide gemeinsam gebrauchten Buchstaben t ersetze, ohne dass diess in der Sache etwas ändert.

Der zu $r\frac{r}{n}$ zugehörige Werth t der Fundamentaltafeln geht nun bemerktermassen als Vertreter des $r\frac{r}{n}$ in die secundären Formeln ein, von denen wir Gebrauch zu machen haben. Es sind folgende:

$$t = hD + k \text{ nach Fechner (F)}$$
$$t = hD - k \text{ nach Müller (M)},$$

worin h, k für den ganzen Bereich der Distanzen und für die ganze Dauer der Versuche, wofür die Formeln gelten sollen, als constant anzusehen sind, so lange man den Hauttheil und die Umstände der Versuche nicht wechselt.

Beide Formeln haben, wie man sieht, eine ganz entsprechende Form, nur dass bei M an die Stelle des positiven Vorzeichens, was k bei F hat, ein negatives tritt; die Bedeutung und der Werth der Buchstaben aber ist, abgesehen von D, in beiden Formeln sehr verschieden; und hienach könnte es überhaupt unzweckmässig scheinen, dieselben Buchstaben dafür zu brauchen, wenn nicht an der analogen Form, welche die Gleichungen für t dadurch erhalten, gemeinsame Punkte der Berechnung hingen, deren Darstellung sich dadurch vereinfacht. Eine Verwechslung der Bedeutungen ist aber nach den bestimmt unterscheidenden Erklärungen darüber nicht möglich, wenn man nur immer die respective Beziehung auf M oder F dabei im Auge behält.

Insofern der Werth t und mithin (durch Vermittlung der Fundamentaltafel) der Werth $r\frac{0}{0}$ bei gegebenem D von der Grösse der Constanten h, k abhängt, natürlicherweise aber*) die Empfindlichkeit eines Hauttheiles für um so grösser gelten muss, je grösser $r\frac{0}{0}$ bei gegebenem D ist, können die Constanten h, k aus allgemeinem Gesichtspunkte als charakteristisch für die Empfindlichkeit eines Hauttheils angesehen werden; und zwar gilt diess principiell sowohl für die Formel M als F. Also besteht die Aufgabe, für jeden Hauttheil diese Constanten zu bestimmen, was aus den auf demselben angestellten Beobachtungen selbst geschehen kann, wie weiterhin (im XIV. Abschn.) angegeben werden wird. Ist es geschehen, so gewinnt man durch Substitution dieser Werthe h, k für jeden Hauttheil insbesondere in die allgemeine Formel

$$t = hD \pm k$$

(unter Anwendung des oberen oder unteren Vorzeichens je nach F oder M) eine Specialformel für einen jeden, welche zunächst Folgendes leistet: man erhält danach für jedes D einen Werth t, der mittelst der Fundamentaltafel zu einem zugehörigen Werthe $r\frac{0}{0}$ führt; und hält man den allgemeinen Begriff eines Empfindlichkeitsmasses fest, wonach die extensive Empfindlichkeit umgekehrt proportional den Werthen D ist, die das Gleiche für die Empfindung leisten, unsernfalls also das gleiche $r\frac{0}{0}$ liefern, so lassen sich diese äquivalenten Distanzen und hienach Massverhältnisse der Empfindlichkeit auf verschiedenen Hauttheilen nach der einen wie andern Formel in alsbald anzugebender Weise finden.

Allgemein kann man sagen, dass die Empfindlichkeit jedes Hauttheiles von zwei Werthen abhängt: einem mit den Distanzen proportionalen hD, der für die Einheit der Distanz auf h zurückkommt, und einem von den Distanzen unabhängigen k, und dass zwei Hauttheile bei solchen Werthen D das gleiche $r\frac{0}{0}$ geben, mithin in diesem Sinne äquivalent sind, bei welchen das $t = hD \mp k$ des einen, wovon sein $r\frac{0}{0}$ nach der Fundamentaltafel abhängt, dem des anderen gleich ist.

Seien also für einen Hauttheil A die Werthe h, k gleich h_a, k_a, für einen andern B gleich h_b, k_b gefunden, mithin allgemein

*) Wenn Müller dieser natürlich scheinenden Auffassung doch widerspricht, so wird diess unten seine Berücksichtigung finden.

$$t_a = h_a D_a \pm k_a \text{ für } A$$
$$t_b = h_b D_b \pm k_b \text{ » } B$$

und es werde zu einer beliebigen Distanz $D_a = a$ auf A die äquivalente $D_b = b$ auf B gesucht, so setze man unter Substitution von b und a für D_a und D_b in vorige Formeln

$$t_a = t_b \text{ d. i. } h_a \cdot a \pm k_a = h_b \cdot b \pm k_b$$

und bestimme hieraus das Aequivalenzverhältniss $\frac{b}{a}$, was man erreicht, wenn man auf beiden Seiten mit $h_b \,.\, a$ dividirt und $\frac{b}{a}$ auf eine Seite bringt. So erhält man:

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} \pm \frac{k_a - k_b}{h_b\, a},$$

eine Formel, welche dem Princip des Vierordt'schen Verfahrens entgegen zu dem an sich merkwürdigen, doch der Erfahrung entsprechenden, Ergebniss führt, dass das Verhältniss der äquivalenten Distanzen sich mit den Distanzen selbst ändert, indem dem Verhältniss $\frac{b}{a}$ auf der einen Seite der vorigen Gleichung ein Werth auf der anderen Seite entspricht, in dessen zweites Glied der Werth a selbst mit eingeht, zu dem der äquivalente Werth b gesucht wird. Wenn also z. B. auf einem Hauttheile A die Distanz 1 äquivalent der Distanz 2 auf einem andern Hauttheile B ist, so hat man nicht zu schliessen, dass der Distanz 2 auf A die Distanz 4 auf B äquivalent ist; sondern es kann je nach Aussage der vorigen Gleichung eine grössere oder kleinere Distanz als 4 sein, welche auf B dasselbe $r\frac{0}{0}$ giebt.

Diess bedeutet nun nach dem allgemeinen Empfindlichkeitsmasse, dass das Verhältniss der Empfindlichkeiten zwischen zwei Hauttheilen von Stelle zu Stelle wechselt, und zwar gilt diess principiell auch dann, wenn, wie bei unsern Formeln vorausgesetzt ist, auf jedem Hauttheile für sich die Empfindlichkeit durch die ganze Ausdehnung desselben gleich bleibt, was man daran erkennt, dass diese Ausdehnung in kleineren Theilen untersucht überall dasselbe $r\frac{0}{0}$ für gleiche grosse Theildistanzen D giebt. Nun könnte man hierin einen Widerspruch sehen; aber schon auf jedem Hauttheil für sich kann man, trotz gleichförmiger Empfindlichkeit über seiner ganzen Ausdehnung, von dem $r\frac{0}{0}$, was bei dem einfachen D erhalten wird, nicht nach irgend einer einfachen Proportion auf das $r\frac{0}{0}$ schliessen, was bei einem

vielfachen D erhalten wird, sondern $r\frac{0}{0}$ ändert sich auf einem und demselben Hauttheil vom einfachen zum vielfachen D nach den Werthen h, k in einer Weise, mit welcher die Aenderung der Verhältnisse äquivalenter D's auf zwei verschiedenen Hauttheilen mathematisch im Sinne der vorigen Gleichung zusammenhängt. Auch leuchtet ja aus allgemeinem Gesichtspunkte ein, dass, wenn die Empfindlichkeit jedes Hauttheiles ausser von einem mit der Distanz proportionalen Werthe hD auch von einem davon unabhängigen Werthe k abhängt, das Empfindlichkeitsverhältniss zweier Hauttheile, in denen h und k verschieden sind, sich mit der Grösse von D ändern muss.

Man würde übrigens sehr irren, wenn man meinte, dass diese eigenthümlichen Verhältnisse durch die Formeln erst eingeführt werden; sie bestehen abgesehen davon, und die Formeln haben nur den Sinn, sie schärfer und allgemeiner zu fassen, als es ohnedem möglich sein würde.

In der That, will man eine allgemeine und scharfe Regel haben, wie sich das Aequivalenzverhältniss und hiemit Empfindlichkeitsverhältniss zwischen zwei Hauttheilen mit der Grösse ihrer D ändert, so kann man eine solche eben nur durch die obige Gleichung für $\frac{b}{a}$ gegeben finden, kann aber dabei folgende Bemerkung machen. Je grösser das a wird, zu dem man die äquivalente Distanz b sucht, desto mehr nähert sich das zweite Glied der zweiten Seite der Gleichung für $\frac{b}{a}$ dem Verschwinden und hiemit der Werth $\frac{b}{a}$ dem Werthe $\frac{h_a}{h_b}$; und so kann man, um zur Charakteristik des Empfindlichkeitsverhältnisses zweier Hauttheile ein einziges charakteristisches Verhältniss zu benutzen, den Grenzwerth $\frac{h_a}{h_b}$ dafür nehmen, dem sich das Empfindlichkeitsverhältniss um so mehr nähert, je mehr die Distanz a, zu der man die äquivalente sucht, wächst, und kann diess Verhältniss das Hauptverhältniss nennen; dazu noch bemerken, dass sich das wahre Empfindlichkeitsverhältniss diesem Hauptverhältniss auch um so mehr für jedes gegebene a nähert, je mehr sich k_a und k_b der Gleichheit oder beide dem Verschwinden nähern.

Es wird sich nun auch leicht verstehen lassen, wie zwischen zwei Hauttheilen derartige Fälle eintreten können, dass, bei immer gleich genommenen D's auf beiden, das t und mithin $\frac{r}{n}$ auf dem

einen bei kleinen, hingegen bei dem anderen bei grossen *D*'s überwiegt. Gehen wir nämlich zu den Extremen, so verschwindet bei kleinsten *D*'s der Werth *hD* gegen *k*, bei grössten hingegen *k* gegen *hD*, und hängt erstenfalls *t*, mithin $\frac{r}{n}$, blos von *k*, zweitenfalls blos von *hD* ab. Sei nun $k_b > k_a$, h_a aber $> h_b$, so wird nach der Abhängigkeit des $r\frac{0}{0}$ von *t* vermöge der Fundamentaltafel auch ein Gegensatz im Verhältnisse von $r\frac{0}{0}$ im Uebergange von einem Extrem zum andern eintreten können.

Die bisherigen Betrachtungen sind gemeinsam auf die Formel M und F anwendbar; hingegen führen beide nach anderen Beziehungen zu sehr verschiedenen Resultaten, weil der Uebergang von $r\frac{0}{0}$ zu *t* je nach den Fundamentaltafeln für F und M ein verschiedener und das Vorzeichen von *k* in den Formeln entgegengesetzt ist. Meinerseits nun wüsste ich die Constanten meiner Formel überhaupt nur einerseits durch ihre vorhin besprochene Leistung, äquivalente Distanzen danach finden zu können, andererseits ihre Abhängigkeitsverhältnisse von den Versuchsumständen (XVII) zu charakterisiren. Müller hingegen hat seine Formel unter Voraussetzung gewisser Bedeutungen ihrer Constanten abgeleitet, wovon zunächst zu sprechen.

Seine secundäre Formel lautet nach ihrer ursprünglichen Ableitung aus der Grundformel so:

$$t = h(D - S) = hD - hS = hD - k\ ,$$

worin *S* die als constant angenommene mittlere Raumschwelle im gleich anzugebenden Sinne bezeichnet. Durch Zusammenziehung des Productes der beiden Constanten *h*, *S* in eine Constante *k* aber gewinnt er die secundäre Formel, wie sie oben angegeben und zu den bisherigen Folgerungen benutzt ist, bei welchen noch kein Anlass war, auf die Zusammensetzung des Müller'schen *k* einzugehen. Sind *h* und *k* nach Anleitung des XIV. Abschnittes gefunden, so ergiebt sich dann daraus $S = \frac{k}{h}$.

Unter Raumschwelle ist der Werth der Distanz *D* verstanden, unterhalb dessen die Distanz als einfach erscheint, d. i. nach mir ein *z* oder nach Müller *f* giebt. Müller denkt sich nun, dass dieser Werth im Laufe der Versuche nach Gauss'schem Fehlergesetze variirt; das Mittel dieser Werthe ist *S*, und die durchschnittliche extensive Empfindlichkeit während der Versuche ist nach ihm reci

prok dem Werthe S, oder proportional mit $\frac{1}{S}$; der Werth h aber hat für Müller blos eine Nebenbedeutung. Wenn nämlich unter δ die zufälligen Abweichungen der variirenden Schwelle von ihrem Mittel verstanden werden, und mit δ_n das Mittel der δ rücksichtslos auf ihr Vorzeichen bezeichnet wird, so ist nach Müller h das Präcisionsmass dieser Abweichungen im Sinne des Gauss'schen Gesetzes und als solches (bekanntlich) $h = \frac{1}{\delta_n \sqrt{\pi}}$; also h umgekehrt proportional dem Mittel der zufälligen Abweichungen, mithin nur massgebend für die grössere oder geringere Variabilität der Schwelle rücksichtslos auf den mittleren Werth der Schwelle selbst.

Freilich hat diese Auffassung der Constanten ihre Schwierigkeiten, die abgesehen von jeder experimentellen Prüfung derselben bestehen.

Sie widerspricht nämlich zuvörderst der, doch von vornherein selbstverständlich scheinenden, Auffassung, wonach von zwei Hauttheilen derjenige als der empfindlichere anzusehen ist, welcher unter vergleichbaren Umständen bei demselben D ein grösseres $r\frac{r}{n}$ giebt. In der That hängt nach Müller's Formel t und mithin $r\frac{r}{n}$ nicht blos von S, sondern (so gut als nach meiner Formel) auch von h ab, wie er selbst p. 230 ff. seiner Abh. ausführt; doch soll h nichts mit dem Masse der Empfindlichkeit zu schaffen haben, als welches blos durch den reciproken Werth von S, d. i. $\frac{1}{S}$ bestimmt werde. Hienach aber wäre die Empfindlichkeit bei gleichem D auf zwei Hauttheilen A, B, trotz grösseren $r\frac{r}{n}$ auf A, doch grösser für B anzunehmen, wenn $\frac{1}{S} = \frac{h}{k}$ grösser auf B als A ist, Fälle, die mit Rücksicht, dass h und S in keiner nachweisbaren Grössenabhängigkeit von einander stehen, sehr wohl vorkommen können. Müller selbst giebt diese Folgerung nicht nur zu, sondern besteht in seinen kritischen Bemerkungen p. 226 ff. darauf. Eine solche Auffassung aber lässt sich meines Erachtens nicht halten.

Denn zuvörderst liefert uns die Methode unmittelbar nichts Anderes, wonach wir die grössere oder geringere Empfindlichkeit beurtheilen können, als den Werth $r\frac{r}{n}$; und Müller's Auffassung erscheint daher von vornherein befremdlich und verdächtig. Aber sehen wir näher zu, und knüpfen dabei an folgende unzweideutige

Bemerkung Müller's (p. 229 seiner Abh.) an: »Die Voraussetzung sei eine irrige, dass die Spitzenabstände, die erforderlich sind, um an zwei verschiedenen Hautstellen ein gleiches $\frac{r}{n}$ zu geben, nur von den Feinheitsmassen des Ortssinnes beider Hautstellen abhängig sind, und uns über das Verhältniss beider Aufschluss geben können.«

In der That hat man nicht anzunehmen, dass die betreffenden Abstände nur von der Feinheit des Ortssinnes abhängig seien, sondern es ist gewiss, dass das Verfahren selbst Zufälligkeiten der äusseren Application und inneren Auffassung der Distanzen einführt, die bei verschiedenen Individuen eine verschiedene Rolle spielen, und dadurch Verschiedenheiten des $r\frac{0}{0}$ bei ihnen bedingen können, die man Unrecht thäte, auf verschiedene Empfindlichkeit zu schreiben; von anderer Seite aber eben so gewiss, dass, welcher Art diese Zufälligkeiten sein mögen, sie um so weniger im Stande sein werden, einen richtigen Fall in einen falschen zu verwandeln, je grösser die Empfindlichkeit ist, dass also unter Voraussetzung eines gleichen Spieles der Zufälligkeiten in den verschiedenen Versuchsreihen, sei es desselben oder verschiedener Individuen, der verschiedene Procentsatz richtiger Fälle allerdings verwerthbar für das Mass ihrer Empfindlichkeit sein kann, wofür es nur eben gilt, die zulängliche Formel zu finden. Nun kann man freilich eine volle Vergleichbarkeit in jener Hinsicht bei allen Versuchsreihen nicht erzwingen, aber doch das Möglichste thun, sie herbeizuführen und zu erhalten; und jedenfalls ist nur ein vergleichbares Mass möglich, insoweit es gelingt, solche zu erzielen. Auch gilt diess nicht blos für die Methode der r. u. f. F., sondern nicht minder für die der mittleren Fehler, und ist an mehr als einem Orte von mir betont worden. Hienach aber wüsste ich nicht, was hindern könnte, auf folgende Betrachtung folgende Definition zu gründen: Insofern das Spiel von Zufälligkeiten bei den Versuchen nach unserer Methode vergleichbar gehalten wird, kann die verschiedene Grösse des $r\frac{0}{0}$ nur noch von der verschiedenen Empfindlichkeit der Hauttheile abhängen, und wir nennen nun die extensive Empfindlichkeit m-mal so gross, wenn eine Grösse des Hauttheiles $= \frac{1}{m}$ hinreicht, dasselbe $r\frac{0}{0}$ herbeizuführen, oder setzen sie, was dasselbe sagt, den in Betreff des $r\frac{0}{0}$ äquivalenten, Distanzen reciprok; ja ich wüsste

nicht, welche andere rationelle Erklärung über das Empfindlichkeitsmass es auf Grund jener Betrachtung geben kann, oder welche erfolgreicher zu einer sachlichen Untersuchung überleiten könnte, die sich hienach damit zu beschäftigen haben wird, welchen Verhältnissen und Gesetzen die so verstandenen äquivalenten Distanzen unterliegen; und das wird sein Interesse behalten, auch wenn diese Distanzen nicht durch den Mittelbegriff der Empfindlichkeit verknüpft würden. Man muss dabei in Betracht ziehen, dass Empfindlichkeit überhaupt ein Begriff ist, dessen Definition nichts Anderes wollen kann, als ein sachliches Verhältniss klar so zu bezeichnen, dass damit der Untersuchung gesetzlicher Verhältnisse, welche die Entstehung der Empfindung betreffen, ein fruchtbarer Angriff gewährt wird. Sonst schwebt das Wort Empfindlichkeit müssig in der Luft.

Unstreitig wird sich weder erschöpfend sagen noch überall scharf scheiden lassen, welcherlei Zufälligkeiten überhaupt bei unserer Methode eine Rolle spielen, doch an Mancherlei erinnern lassen, was jedenfalls mit in Betracht kommt. So wird die verschiedene Anbringungsweise der Spitzen einen zufällig wechselnden Einfluss haben. — Wie sehr die Einbildungskraft bei den Versuchen mitspielt, geht aus dem grossen Unterschiede in der Grösse des $r\frac{0}{0}$ je nach wissentlichem und unwissentlichem Verfahren hervor, und von wieviel Zufälligkeiten mag sie mitbestimmt werden! — Da richtige und falsche Fälle nicht scharf geschieden sind, können die Fälle nach zufälliger äusserer oder innerer Mitbestimmung bald mehr dahin, bald mehr dorthin verlegt werden. — Der grosse Einfluss, den der Contrast, d. i. Erinnerungsvergleich der gegenwärtigen Distanzen mit vorausgegangenen Distanzen, auf den Ausfall in der Grösse des $r\frac{0}{0}$ äussert, ist im VI. Abschnitte besprochen. Nun kann man zwar den Contrast von bestimmter Richtung mit kurz zuvor geprüften Distanzen durch langsame Versuchsfolge ausschliessen, wie in den neuen Camerer'schen Versuchsreihen geschehen ist, aber nicht den zufälligen Erinnerungsvergleich mit früher vorangegangenen Eindrücken. — Alles das und dergleichen sind Aenderungen, die mit Schwankungen der Schwelle an sich nichts zu thun haben, und deren Erfolg doch von Müller auf Schwankungen der Schwelle geschoben wird; denn wie anders bringt Müller solche in Rechnung?

Unstreitig zwar ist die Raumschwelle an sich selbst nicht absolut unveränderlich; aber viel wahrscheinlicher als Müller's Annahme scheint mir, dass sie nur nach Aenderung allgemeiner körperlicher Zustände allmälige Aenderungen von einer Zeit zur andern erfährt, und anstatt auf zufällige Aenderungen derselben in Müller's Sinne rechnen zu sollen, scheint mir räthlicher, sich von Aenderungen derselben überhaupt so unabhängig als möglich zu machen, und desshalb auch misslich, Versuche, die an demselben Individuum in von einander entlegenen Zeiten angestellt sind, hinsichtlich der unterliegenden Empfindlichkeit für vergleichbar zu halten. Gewiss ist, dass, so lange die Richtigkeit von Müller's Hypothese fraglich bleibt, auch die Triftigkeit der Ableitung seiner Formel noch Zweifeln unterliegt.

Unstreitig aber spielt bei ihrer Aufstellung überhaupt eine wesentliche Rolle der zu beschränkte Begriff des Empfindlichkeitsmasses, den Müller in seinem Buche »Zur Grundlegung der Psychophysik« vertritt und auch hier in Anwendung bringt, wonach überall das Mass der Empfindlichkeit nur in dem reciproken Werthe des Schwellenwerthes zu suchen sein soll; wogegen ich in meiner »Revis.« geltend gemacht habe, dass man vielmehr, um ein allgemeineres Mass auch für *D*'s zu haben, welche die Schwelle überschreiten oder unterschreiten, das Mass allgemein reciprok setzen müsse dem Werthe von *D*, der für die Empfindung gleichwerthig ist, der nun aber bei unserer Methode, sei es nach F oder M, nicht blos von einer Constante *h*, *k* oder *S*, sondern von zweien, hierunter jedenfalls mit von *h*, abhängt.

Zu der vorigen Unzuträglichkeit aber tritt noch folgende zweite.

Zunächst scheint sich allerdings die Müller'sche Grundformel für die absolute Empfindlichkeit, mit der wir hier zu thun haben, durch ihre Analogie mit der Formel für die Unterschiedsempfindlichkeit zu empfehlen, betreffs deren zwischen uns kein wesentlicher Streit besteht*), wird aber eben damit dem wesentlichen Unterschiede nicht gerecht, der zwischen beiden Arten der Unterschiedsempfind-

*) Vgl. hierüber Müller's Schrift »Zur Grundlegung der Psychophysik« und meine »Revision«.

lichkeit besteht, dass nämlich ein Unterschied, als z. B. Gewichts-Unterschied, factisch wie der Auffassung nach aus dem Positiven in's Negative übergehen kann, nicht so eine absolute Grösse, wie eine Distanz. Die Müller'sche Formel, oder Müller's Auffassung der Constanten in seiner Formel, schliesst aber die principielle Möglichkeit eines solchen Ueberganges ein, indem die Raumschwelle, welche nichts anderes ist, als die Distanz, unterhalb deren keine r mehr auftreten können, danach kein Hinderniss findet, auch negative Werthe anzunehmen.

In der That, die Variation δ der mittleren Raumschwelle S befolgt angeführtermassen nach Müller das Gauss'sche Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit, wonach eine Variation der Schwelle in's Unbestimmte eben so nach negativer als positiver Seite möglich sein müsste; die mittlere Schwelle kann aber doch durch ihre Variation δ absolut nicht kleiner als ihre eigene Grösse, also nicht negativ werden, kurz, es fehlt an der zum Gauss'schen Gesetze gehörigen Symmetrie der Abweichungen nach beiden Seiten vom mittlern Werthe. Müller selbst hat in s. Abhandlung (p. 208) diese Schwierigkeit anerkannt, ihr jedoch durch die Bemerkung zu begegnen gesucht, dass die Formel doch als eine hinreichend approximative innerhalb der Grenzen der Versuche gültig sein könne; und hiegegen liesse sich allgemein gesprochen nichts sagen; aber stellen wir einmal die Rechnung nach M bezüglich der für M günstigsten Combination in der ersten Abth. der neuen Camerer'schen Handgelenkversuche (no. 1) an, d. i. $MW\beta$, der günstigsten insofern, als sie nach der Prüfungstafel S. 168 das kleinste $\Sigma\varepsilon^2 = 4{,}7$ liefert, so zeigt sich, dass die mittlere Schwankung δ_n hier mehr als das $1\frac{1}{2}$ fache von S beträgt, so dass nicht etwa blos einige zu vernachlässigende Grenzfälle, sondern weit der grösste Theil der nach negativer Seite hin gehenden Fälle unmöglich wird, die doch eintreten müssten, sollte die Müller'sche Formel mit der Bedeutung der Buchstaben, die ihnen Müller beilegt, bestehen.

In der That haben wir nach der Tabelle B des VI. Abschn. für $MW\beta$ in no. 1 (nach T, nur etwas weniger nach R)

$$h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\delta_n} = 0{,}1305\,;\; k = h\,S = 0{,}353\,,$$

mithin

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 0,1305} = 4,323\,; \quad S = \frac{k}{h} = 2,705$$

$$\frac{S}{\delta_n} = k\sqrt{\pi} = 0,6257.$$

Also wenn die Schwelle sich von ihren Mittelwerthe 2,705 aus um diese ihre eigne Grösse nach negativer Seite verändert hat, kann sie sich nicht weiter verändern, ohne negativ, hiemit absurd zu werden, hat aber hiemit erst den 0,6257 ten Theil des 4,323 betragenden mittlern δ_n erreicht, über welchen hinaus nach einer das Gauss'sche Gesetz repräsentirenden Tabelle fast $\frac{2}{3}$ der nach negativer Seite gehenden δ zu suchen sind, die also dem Gauss'schen Gesetze zuwider nicht zu Stande kommen können.

Etwas weniger, doch immer noch ungünstig genug, stellt sich die Rechnung für die vortheilhafteste Combination von M in no. 2, d. i. $MW\gamma$, mit $h = 0,112$, $k = 0,477$, hienach $S = 4,259$, $\delta_n = 5,035$, $\frac{S}{\delta} = 0,8454$; wo immer noch ungefähr die Hälfte der nach negativer Seite gehenden Abweichungen unmöglich wird.

Ich habe die Rechnung (nach Qu. und T) auch für die unvortheilhafteren Combinationen geführt, und überhaupt für $\frac{S}{\delta_n} = k\sqrt{\pi}$ folgende Ergebnisse erhalten, wobei in Rücksicht kommt, dass je kleiner dieser Werth ist, ein um so grösserer Antheil von der Summe der negativen δ unmöglich wird. Sollten alle negativen δ möglich werden, so müsste $k\sqrt{\pi}$ unendlich sein.

	Handgel. no. 1		Handgel. no. 2		Stirn ohne $D = 8$	
	S	$k\sqrt{\pi}$	S	$k\sqrt{\pi}$	S	$k\sqrt{\pi}$
$MW\alpha$	5,43	1,42	5,42	1,45	2,35	3,68
β	2,71	0,625	2,41	0,534	1,83	0,720
γ	4,09	0,965	4,26	0,845	3,02	1,07
$MU\alpha$	5,59	0,684	9,75	1,27	4,25	1,45
β	1,37	0,159	3,87	0,506	2,18	0,700
γ	3,30	0,395	6,32	0,813	3,25	1,04

Bei den älteren Camerer'schen Versuchen, von denen ich in betreffender Beziehung die Versuche an Handgelenk, Vola manus und Fingerspitze für Hedwig und Ida, 1. und 2. Abth. besonders unter-

sucht habe (s. Abschn. XIX), nimmt nun allerdings $k\sqrt{\pi}$ erheblich grössere Werthe (von 1,02 bis 4,06 reichend) an; aber damit wird der Uebelstand doch nur erleichtert, nicht gehoben; auch können diese Versuche aus angegebenen Gründen überhaupt weniger massgebend sein, als die neuen.

Die Volkmann'schen Versuche des X. Abschn. haben sogar Beispiele geliefert, wonach die Berechnung der Beobachtungen nach Müller's Formel zu negativen Werthen der mittlern Schwelle $S = \frac{k}{h}$ selbst führen kann (S. 173), welche natürlich Müller gar nicht zulassen darf; und wenn eingewandt werden könnte, dass der Fehler hier vielmehr in den zu wenig zahlreichen Versuchen Volkmann's als in Müller's Formel zu suchen sei, so hebt sich dieser Einwand dadurch, dass eine, in der That bemerkenswerthe, Regelmässigkeit im Fortschritte der Werthe S von der niedersten Uebungsstufe I zur höchsten V stattfindet, in der Art, dass von I bis III sich positive S mit abnehmender Grösse, von IV bis V negative mit wachsender Grösse folgen, was nicht von Unregelmässigkeiten wegen zu geringer Versuchszahl abhängen kann. Gegentheils lässt meine Formel mit nicht minderer Regelmässigkeit die nach ihr berechneten k in positivem Sinne von I bis V wachsen, ohne dass das irgendwie mit den Principien ihrer Aufstellung in Conflict kommt, und führt dadurch nur eben zu einem wichtigen Abhängigkeitsverhältnisse des Werthes k.

Wo k, so zu sagen widernatürlich, bei Ableitung aus den Beobachtungen nach Müller's Formel, negative Werthe annimmt, wird bei Berechnung der t nach seiner secundären Formel $t = hD - k$ (um etwa einen Vergleich zwischen Rechnung mit Beobachtung vorzunehmen) das $-k$ der Formel als positiver Werth zu hD zu fügen sein. Denn bei normalem Verhalten, wo k positiv gefunden wird, bedeutet das negative Vorzeichen von k in der Formel, dass dieser positive Werth von hD abzuziehen ist, wogegen im abnormen Falle, wo k negativ gefunden wird, dieser negative Werth von hD abzuziehen ist, womit die Zufügung des entsprechenden positiven gleichgeltend ist.

Abgesehen von vorigen Bedenken liesse sich noch der Einwurf erheben, dass Müller's Grundformel für die absolute Empfindlichkeit, um die sich's hier handelt, die Consequenz mit der Grundformel für die Unterschiedsempfindlichkeit, um die sich's z. B. bei meinen Gewichtsversuchen handelt, insofern verläugne, als in erster die Schwelle als variabel, die Distanz als constant betrachtet wird, hingegen in

letzter die Schwelle als constant, der an die Stelle von D tretende Unterschied aber durch zufällige Fehlervorgänge als variabel betrachtet wird; denn obwohl es sich erstenfalls um eine absolute Schwelle, zweitenfalls um eine Unterschiedsschwelle handelt, sind es doch beidesfalls Schwellen, für die es nicht statthaft scheint, einen solchen Unterschied zu statuiren. Allein es würde principiell nichts hindern, auch in erster Formel die Raumschwelle S als constant und dafür die Distanz durch veränderliche Auffassung als variabel anzusehen, um noch ganz zu denselben Resultaten zu kommen, da in die betreffende Formel überhaupt nur der Unterschied $S - D$ zwischen beiden eingeht, wobei es für die Resultate gleichgültig ist, ob man S oder D als constant setzen und nur den andern Werth nach Gauss'schem Gesetze variiren lassen will, oder auch beide so variiren lassen will, dass ihr Unterschied das Gauss'sche Gesetz befolgt. Also hat die in der That stattfindende formelle Inconsequenz der Betrachtungsweise bei Construction beider Müller'schen Formeln jedenfalls keine sachlichen Folgen. Müller selbst ist auf das Verhältniss beider Formeln in betreffender Hinsicht überhaupt nicht eingegangen.

Inzwischen ist mit allen vorigen Bemerkungen nicht gegen die Müller'sche Formel überhaupt entschieden; sondern eben nur gegen die Bedeutung, die Müller im Sinne der Herleitungsweise seiner Grundformel den Constanten darin beilegt, und, wie mir scheint, gegen die Triftigkeit dieser Herleitungsweise selbst, sofern sie solidarisch mit der Annahme dieser Bedeutung ist, die von der Grundformel in die secundäre Formel übergeht. Als empirische Formel könnte die Müller'sche Formel mit der zugehörigen Fundamentaltafel möglicherweise immer noch bestehen, wenn auch die Constanten darin nicht mehr mit der, ihnen von Müller beigelegten, Bedeutung beständen, und wird in dieser Beziehung mit unserer Formel später (im XVI. Abschn.) abzuwägen sein. Nur den ihr zunächst scheinbar zukommenden Vorzug einer rationelleren Ableitung vor der unsern dürfte sie nach Vorigem nicht geltend machen können.

Verhält es sich mit den bei den Versuchen mitspielenden Zufälligkeiten in der S. 189 besprochenen Weise, so geht daraus allerdings eine an sich nicht erwünschte Folgerung hervor, der man sich aber meines Erachtens nicht entziehen kann, dass man nämlich, da

man auf ein vergleichbares Spiel von Zufälligkeiten wie den obigen bei verschiedenen Individuen nie rechnen kann, auch stets dahinstellen muss, wiefern die Unterschiede, die man zwischen ihren $r\frac{0}{0}$ bei gegebenen D erhält, vielmehr von einem verschiedenen Spiel der Zufälligkeiten oder einer Verschiedenheit ihrer Empfindlichkeit an sich abhängen. Diess hindert aber nicht, sondern macht es nur um so erwünschter, Mittelwerthe aus den Versuchen mehrerer Beobachter, die unter möglichst vergleichbaren äussern Umständen beobachtet haben, für den Zweck der Methode verwerthen zu können.

Schliesslich wenden wir uns zur Herleitung und Aufstellung der Grundformeln M und F selbst.

Was die Müller'sche Herleitung anlangt, so rufen wir zuvörderst zurück, dass nach Müller die Raumschwelle nach Zufälligkeiten während der Versuchszeit variabel ist, dass das Mittel der Werthe, welche sie dabei annimmt, als mittlere Raumschwelle von ihm mit S bezeichnet wird, und dass er die falschen Fälle nicht wie wir mit z, sondern mit f bezeichnet. Diess vorausgeschickt fährt er p. 192 seiner Abhandlung wie folgt fort:

»Nach Vorstehendem ist die Raumschwelle in einem gegebenen Beobachtungsfalle um eine zufällige Grösse, die wir als den zufälligen Fehler $\pm\delta$ bezeichnen, grösser oder kleiner als der Werth S. Bezeichnen wir daher die thatsächliche Distanz der beiden gleichzeitig aufgesetzten Nadel- oder Zirkelspitzen mit D, so wird der Eindruck einer Doppelberührung immer nur dann eintreten, wenn $D > S \pm \delta$ ist. Führt man also mit constantem D eine hinreichend grosse Anzahl von Versuchen an einer gegebenen Hautstelle aus, so wird das Verhältniss der Zahl r der richtigen Fälle zur Gesammtzahl n der Fälle gleich der Wahrscheinlichkeit oder relativen Häufigkeit derjenigen Fälle sein, in denen $D > S \pm \delta$ ist. Falls $D > S$ ist, muss $D > S \pm \delta$ sein, erstens in allen denjenigen Fällen, in denen δ negativ ist, also das untere Vorzeichen von δ gilt, und zweitens in denjenigen Fällen, in denen δ positiv und $< D - S$ ist. Nehmen wir an, dass für die Fehler $\pm\delta$ das vielfach bewährte Gauss'sche Fehlergesetz gültig sei, so ist die Wahrscheinlichkeit der ersteren Fälle $= \frac{1}{2}$ und diejenige der zweiten Fälle $= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{D-S} e^{-h^2\delta^2}\, d\delta$, wo h

das sogenannte Präcisionsmass darstellt und $= \frac{1}{\delta_m \sqrt{\pi}}$ zu setzen ist, wenn wir mit δ_m den mittleren Werth der Fehler $\pm \delta$ bezeichnen. Es ist mithin, falls $D > S$ und demgemäss $\frac{r}{n} > \frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{D-S} e^{-h^2\delta^2}\, d\delta$$

oder, wenn wir $h\delta = t$ setzen,

$$(1) \qquad \frac{r}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(D-S)h} e^{-t^2}\, dt.$$

Für den Fall, dass $D < S$ ist, kann D nur dann $> S \pm \delta$ sein, wenn δ negativ und seinem absoluten Werthe nach grösser als $S - D$ ist. Mithin ist, falls $D < S$ und demgemäss $\frac{r}{n} < \frac{1}{2}$ ist,

$$(2) \qquad \frac{r}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(S-D)h} e^{-t^2}\, dt.$$

Für den Fall, dass $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$ ist, muss, wie leicht zu erkennen, $S = D$ gesetzt werden.

Was die Zahl f der falschen Fälle betrifft, in denen $D < S \pm \delta$ ist und in Folge dessen der Eindruck einer einfachen Berührung entsteht, so ergiebt sich die Beziehung des Quotienten $\frac{f}{n}$ zu S, h und D unmittelbar aus dem Vorstehenden, da ja $\frac{f}{n} = 1 - \frac{r}{n}$ ist.«

Die weiteren Ausführungen Müller's über seine Formel können theils als unwesentlich für die Begründung derselben, um die es jetzt zu thun ist, theils als schon im Vorigen berücksichtigt, hier übergangen werden.

In der secundären Formel ersetzt Müller (angegebenermassen) den, in der Grundformel noch unbestimmt gelassenen Werth t durch den bestimmten τ.

Um uns hienach zu meiner Grundformel zu wenden, so schien mir von vornherein misslich, eine solche überhaupt auf reine Theorie zu gründen, da wir die Vorgänge, welche bei der extensiven Empfindlichkeit eine Rolle spielen, nicht hinreichend kennen; und so fusst auch meine Formel von vornherein nicht sowohl auf theore-

tischen Voraussetzungen über das Spiel dieser Vorgänge, als auf folgender sehr allgemeinen Betrachtungsweise.

Die Aufgabe ist, einen Ausdruck von $\frac{r}{n}$ als Function von D zu finden, welcher den erfahrungsmässigen Ausfall der Versuche repräsentirt. Die allgemeinsten Verhältnisse aber, welche es in dieser Hinsicht zu repräsentiren gilt, sind diese:

1) Der Werth $\frac{r}{n}$ bei gegebenem D unterliegt einem Wahrscheinlichkeitsgesetze der Zufälligkeit.

2) Bei unendlichem D fallen alle Fälle richtig aus, oder ist die Wahrscheinlichkeit der richtigen Fälle gleich der durch 1 ausgedrückten Gewissheit.

3) Negative Werthe von $\frac{r}{n}$ und D sind unmöglich.

Was nun den ersten Punkt anlangt, so liegt es auch hier am nächsten, das Gauss'sche Wahrscheinlichkeitsgesetz, welches die Abhängigkeit der relativen Zahl oder Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler von der Grösse der Beobachtungsfehler angiebt, zu versuchen, nur mit Rücksicht, dass wir es hier nicht mit Unterschieden, wie es die Beobachtungsfehler sind, sondern mit absoluten Werthen zu thun haben. Zwar würde auch nichts hindern, die D als Unterschiede zu fassen, aber dann nur als positive Unterschiede von Null.

Nach der zweiten Bedingung wird die Formel für $D = +\infty$ den Werth $\frac{r}{n} = 1$ oder $r\frac{0}{0} = 100$ geben müssen.

Nach der dritten Bedingung werden negative Werthe von D oder $\frac{r}{n}$, falls die Formel in Anwendung auf gewisse Verhältnisse dazu führen sollte, nur bedeuten können, dass es für diese Verhältnisse keine D oder r geben kann.

Diesen Forderungen entsprechen wir zunächst in einfachster Weise, indem wir setzen

$$\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hD=t} e^{-t^2}\, dt \quad \ldots . \quad \text{(a)}$$

worin h eine Constante. In der That geht diese Formel für den Fall von $D = \infty$ über in

$$\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hD=\infty} e^{-t^2}\, dt = 1 \ldots \text{(b)}$$

und entspricht damit zugleich der ersten und zweiten Bedingung. Verglichen mit den entsprechenden Formeln für die Fehlerwahrscheinlichkeit, wenn wir in diesen die Distanzen *D* durch Fehler *D* ersetzt denken, weichen die vorigen Formeln blos insofern davon ab, als sie die Wahrscheinlichkeit auf positive *D*'s beschränken, indess die Formeln für die Fehlerwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit zwischen positiven und negativen *D*'s gleich theilen.

Inzwischen ist damit, dass die Formel (a) durch Ableitung von (b) daraus dem Falle $D = \infty$ genügt, noch nichts weniger als entschieden, dass auch der Abhängigkeit der $\frac{r}{n}$ von endlichen Werthen *D* dadurch entsprochen wird; und als ich die Erfahrung desshalb befragte, zeigte sich das entschiedenste Ungenügen.

Hienächst lag, ohne Aufgabe der obigen drei Grundgesichtspunkte, der Versuch nahe, die richtigen Fälle *r* durch die Hälfte der Nullfälle oder *z* ergänzt zu denken, und das Integral der Formel (a) auf die so ergänzten Fälle $\frac{r}{n} + \frac{z}{2n}$ statt blos auf $\frac{r}{n}$ zu beziehen; wobei der Gesichtspunkt leitete, dass Nullwerthe sich eben so hier wie bei den Versuchen über Unterschiedsempfindlichkeit als Summe von gleich viel $+$Werthen und $-$Werthen betrachten lassen, mithin erstere sich zu den direct erhaltenen positiven $\frac{r}{n}$ schlagen lassen, indess letztere zur Repräsentation von Werthen unter der Schwelle dienen können. Da nämlich Werthe $\frac{r}{n}$ unter der Schwelle keine Realität haben, eignet sich auch für sie ein Ausdruck, welcher diese Nichtrealität bezeichnet. Natürlich aber war diess wieder blos ein Aperçu, dem an sich keine bindende Kraft beizulegen, und so blieb abermals der Erfahrung anheimgestellt, zu entscheiden.*)

*) Die mathematische Theilung der *z* zwischen positiven und negativen *r* behufs Gewinnung einer sachlich zutreffenden Formel ist nicht mit der Theilung der unbestimmten Zwischenfälle zwischen *r* und *z* nach der Reductionsweise γ zusammenzuwerfen und zu verwechseln; sondern, letztere Reduction schon vorausgesetzt, sind die gesammten *z*, mit Einschluss der durch diese Reduction zu den entschiedenen Nullfällen zutretenden, nach obiger Hypothese in $+$Werthe und $-$Werthe *r* zerlegbar gedacht, wovon letztere zwar keine realen Werthe von *r* mehr bedeuten, aber doch insofern eine Bedeutung für die Wirklichkeit behalten, als sie Umständen entsprechen, wo nun eben reale *r* unmöglich sind, wie es bei Werthen von *D* unter der Schwelle der Fall ist, worauf weiterhin zu kommen.

Die, auf vorige Vorstellungsweise gestützte Formel nimmt die Gestalt an:

$$\frac{r}{n} + \frac{z}{2n} = \frac{r + n^{*})}{2n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t = hD} e^{-t^2} \, dt \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(A)}$$

Bei erster Aufstellung derselben lagen zur Prüfung ausser den Tübinger erst die älteren Camerer'schen Versuche mit grösseren *D* vor, denen sie nahehin genügte, so dass ich früher glaubte, dabei stehen bleiben zu können; aber sie zeigte sich ungenügend, als die neuen Camerer'schen Versuche mit den kleinen *D* hinzutraten; hingegen reichte es hin, hD um eine Constante k vermehrt in die vorige Formel einzuführen, um zu der Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung zu gelangen, welche sich durch die Untersuchung des XVI. Abschnittes herausstellen wird, und welche nach dem Endergebniss dieser Untersuchungen am vollkommensten erscheint, wenn man vielmehr wissentlich als unwissentlich verfährt und (im Sinne der Reductionsweise γ) die Hälfte der Werthe, welche zwischen dem entschiedenen Eindruck von zwei Spitzen und von einer Spitze mitten inne stehen unter die richtigen r mit einrechnet, indess man die übrigen als z rechnet. Solchergestalt erhält die Formel die Form:

$$\frac{r}{n} + \frac{z}{2n} = \frac{r + n}{2n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{hD + k = t} e^{-t^2} dt \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \text{(B)}$$

oder:

$$\frac{r}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \cdot \cdot \cdot \quad - \frac{z}{2n}$$

und die Fundamentaltabelle für F giebt im Sinn dieser Formel für alle Werthe $\frac{r}{n}$ oder $r\frac{0}{0}$, welche eintreten können, die zugehörigen Werthe:

$$t = hD + k \; ,$$

hiemit die secundäre Formel, von welcher praktisch Gebrauch zu machen ist.

Nennen wir die Formel (A) die einfache, die Formel (B) die vollständige.

*) Mit Rücksicht, dass $n = r + z$, mithin $z = n - r$.

Von vornherein konnte die Frage entstehen, ob nicht die Constante k in der vollständigen Formel analog wie in der Müller'schen Formel als Zusammensetzung der Constante h mit einer anderen, in diesem Falle etwa mit c zu bezeichnenden, Constante zu betrachten sei, und ich habe es früher so angenommen; aber die weitere Untersuchung hat mich gelehrt, dass k wesentlich unabhängig von h, oder nur nebensächlich damit complicirt ist.

In der That, wäre k wirklich schlechthin gleich hc zu nehmen, so müsste sich diess in einer Abhängigkeit des k von h zeigen, wenn man durch Aenderung der Beobachter oder sonstiger Versuchsumstände h mannichfache Werthe annehmen lässt. Von einer solchen Abhängigkeit aber zeigt sich nichts, sondern die h und k ändern sich jedenfalls in der Hauptsache unabhängig von einander. Diess zeigt sich z. B. beim Wechsel der Beobachter I, II u. s. w. in den Tabellen für $FW\gamma$ und $FW\beta$ der neuen Camerer'schen Versuche (Abschn. IX. Tab. D. S. 169), sowie im Fortschritt der Uebungsepochen I, II u. s. w. in den Volkmann'schen Versuchen S. 172. Wonach man nur im Allgemeinen sagen kann, der Werth t, welcher nach der Fundamentaltafel zu $r\frac{0}{0}$ gehört, setzt sich zusammen aus einer von den Distanzen unabhängigen Constante k und einem, mit den Distanzen proportionalen Werthe hD, der für Einheit der Distanz auf h zurückkommt.

Dass die einfache Formel (A) für die älteren Camerer'schen Versuche nahehin genügend erscheinen konnte, indess sie bei den neuen entschieden fehlschlug, erklärt sich einerseits daraus, dass gegen das grössere hD der älteren Versuche k auch bei gleichem Werthe weniger in Betracht kam, andererseits aber, dass nach den im XIX. Abschnitt verzeichneten Ergebnissen k in den älteren Versuchen wegen der anderen Versuchsumstände einen kleineren Werth hatte, als in den neueren.

Ein Ausdruck für die Raumschwelle geht zwar nicht direct in meine Formel ein, lässt sich aber daraus folgern, als der Werth von D, bei welchem der Werth $\frac{r}{n}$ eben null wird, und unterhalb dessen er negative, d. i. unmögliche Werthe annimmt. Bestimmen wir nun einfachster Erläuterung halber diesen Werth zuvörderst nach der einfachen Formel (A), welche für den Fall gültig ist, dass k als ver-

schwindend anzusehen ist, so erhalten wir eine zugleich sehr einfache und allgemeine Bestimmung dafür. Wir haben nämlich, indem wir in der einfachen Formel $\frac{r}{n} = 0$ setzen,

$$\frac{z}{2n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hD=t} e^{-t^2}\, dt.$$

Da nun allgemein $z = n - r$, so ist für den Fall, dass $r = 0$, der Werth $z = n$ und nimmt $\frac{z}{2n}$ den Werth $\frac{1}{2}$ an. Zu diesem aber gehört nach Berechnung des Integrals ein Werth $t = 0{,}4769$ (vollständiger $0{,}476936$); wie sich denn dieser wirklich in der Fundamentaltafel F als zugehörig zu $r\frac{0}{0} = 0$ findet. Man hat also unter Voraussetzung des Wegfalls von k nach Formel (A) den Werth $t = hD$ bei welchem $r = 0$ ist, $= 0{,}4769$, mithin den Schwellenwerth der Distanz $= \frac{0{,}4769}{h}$, wonach der Schwellenwerth umgekehrt proportional dem Hauptmasswerthe h ist. Geht D unter den Werth $\frac{0{,}4769}{h}$ herab, so nimmt $\frac{r}{n}$ negative, mithin unmögliche Werthe an.

Nehmen wir jedoch die vollständige Formel (B) und setzen darin $\frac{r}{n} = 0$, so haben wir

$$\frac{z}{2n} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hD+k=t} e^{-t^2}\, dt \cdot$$

und es entspricht nach entsprechender Herleitung der Schwellenwerth einem Werthe D, welcher durch die Gleichung $hD + k = 0{,}4769$ bestimmt wird, und als Schwellenwerth giebt*) $\frac{0{,}4769 - k}{h}$.

Wenn $k > 0{,}4769$, so wird das den Schwellenwerth repräsentirende D negativ, mithin unmöglich, da es eben so wenig nega-

*) Man könnte vielleicht besorgen, dass diese Bestimmung die Grösse des Schwellenwerthes abhängig mache von der Masseinheit, welche der Distanz untergelegt wird, und auf welche die Constanten h, k zu beziehen, indess $0{,}4769$ unabhängig davon bleibt. Aber im XVI. Abschnitt wird gezeigt, dass auch der Zahlausdruck von k unabhängig von dieser Einheit ist, der Zahlausdruck von h aber in directem Verhältniss dazu steht. Da nun h sich im Zähler des Zahlausdrucks für die Schwelle findet, so steht der Zahlausdruck der Schwelle im umgekehrten Verhältniss der Masseinheit; wie es sein muss, soll ihre absolute Grösse unabhängig von dieser Einheit sein.

tive D's als negative $r\frac{0}{0}$ geben kann; d. h. es giebt keinen Schwellenwerth, indem selbst bei $D = 0$, d. i. beim Vexirversuch, noch positive Werthe von $r\frac{0}{0}$ erhalten werden.

Wenn $D = 0$ ist, so ist $t = k$, und der Werth k repräsentirt also überhaupt nach F das dem Vexirversuche zugehörige t, wozu man das $r\frac{0}{0}$ in der Fundamentaltafel suchen kann, was, wenn es sich findet, den beim Vexirversuch zu erwartenden Werth $r\frac{0}{0}$ giebt. Nun enthält aber die Fundamentaltafel für F blos Werthe t von 0,4769 an, bei welchem Werthe $r\frac{0}{0} = 0$ ist, und wenn k bei irgendwelchen Versuchsverhältnissen nach Rechnung unter diesen Werth fällt oder gar negative Werthe annimmt, so ist kein $r\frac{0}{0}$ mehr dazu zu finden, oder muss man den zu k gehörigen Werth $r\frac{0}{0}$ negativ nehmen; aber negative $r\frac{0}{0}$ sind unmöglich, also bedeutet das Herabsinken von k unter 0,4769 oder ein negativer Werth von k, dass der Vexirversuch keinen realen Werth $r\frac{0}{0}$ giebt.

Wohl zu merken, ist zur Geltung voriger Bestimmung vorausgesetzt, dass der Erfolg des Vexirversuches nicht durch den Contrast beeinflusst sei, den seine Einschaltung zwischen Hauptversuchen mitführt, da meine Formel einen solchen als fehlend oder eliminirt voraussetzt. Die Vexirversuche der Tübinger wie älteren Camerer'sche Versuche leiden aber an einem solchen Contrast, und so kommen in Widerspruch mit voriger Bestimmung hier noch reale Werthe $r\frac{0}{0}$ beim Vexirversuch vor, wenn k nach Herleitung aus den Hauptversuchen sich negativ findet. Die neuen Versuche Camerer's, welche durch sehr langsame Folge dem Contrasteinflusse entzogen sind, bieten keinen solchen Widerspruch dar, indem sie überhaupt nur Werthe von k finden lassen, welche 0,4769 übersteigen und daher auch beim Vexirversuch noch reale Werthe $r\frac{0}{0}$ gegeben haben, wie schon im VI. Abschn. besprochen ist, und im XVI. weiter zur Besprechung kommen wird.

Es könnte hienach noch in Frage kommen, ob bei ganz normal angestellten Versuchen überhaupt nach F noch negative Werthe von k, welche für den Vexirversuch unmögliche Werthe von $r\frac{0}{0}$ ergeben, vorkommen; doch führen die Volkmann'schen Versuche bei geringen Uebungsstufen zu solchen, und stehen solche überhaupt weder in Widerspruch mit den Principien der Formel noch realen Verhältnissen, sofern sie eben nur bedeuten, dass es eine Schwelle giebt, unterhalb

deren Werthe von $r\frac{0}{0}$ unmöglich sind. Für gewisse Versuchsverhältnisse aber kann es eine solche Schwelle geben, für andere nicht.

Eine Folgerung aus Vorigem aber ist, dass, wenn man bei Vorhandensein einer Schwelle zu Werthen von D unterhalb der Schwelle keine r mehr findet, man diese r nicht rechnungsweise als null zu setzen hat, vielmehr sind ihnen um so grössere negative, d. h. um so unmöglichere, Werthe beizulegen, je tiefer das D unter die Schwelle fällt.

Hienach noch die Erinnerung, dass die negativen Werthe von D, $\frac{r}{n}$, k, zu welchen meine Formel unter Umständen in der Bedeutung als unmöglichen Werthen führt, überhaupt eine andere Rolle spielen, als die negativen Schwellenwerthe, zu denen die Müller'sche Formel nach S. 191 führt. Jene entsprechen ohne Widerspruch mit den Principien der Formel Versuchsverhältnissen, für welche es wirklich keine D oder $\frac{r}{n}$ mehr geben kann, entsprechen also wirklichen Sachverhältnissen, welche hiemit von der Formel triftig unter sich begriffen werden; wogegen die negativen Schwellenwerthe nach Müller's Formel unmögliche Werthe sind, die man mit keinen Sachverhältnissen in Beziehung zu setzen weiss, denn sie treten nach richtiger Ableitung aus der Formel unter ganz realen Verhältnissen bei realen D wie $\frac{r}{n}$ auf.

Dass negative Werthe absoluter Grössen, wie es die D und r sind, wirklich als unmögliche zu fassen sind, braucht als selbstverständlich nicht erst bewiesen zu werden, obwohl ich, missverständlichen Auffassungen gegenüber, eine Erläuterung dieser Bedeutung bezüglich der negativen Empfindungswerthe unter der Schwelle in m. »Revis.« p. 206 ff. doch nöthig gefunden habe, welche sich leicht an mathematischen Beispielen geben liess, und, sollte man es für nützlich halten, hieher übertragen werden kann. Jedenfalls aber scheinen mir die vorigen Beispiele einer fruchtbaren Anwendung, die sich über die abstracte Mathematik hinaus von negativen Werthen absoluter Grössen als unmöglichen machen liess, an sich einiges Interesse darzubieten.

XII. Die Fundamentaltafeln.

Die Fundamentaltafel bezüglich der Müller'schen Formel (M) begnüge ich mich auszugsweise mitzutheilen, da sie ganz mit der für die Gewichtsversuche stimmt, welche schon in m. »Elementen« I, p. 108ff. gegeben und in m. »Revision« p. 66ff. wiederholt ist; nur dass da die Hülfsgrössen Γ, sog. Gewichte, fehlen, deren Bedeutung weiterhin besprochen wird, und die man in Müller's Abh. p. 204 zu den $\frac{r}{n}$ zugefügt finden kann. Allerdings reicht dieser Auszug nicht hin, die Specialrechnungen nach M zum Vergleich seiner Formel mit der meinigen zu führen, die wir zu führen haben werden; aber da sich schliesslich die Müller'sche Formel nicht als haltbar erweisen wird, schien es nicht nöthig, den Raum noch einmal für die vollständige Tabelle, welche dazu gehört, in Anspruch zu nehmen. Ausserdem lässt sich die zu meiner Formel (F) gehörige Tabelle, welche ich unten in extenso gebe, in die zur Müller'schen Formel (M) gehörige übersetzen, wenn man die t und zugehörigen Γ unserer Tabelle nach einer sehr einfachen Regel auf andere $r^0/_0$ in der Tabelle für M überträgt. In der That gehören dieselben t und Γ, welche in der Tabelle für F einem Werthe von $r^0/_0$ gleich a zugehören, in der Tabelle für M zugleich beiden Werthen $75 + \frac{a}{4}$ und $25 - \frac{a}{4}$ zu, wie man sich leicht selbst beim Vergleich der folgenden Tabellen durch Achten auf die Zahlwerthe der t, die in beiden übereinstimmen, überzeugen kann; nur dass die Müller'schen t für die Werthe von $r^0/_0$, welche 50 übersteigen, mit positivem Vorzeichen behaftet sind, für die, welche 50 um gleich viel untersteigen, mit negativem, wonach z. B. das $t = 0{,}1791$ und $\Gamma = 0{,}938$, welche nach M zu $r^0/_0 = 60^0/_0$ gehören, auch zu $r^0/_0 = 40$ gehören, aber zu $60^0/_0$ mit positivem, zu $40^0/_0$ mit negativem Vorzeichen. Da aber die Tabelle für F nur Werthe t von 0,4769 an enthält, so können freilich die niedrigern Werthe von t in der Tabelle für M nicht durch jene Uebersetzung erhalten werden.

In jedem Falle ist als $r^0/_0$ das $r^0/_0$ nach der Reductionsweise, von der man nach Abschn. VII Gebrauch machen will, in die Tabelle zum Gewinn des zugehörigen t einzusetzen. In der That hat die Reduction dem Gebrauch der Tabelle vorauszugehen; die danach er-

haltenen Werthe t können aber dann selbst zur Prüfung des Vorzugs der verschiedenen Reductionsweisen vor einander im Sinne des XVI. Abschnitts dienen, wonach ich der Reductionsweise γ den Vorzug gebe.

Die Ableitung der Werthe t aus $\frac{r}{n}$ oder $r\frac{0}{0}$ in folgenden Tabellen ist unter Zuhülfenahme der bekannten Tabelle der Fehlerwahrscheinlichkeit, welche den Werth t als Function des Wahrscheinlichkeitswerthes

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

giebt, so geschehen:

Nach M setze man in diese Tabelle anstatt u den Werth $2\frac{r}{n} - 1$ oder $\frac{2r\frac{0}{0} - 100}{100}$ ein und nehme das dazu gehörige t als zum $r\frac{0}{0}$ der Fundamentaltabelle gehörig. Nach F setze man in die betreffende Tabelle anstatt u den Werth $\frac{r+n}{2n}$ oder $\frac{r\frac{0}{0} + 100}{200}$ ein, und nehme das dazu gehörige t als zum $r\frac{0}{0}$ der Fundamentaltabelle gehörig.

Da die Tabelle, welche der Ableitung der Fundamentaltabelle unterliegt, nicht in den u, sondern in den t um gleiche Differenzen, nämlich 0,01 fortschreitet, so muss man sie mit Hülfe von Interpolationen in eine solche umsetzen, wo umgekehrt die u's um gleiche Differenzen fortschreiten, um die Fundamentaltafeln daraus zu erhalten, und da diese Interpolation bei Construction der folgenden Fundamentaltafeln nur mit Hülfe der ersten Differenzen geschehen ist, so können die t's derselben namentlich bei den höheren Werthen derselben in der vierten Decimalstelle wohl um eine oder einige Einheiten fehlerhaft sein; dass aber keine erheblichen Fehler in Bestimmung der letzten Decimale obwalten, ergiebt sich aus dem Gange der Differenzen. Nun wäre freilich erwünscht, wenn ein fachmässiger Rechner auch noch diese kleine Unsicherheit beseitigte, die jedoch für die praktische Verwendung merklich gleichgültig ist.

Der Werth Γ leitet sich für F wie M einfach aus t ab, indem man hat $\Gamma = e^{-2t^2}$, was zu folgender Bestimmungsweise desselben führt:

Man addire $2 \log t$ zu $0,9388143 - 1$, suche hiezu die Zahl in den Logarithmentafeln und nehme diese negativ, so ist es der Logarithmus von Γ.

Auszugsweise Fundamentaltafel für Müller's Formel (M).

$r\frac{0}{0}$	t	Γ	$r\frac{0}{0}$	t	Γ
50	0,0000	1,0000	80	0,5951	0,493
55	0,0890	0,984	85	0,7329	0,342
60	0,1791	0,938	90	0,9062	0,194
65	0,2795	0,862	95	1,1631	0,0669
70	0,3708	0,760	100	∞	0
75	0,4769	0,635			

Es reicht nach obiger Bemerkung hin, Werthe von $r\frac{0}{0}$ über 50 in die Tabelle aufzunehmen, indem für Werthe von $r\frac{0}{0}$, welche 50 um gleich viel übersteigen und untersteigen, dieselben t und Γ bestehen, erstere aber mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Fundamentaltafel für Fechner's Formel (F).

$r\frac{0}{0}$	t	diff.	Γ	diff.	$r\frac{0}{0}$	t	diff.	Γ	diff.
0	0,4769	56	0,6345	67	24	0,6208	65	0,4627	75
1	4825	56	6278	68	25	6273	66	4552	75
2	4881	57	6210	69	26	6339	67	4477	76
3	4938	56	6141	69	27	6406	67	4401	75
4	4994	56	6072	70	28	6473	69	4326	77
5	5052	57	6002	69	29	6542	68	4249	75
6	5109	58	5933	70	30	6610	68	4174	76
7	5167	58	5863	70	31	6678	69	4098	74
8	5225	58	5793	71	32	6747	70	4024	76
9	5283	59	5722	71	33	6817	71	3948	76
10	5342	59	5651	71	34	6888	72	3872	77
11	5401	59	5580	71	35	6960	72	3795	75
12	5460	61	5509	73	36	7032	73	3720	76
13	5521	60	5436	72	37	7105	74	3644	77
14	5581	61	5364	73	38	7179	74	3567	75
15	5642	60	5291	72	39	7253	76	3492	76
16	5702	62	5219	73	40	7329	76	3416	76
17	5764	62	5146	74	41	7405	77	3340	76
18	5826	63	5072	74	42	7482	79	3264	77
19	5889	62	4998	73	43	7561	78	3187	74
20	5951	64	4925	75	44	7639	80	3113	76
21	6015	64	4850	74	45	7719	81	3037	75
22	6079	65	4776	74	46	7800	83	2962	76
23	6144	64	4702	75	47	7883	82	2886	75
24	6208		4627		48	7965		2811	

$r\frac{\varrho}{0}$	t	diff.	Γ	diff.
48	0,7965	84	0,2811	74
49	8049	85	2737	74
50	8134	87	2663	75
51	8221	87	2588	73
52	8308	89	2515	74
53	8397	91	2441	74
54	8488	92	2367	73
55	8580	93	2294	73
56	8673	95	2221	72
57	8768	96	2149	73
58	8864	96	2076	70
59	8962	100	2006	71
60	9062	102	1935	71
61	9164	103	1864	69
62	9267	106	1795	69
63	9373	108	1726	69
64	9481	110	1657	69
65	9591	112	1589	68
66	9703	115	1521	66
67	9818	118	1455	67
68	0,9936	120	1388	65
69	1,0056	123	1323	64
70	1,0179		0,1259	
70,5	1,0242	64	0,1227	32
71	0306	65	1195	31
71,5	0371	65	1164	33
72	0436	66	1131	29
72,5	0502	67	1102	31
73	0569	69	1071	31
73,5	0638	68	1040	302
74	0706	71	10098	299
74,5	0777	71	0,09799	293
75	0848	73	9506	301
75,5	0921	74	9205	293
76	0995	75	8912	290
76,5	1070	76	8622	287
77	1146	77	8335	282
77,5	1223	78	8053	278
78	1301	81	7775	280
78,5	1382	81	7495	273
79	1463	83	7222	270
79,5	1546	85	6952	269
80	1631		6683	

$r\frac{\varrho}{0}$	t	diff.	Γ	diff.
80	1,1631	86	0,06683	263
80,5	1717	88	6420	261
81	1805	91	6159	259
81,5	1896	93	5900	257
82	1989	94	5643	249
82,5	2083	96	5394	245
83	2179	99	5149	244
83,5	2278	101	4905	242
84	2379	104	4667	236
84,5	2483	107	4431	231
85	2590	109	4200	226
85,5	2699	113	3974	222
86	2812	117	3752	219
86,5	2929	119	3533	213
87	3048	123	3320	207
87,5	3171	128	3113	204
88	3299	133	2909	199
88,5	3432	137	2710	193
89	3569	142	2517	186
89,5	3711	148	2331	185
90	3859	155	2146	177
90,5	4014	161	1969	171
91	4175	170	1798	167
91,5	4345	177	1631	158
92	4522	189	1473	154
92,5	4711	198	1319	146
93	4909	210	1173	139
93,5	5119	226	1034	133
94	0,5345		0,00901	
94,1	1,5392	48	0,008754	255
94,2	5440	48	8499	249
94,3	5488	49	8250	247
94,4	5537	50	8003	245
94,5	5587	51	7758	244
94,6	5638	51	7514	236
94,7	5689	53	7278	238
94,8	5742	53	7040	232
94,9	5795	54	6808	228
95,0	5849	55	6580	226
95,1	5904	57	6354	226
95,2	5961	57	6128	220
95,3	6018	58	5908	217
95,4	6076		5691	

$r\frac{0}{0}$	t	diff.	Γ	diff.	$r\frac{0}{0}$	t	diff.	Γ	diff.
95,4	1,6076	59	0,005691	212	97,8	1,7979	115	0,001557	124
95,5	6135	60	5479	208	97,9	8094	120	1433	119
95,6	6195	62	5271	208	98,0	8214	125	1314	115
95,7	6257	63	5063	203	98,1	8339	131	1199	110
95,8	6320	64	4860	199	98,2	8470	138	1089	
95,9	6384	66	4661	198	98,3	8608	145	0,0009827	1008
96,0	6450	67	4463	193	98,4	8753	154	8818	968
96,1	6517	69	4270	190	98,5	8907	163	7851	913
96,2	6586	70	4080	186	98,6	9070	173	6938	861
96,3	6656	72	3894	183	98,7	9243	187	6077	817
96,4	6728	73	3711	180	98,8	9430	201	5260	766
96,5	6801	76	3531	174	98,9	9631	218	4494	717
96,6	6877	77	3357	170	99,0	1,9849	239	3777	651
96,7	6954	80	3187	169	99,1	2,0088	264	3126	601
96,8	7034	82	3018	164	99,2	0352	284	2525	524
96,9	7116	84	2854	160	99,3	0636	349	2001	505
97,0	7200	86	2694	155	99,4	0985	394	1496	424
97,1	7286	89	2539	152	99,5	1379	473	1072	
97,2	7375	93	2387	150	99,6	1852	597	0,0000713	293
97,3	7468	95	2237	143	99,7	2449	821	420	222
97,4	7563	99	2094	142	99,8	3268	1345	198	
97,5	7662	102	1952	136	99,9	4613	∞	0,00000547	
97,6	7764	106	1816	132	100	∞			
97,7	7870	109	1684	127					
97,8	7979		1557						

Der Gebrauch der Werthe Γ kommt blos bei Berechnung der Versuche nach der Methode der kleinsten Quadrate (Qu.) mittelst der sog. Gewichtsmethode, wovon später (XIV), in Betracht, nicht bei der einfacheren Summationsmethode. Bei erster Verwendung aber tritt auch das Product der t in die zugehörigen Γ in Rechnung, und da es mühsam ist, diess bei jedem neuen t, was vorkommt, von Neuem zu bilden, so gebe ich folgende Hülfstafel derselben bezüglich meiner Formel, übergehe aber eine solche bezüglich Müller's Formel.

Hülfstafel. Producte Γt.

$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.	$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.	$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.
0	0,3026	3	41	0,2473	31	81	0,07271	506
1	3029	2	42	2442	32	82	6765	494
2	3031	1	43	2410	32	83	6271	494
3	3032	1	44	2378	34	84	5777	490
4	3033	1	45	2344	34	85	5287	480
5	3032	1	46	2310	35	86	4807	475
6	3031	2	47	2275	35	87	4332	463
7	3029	2	48	2240	37	88	3869	454
8	3027	4	49	2203	37	89	3415	441
9	3023	4	50	2166	38	90	2974	425
10	3019	5	51	2128	38	91	2549	410
11	3014	6	52	2090	40	92	2139	390
12	3008	7	53	2050	41	93	1749	366
13	3001	7	54	2009	41	94,0	1383	35
14	2994	9	55	1968	42	94,1	1348	35
15	2985	9	56	1926	42	94,2	1314	34
16	2976	10	57	1884	42	94,3	1278	36
17	2966	11	58	1842	44	94,4	1244	34
18	2955	12	59	1798	44	94,5	1209	35
19	2943	12	60	1754	45	94,6	1175	34
20	2931	14	61	1709	45	94,7	1142	34
21	2917	14	62	1664	46	94,8	1108	33
22	2903	15	63	1618	47	94,9	1075	32
23	2888	16	64	1571	47	95,0	1043	
24	2872	16	65	1524	48	95,1	0,010106	326
25	2856	18	66	1476	48			
26	2838	19	67	1428	49	95,2	0,009780	317
27	2819	19	68	1379	49	95,3	9463	314
28	2800	20	69	1330	49	95,4	9149	309
29	2780	21	70	1281	48	95,5	8840	303
30	2759	22	71	1232	50	95,6	8537	306
31	2737	22	72	1182	50	95,7	8231	299
32	2715	24	73	1132	51	95,8	7932	295
33	2691	24	74	1081	50	95,9	7637	295
34	2667	24	75	1031	51	96,0	7342	289
35	2642	26	76	0,0980		96,1	7053	287
36	2616	27				96,2	6766	280
37	2589	28	77	0,09290	502	96,3	6486	278
38	2561	28	78	8788	509	96,4	6208	265
39	2533	29	79	8279	505	96,5	5933	267
40	2504	31	80	7774	503	96,6	5666	263
41	2473		81	7271		96,7	5403	

$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.	$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.	$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.
96,7	0,005403	262	97,9	0,002593	200	99,0	0,000750	122
96,8	5141	256	98,0	2393	194	99,1	628	114
96,9	4885	251	98,1	2199	188	99,2	514	101
97,0	4634	245	98,2	2011	182	99,3	413	99
97,1	4389	243	98,3	1829	175	99,4	314	85
97,2	4146	238	98,4	1654	170	99,5	229	73
97,3	3908	230	98,5	1484	161	99,6	156	
94,4	3678	230	98,6	1323	154			
97,5	3448	222	98,7	1169	147	99,7	0,0000941	574
97,6	3226	217	98,8	0,001022		99,8	367	262
97,7	3009	210			140	99,9	0,0000135	
97,8	2799	206	98,9	0,000882	132	1000		
97,9	2593		99,0	750				

Sollte man noch mit Zwischenwerthen zwischen den höchsten Werthen voriger Tabellen zu thun haben, wie es bei Bestimmung der unten zu betrachtenden Grenz-t's und zugehörigen Γ's der Fall sein kann, so wird man im Allgemeinen besser thun, die t's nach der, in der Einschaltung S. 205 gegebenen, Regel und hienach die Γ's direct zu bestimmen, als zu interpoliren, da die einfache Interpolation der Tabelle hier keine hinreichende Genauigkeit mehr gewährt; doch dürften folgende Ergänzungstabellen mit Zwischeneinschiebung von 0,05 in die höchsten $r\frac{0}{0}$ dem Bedürfniss hinreichend genügen.

Ergänzungstafel für die höchsten t und Γ nach F.

$r\frac{0}{0}$	t	diff.	Γ	diff.
99,50	2,1379	224	0,0001072	
99,55	1603	249	0,00008841	1711
99,60	1852	286	7130	1595
99,65	2138	311	5535	1340
99,70	2449	371	4195	1196
99,75	2820	448	2999	1019
99,80	3268	566	1980	816
99,85	3834	779	1164	
99,90	4613	1283	0,00000547	165
99,95	2,5896		382	

Ergänzungstafel für die höchsten Γt.

$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.	$r\frac{0}{0}$	Γt	diff.
99,50	0,0002291	381	99,75	0,00006843	2236
99,55	1910	353	99,80	4607	1833
99,60	1557	332	99,85	2774	1427
99,65	1225		99,90	1347	
99,70	0,00009414	2571	99,95	0,000003878	

Es ist noch zu besprechen, wie Fälle zu behandeln sind, wo $r\frac{0}{0}$ bis 100 ansteigt, wie solche in den Tübinger Versuchen und älteren Camerer'schen Versuchen nicht zu selten vorkommen, indess sie bei den neuen Camerer'schen glücklicherweise fehlen, da sie immer eine gewisse Verlegenheit bereiten. In ein endliches t ist $r\frac{0}{0} = 100$ nicht unmittelbar übersetzbar, da vielmehr nach meiner wie Müller's Formel der Werth $t = \infty$ dafür gilt, der für die Berechnung unbrauchbar ist. Diess kann nicht als ein Fehler der Formeln gelten, die streng genommen nur für ein unendliches n gelten, bei welchem Fälle $r = n$ oder $r\frac{0}{0} = 100$ voraussetzlich nicht vorkommen würden. Aus der Rechnung weglassen aber kann man diese Fälle bei endlichem n auch nicht wohl, wenn sie unter anderen Bestimmungen bei Werthen von D vorkommen, die man in die Rechnung aufnehmen will, weil man damit Fälle mit möglichst grossem $r\frac{0}{0}$, die doch mitzählen müssen, weglassen und überhaupt das ganze Rechensystem stören würde. Am Besten, man vermeidet solche Fälle, indem man die D's nicht zu hoch oder das für alle D anzuwendende n recht hoch nimmt. Kommen aber doch solche Fälle ausnahmsweise vor, so scheint mir zulässig, für $r = n$ zu substituiren $r = n - 0{,}25 = (n - 1) + 0{,}75$, und nach dem sich hiedurch ergebenden $r\frac{0}{0} = \frac{100\,(n - 0{,}25)}{n}$ das t der Fundamentaltafel zu bestimmen. Die so für $r\frac{0}{0} = 100$ und $t = \infty$ substituirbaren Werthe mögen Grenzwerthe heissen. Gesetzt, man hätte bei $n = 50$ den Werth $r = 50$ erhalten, so würde man $\frac{r}{n} = \frac{50}{50}$ vielmehr als $\frac{49{,}75}{50}$ zu nehmen haben, was $r\frac{0}{0} = 99{,}5$ giebt, wozu in meiner Fundamentaltabelle $t = 21{,}379$ gehört.

Dieser Vorschlag gründet sich darauf, dass man bei den Ver-

suchen statt unendlich viele Zahlabstufungen in Bruchwerthen zu unterscheiden, wie es principiell sein sollte, um allen möglichen t-Werthen genügen zu können, blos ganze Zahlen in der Art zählt, dass man z. B. bei $n = 50$ jede Bruchzahl r zwischen 49 und 49,5 noch als 49, jede zwischen 49,5 und 50 schon als 50 zählt; der mittlere Werth zwischen allen möglichen Werthen, welche zwischen 49,5 und 50 fallen, ist aber 49,75. Nun wird man zwar nicht in jedem einzelnen Falle mit dieser mittleren Zahl und dem zugehörigen t, kurz diesen Grenzwerthen, genau die rechten aber doch die wahrscheinlichsten Werthe treffen, und überhaupt nicht leicht stark damit irren können, wenn der betreffende Fall ausnahmsweise unter vielen anderen, die zur Rechnung beitragen, mit unterläuft, um so weniger, wenn man die Methode der kleinsten Qu. zur Bestimmung der Constanten anwendet, wobei hohe Werthe von $r\frac{0}{0}$ mit geringem Gewicht Γ zählen; viele Fälle der Art darf man aber überhaupt nicht zulassen. Wollte man nicht in der hier vorgeschlagenen Weise verfahren, so müsste man das gleich n gefundene r mit einem anderen unter möglichst gleichen Umständen gefundenen r, was aber nicht bis n reicht, zusammennehmen und das Mittel beider für beide Fälle zur Bestimmung des dafür geltenden t verwenden. Aber ganz streng ist das auch nicht, die Gleichförmigkeit der Rechnung leidet darunter, und es kann sein, dass kein anderes unter vergleichbaren Umständen beobachtetes r dazu zu Gebote steht.

Uebrigens findet sich, dass die Grenz-t's, zu denen man auf dem vorgeschlagenen Wege als Ersatz für $t = \infty$ gelangt, nur sehr langsam mit n ansteigen. So hat man auf Grund unserer Fundamentaltabelle, unter Mitzuziehung ihrer, desshalb besonders beigefügten, Ergänzung folgende zu folgenden Werthen von n zugehörige Grenz-$r\frac{0}{0}$ und Grenz-t's.

n	$r\frac{0}{0}$	Grenz-t	Γ
25	99,000	1,9849	0,0003777
30	99,167	2,0106	2719
50	99,5	2,1379	1072
100	99,75	2,2449	0,0000420
150	99,8333	2,3628	142
200	99,875	2,4187	0,00000829
500	99,950	2,5896	0,00000382

XIV. Berechnungsweise der Constanten h, k.

Zur Berechnung der Constanten h, k für einen gegebenen Hauttheil, sei es nach F oder M, reichen principiell die Beobachtungen von $r\frac{0}{0}$ bei zwei verschiedenen D's auf dem betreffenden Hauttheil hin. Denn seien die beiden D respective D_1, D_2, die dabei gefundenen $r\frac{0}{0}$ gleich r_1, r_2 und die daraus nach der Fundamentaltafel erhaltenen t gleich t_1, t_2, so hat man die beiden Gleichungen:

$$hD_1 \pm k = t_1$$
$$hD_2 \pm k = t_2$$

wobei das obere Vorzeichen für meine, das untere für Müller's Formel gilt. Der Abzug der ersten von der zweiten Gleichung giebt beidesfalls:

$$h(D_2 - D_1) = t_2 - t_1$$

mithin:

$$h = \frac{t_2 - t_1}{D_2 - D_1}$$

und durch Substitution dieses Werthes von h in die eine oder andere der obigen Gleichungen:

$$\pm k = t_1 - hD_1 = t_2 - hD_2 \,.$$

Zu bestimmterem Anhalt lassen wir folgends das obere Vorzeichen im Sinne meiner Formel gelten, wovon sich die Uebertragung auf das untere im Sinne von Müller's Formel leicht ergiebt.

Da die Bestimmung der Constanten aus Beobachtungen blos bei 2 D's auf einer gegebenen Hautstelle keine grosse Sicherheit gewährt, zieht man im Allgemeinen eine Bestimmung aus einer grösseren Anzahl vor, nehmen wir beispielsweise 4, wie es bei den neueren Camerer'schen Handgelenkversuchen der Fall, wo die 4 Distanzen 1, 2, 3, 5 Mill. sind; und als Anhalt zur Erläuterung diene die Combination $FW\gamma$ in no. 1, nach Beobachter I, wofür die Data im VII. Abschnitt gegeben sind.

Hienach haben wir zu einander gehörig:

D	1	2	3	5
$r\frac{0}{0}$	30,65	37,70	51,70	63,4
t	0,6654	0,7157	0,8282	0,9416

und erhalten somit durch successive Substitution der vier D's in die Gleichung $t = hD + k$ folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1h + k &= 0{,}6654 \\ 2h + k &= 0{,}7157 \\ 3h + k &= 0{,}8282 \\ 5h + k &= 0{,}9416 \end{aligned}$$

Aus je zweien dieser Gleichungen lässt sich h, k bestimmen, was sechs mögliche Bestimmungen giebt (im Allgemeinen, wenn die Zahl der D gleich N ist, $\frac{N(N-1)}{2}$ Bestimmungen), die sich aber wegen unausgeglichener Zufälligkeiten etwas unterscheiden. Nun könnte man, um eine einheitliche Bestimmung aus ihnen zu gewinnen, die Mittel aus den so erhaltenen sechs h, k nehmen, wird es aber, falls man nicht gleich zur Bestimmung nach der sichersten Methode, d. i. der Methode der kleinsten Quadrate, seine Zuflucht nehmen will, zunächst praktischer finden, anstatt jener vielfachen Bestimmungen die zwei Gleichungen mit den zwei kleinsten D und ebenso die zwei mit den zwei grössten D zu addiren, oder, sollte man beispielsweise mit sechs Gleichungen zu thun haben, diess mit je drei derselben zu thun, womit man jedenfalls zwei resultirende Gleichungen erhält, die wie vorhin zur Bestimmung von h, k dienen können. In der That hat man solchergestalt in unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} 3h + 2k &= 1{,}3811 \\ 8h + 2k &= 1{,}7698 \end{aligned}$$

ferner durch Abzug der ersten Gleichung von der zweiten:

$$5h = 0{,}3887 ,$$

mithin

$$h = 0{,}07774$$

und durch Substitution dieses Werthes von h in die eine, beispielsweise die erste, beider Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0{,}23323 + 2k &= 1{,}38110 \\ 2k &= 0{,}114787 \\ k &= 0{,}57394 \end{aligned}$$

Diese, sehr leicht und einfach auszuführende und wegen der eben so leichten Revision nicht leicht Rechenversehen zulassende, Bestimmungsweise nenne ich die Summationsmethode, und bezeichne sie mit Summ.

Auch wenn die Zahl der D's und mithin Gleichungen unpaar ist, wird man von derselben Methode Gebrauch machen können, nur

dass dann die k's nicht einfach durch Abzug der summirten Gleichungen von einander verschwinden; man wird aber die Aufgabe auf den einfachen Fall einer paaren Anzahl von summirten Gleichungen zurückführen könnnen, indem man alle Gleichungen doppelt einführt, findet aber dabei, dass diess auf dasselbe herauskommt, als wenn man von den unpaaren Gleichungen die mittlere weglässt, indem bei Verdoppelung der Gleichungen die mittlere im Resultat auf einer Seite als additiv, auf der anderen als subtractiv in Rechnung kommt, was sich compensirt.

Um hienach Rechnung mit Beobachtung zu vergleichen, substituirt man die gewonnenen Werthe h, k in die Gleichungen für die verschiedenen D's und erhält hiedurch berechnete t's, aus diesen aber durch Rückgang auf die Fundamentaltafel berechnete $r\frac{0}{0}$. Die Differenzen zwischen beobachteten und berechneten $r\frac{0}{0}$ nennen wir ε. Die Summe der Quadrate der ε kurz $\Sigma\varepsilon^2$ oder das mittlere $\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}$ ist für Sicherheitsbestimmungen massgebend, worauf künftig zu kommen.

Nennen wir Kürze halber die zu den beobachteten $r\frac{0}{0}$ gehörigen t selbst beobachtete, indess die berechneten t, wie eben bemerkt, nach h, k erhalten sind, so können wir auch die Differenzen zwischen beobachteten und berechneten t in Betracht ziehen, und wollen diese mit $\varDelta$ bezeichnen.

Hienach haben wir überhaupt in unserem Beispiel:

D	$r\frac{0}{0}$ beob.	$r\frac{0}{0}$ ber.	ε	ε^2	t beob.	t ber.	$\varDelta$
1	30,65	28,64	— 2,01	4,040	0,6654	0,6517	— 0,0137
2	37,70	39,54	+ 1,84	3,386	7157	7294	+ 0,0137
3	51,70	49,26	— 2,44	5,954	8282	8072	— 0,0210
5	63,40	65,31	+ 1,91	3,648	9416	9626	+ 0,0210
			$\Sigma\varepsilon^2 = 17,028$				

Die Abweichungen ε sind ziemlich beträchtlich, sind aber nicht die definitiven, nach welchen später die Combination $FW\gamma$ zu beurtheilen ist, einmal, weil die Summationsmethode, bei der wir noch stehen, nicht die sicherstmögliche ist, zweitens, weil die vorigen Bestimmungen blos von einer Versuchsperson herrühren; es haben

aber **fünf** bei denselben *D*'s beobachtet, und zur Ausgleichung ihrer Zufälligkeiten*) werden hievon Mittelbestimmungen der *h*, *k* nach Methode T oder R des XV. Abschnittes zu nehmen sein**), die dann ganz eben so zu behandeln sind, als wenn man mit den Versuchen einer einzelnen Person zur Gewinnung ihrer specialen *h*, *k* zu thun hätte, und so können wir die Erläuterung in dieser Hinsicht an dem vorigen einfachen Beispiel fortsetzen.

Man kann bei unserem Beispiel bemerken, dass sich die positiven und negativen Δ's in der ersten Abtheilung der summirten Gleichungen ausgleichen, eben so in der zweiten; und dasselbe findet sich auch, wenn in jede beider Abtheilungen mehr als zwei *t*'s eingehen, indem z. B., wenn es je drei sind, die Summe von je zwei Δ's gleich dem dritten Δ mit entgegengesetztem Vorzeichen ist. Diese Eigenschaft der, durch die Summationsmethode zu erhaltenden, Δ kann zur Controle der Rechnung dienen, indem, wenn sie (abgesehen von Abrundung in Decimalen) nicht zutrifft, falsch gerechnet ist.

Nun erreicht man allerdings weder durch Mittelziehung aus den vielfachen Bestimmungen, noch durch die Summationsmethode die **möglichst** sichere, d. i. zum kleinstmöglichen $\Sigma\varepsilon^2$ führende, Bestimmung der Constanten, worauf es principiell abgesehen sein muss; sondern hiezu kann nur die, mit Qu. zu bezeichnende, Methode der kleinsten Quadrate führen, sofern diese eben darauf gestellt ist, bei Vorhandensein von mehr Gleichungen, als zur Bestimmung der Constanten hinreichen, diese so zu bestimmen, dass danach die Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen den direct beobachteten

*) Natürlich kann unter einer Ausgleichung von Zufälligkeiten, wie sie hier und wo sonst noch die Rede auf eine solche kommt, zu verstehen ist, nicht eine Ausgleichung der Zufälligkeiten gemeint sein, die nach den Erörterungen des XII. Abschnittes wesentlich zur Methode gehören, sondern nur eine Ausgleichung der Zufälligkeiten zweiter Ordnung, vermöge deren die $\frac{r}{n}$ der einzelnen Beobachter nach dieser oder jener Richtung mehr oder weniger von den, streng genommen nur für ein unendliches *n* geltenden Gesetzen der zufälligen Abweichungen abweichen, welche den Formeln zu Grunde gelegt sind.

**) Die Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung hienach, welche vermöge einer viel besseren Zusammenstimmung nur zu einem $\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}374$ für dieselbe Combination führt, ist am Schlusse einer Einschaltung des XVI. Abschn. gegeben.

Werthen, unseren Falls den r_0^0, und den nach den Constanten berechneten Werthen einen kleinern Werth erhält, als wenn man irgend welche andere Werthe der Constanten verwendete. Und da diese Methode in jedem Falle zu Gebote steht, so scheint es zunächst, dass man sich auch in jedem Falle daran zu halten, und von der Summationsmethode ganz abzusehen habe. Aber es giebt Gesichtspuncte, welche die Anwendung von Summ. unter gar nicht seltenen Umständen selbst anstatt Qu., in jedem Falle aber zur Einleitung und in gewissem Sinne zur Controle von Qu., empfehlen können; und da dieser Gegenstand von grossem praktischen Interesse ist, wird etwas näher darauf einzugehen sein.

Selbst nach Qu. erhält man keine absolut sichere Bestimmung der Constanten, sondern diese nach Massgabe des grösseren oder geringeren $\Sigma\varepsilon^2$, was die Methode Qu. bei Vergleichung von Rechnung mit Beobachtung noch übrig lässt, mit grösseren oder geringeren wahrscheinlichen Fehlern behaftet; man erhält die Constanten nur eben sicherer, als bei Anwendung von Summ. auf dieselben Beobachtungen bei gleicher Zahl n derselben. Wenn man aber das n bei Summ. über das n bei Qu. hinaus steigert, kann man dieselbe Kleinheit des mittleren $\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}$, hiermit dieselbe Sicherheit, dadurch erreichen*), als durch Qu. mit dem kleinern n. Auch nähert sich allgemein gesprochen bei Gleichhaltung des n für Summ. und Qu. das Resultat beider der Gleichheit um so mehr, je grösser das n genommen wird, und würde unter Voraussetzung der Richtigkeit der Formel bei unendlichem n principiell ganz gleich werden. Mit einem Worte, man hat in Summ. keine falsche, sondern nur unter Anwendung von gleichem n minder sichere Methode als Qu., was aber durch Vergrösserung des n bei Summ. ausgeglichen werden kann. Auch leuchtet diess aus dem Gesichtspuncte ein, dass, wenn der Ansatz der einzelnen Gleichungen richtig ist, er nicht durch Summation derselben falsch werden, also nur die Sicherheitsbestimmung dadurch beeinflusst werden kann.

Nun ist Qu. viel mühsamer, zeitraubender und leichter Rechen-

*) Wenn ich vielfach die Sicherheit blos nach der Grösse des $\Sigma\varepsilon^2$, nicht $\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}$, vergleiche, so ist dabei stets ein gleiches n vorausgesetzt.

versehen unterworfen als Summ., und so kann es bei hinreichend grossem n, wo das Resultat beider Methoden sich überhaupt sehr nahe kommt, schon hiedurch gerechtfertigt erscheinen, bei Summ. stehen zu bleiben, und insbesondere wird diess Experimentatoren, die nicht sehr geübt im Rechnen sind, zu empfehlen sein; denn was nützt es, wenn sie eine an sich sichrere Rechenmethode anwenden, ohne sich und Andere sicher zu stellen, dass sie sich nicht bei den vielen Operationen, die dabei vorzunehmen sind, ein und das anderemal versehen haben, was in der That nach meiner eignen Erfahrung schwerer zu vermeiden ist, als man wohl denken möchte. Sollte aber der Zweck der Untersuchung nachträglich noch eine sichrere Bestimmung fordern, so mögen sie dieselbe gewandteren Rechnern überlassen, und die vermehrte Zeit, welche die Rechnung nach Qu. fordern würde, lieber auf Vergrösserung des n wenden, und dadurch die Reihen an sich selbst sicherer machen. Reihen mit kleinem n aber können auch durch Qu. nicht sicher werden.

Auch für den gewandten Rechner aber kann Anlass sein, vielmehr bei Summ. stehen zu bleiben, als sich zu Qu. zu wenden. Es kommt nämlich vor, dass zur Entscheidung einer Frage das Resultat aus sehr vielen Reihen zu ziehen ist, die wegen Verschiedenheit des D und n nicht zu mittleren Reihen combinirbar sind; es kann aber für die zu Gebote stehende Zeit und Geduld selbst des gewandtesten Rechners undurchführbar sein, die umständliche Methode Qu. auf alle anzuwenden. Dann kann man um so mehr bei Summ. stehen bleiben, als durch die grössere Zahl der Reihen ein entsprechender Vortheil als durch Vergrösserung des n erreicht wird. Gesetzt alle oder die weit grössere Zahl der Reihen stimmt nach Summ. zu einer gewissen Entscheidung zusammen, so kann man auch nach Qu. keine andere Entscheidung mehr erwarten; gesetzt, Summ. führt zu fast eben so viel für als wider, so wird auch die Entscheidung nach Qu. zweifelhaft bleiben.

Mit all' dem bleibt der Vortheil grösserer Sicherheit von Qu. vor Summ. an sich bestehen, und habe ich desshalb in dieser ganzen Untersuchung bei allen definitiven Bestimmungen von Qu. Gebrauch gemacht; dabei aber auch aus folgenden Gründen nie versäumt, die Behandlung derselben Reihen nach Summ. vorausgehen zu lassen.

Zuvörderst kann es erwünscht sein, sich durch die leichte Anwendung von Summ. vorläufig zu überzeugen, ob man mit einer sehr sicheren oder unsicheren Reihe zu thun hat, und welcherlei Resultat man von einer nachherigen Anwendung von Qu. zu erwarten hat. Erhält man durch Summ. ein sehr geringes $\Sigma\varepsilon^2$, so kann sich diess durch Qu. nicht mehr erheblich verkleinern, weil es sich überhaupt nicht unter Null hinaus verkleinern kann; erhält man ein sehr grosses $\Sigma\varepsilon^2$, so kann die Verkleinerung durch Qu. unter Umständen erheblich sein; doch bleibt allgemein gesprochen das $\Sigma\varepsilon^2$ immer noch gross und die Reihe unsicher. Ein weit grösserer Vortheil aber liegt darin, dass man, wie schon oben angedeutet, durch die vorläufige Anwendung von Summ. bis zu gewissen Grenzen vor Rechenversehen bei nachheriger Anwendung von Qu. geschützt wird. Sofern nämlich Qu. in jedem Falle nur ein geringeres (höchstens gleiches) $\Sigma\varepsilon^2$ geben kann, als Summ., gewinnt man die Gewissheit, dass ein Rechenfehler begangen ist, wenn sich diese Bedingung nicht erfüllt findet, und hat nicht eher zu ruhen, bis er gefunden ist; ja ich gestehe, bei den ausserordentlich zahlreichen Anwendungen, die ich von Qu. zu machen hatte, ohne diese Controle mehr als einmal bei einem falschen Resultat stehen geblieben zu sein; da sich, wie es wohl geschieht, dasselbe Versehen bei Revision der Rechnung nach Qu. wiederholte. Auch wo jene Bedingung erfüllt ist, wird man aber bei starker Abweichung des Resultats zwischen Summ. und Qu. sich angeregt finden, den möglichen Grund davon in einem Rechenfehler zu suchen, so dass starke Versehen durch diese Verbindung von Summ. mit Qu. ziemlich ausgeschlossen sind.

Endlich kommt bei der gewöhnlichen Ausführungsweise von Qu., die ich als Correctionsmethode bezeichnen werde (statt deren jedoch hier von einer anderen, merklich äquivalenten, Gebrauch gemacht werden wird), noch folgender Vortheil der vorgängigen Anwendung von Summ. in Betracht. Die Beziehung zwischen den durch Beobachtung gegebenen $r\frac{g}{0}$ und den (unter Vermittelung der secundären Formel und Fundamentaltafel) daraus zu bestimmenden Unbekannten h, k ist nicht durch eine sog. lineare Gleichung ausdrückbar, d. h. in welche die gesuchten Werthe blos in einfacher Potenz eingehen; und diess bringt für die Anwendung der Methode mit sich, dass man sich vor Allem angenäherte Werthe von h, k, je angenäherter,

um so besser, zu verschaffen hat, die man dann durch Correction genauer macht. Gewöhnlich geschieht diess wohl durch Ableitung der genäherten Werthe aus zwei Gleichungen, die man, sei es aufs Gerathewohl oder nach irgend einem particulären Gesichtspuncte, aus der vorräthigen Zahl der Gleichungen dazu auswählt. Das Summationsverfahren aber giebt die angenäherten Werthe unter Zuziehung aller Gleichungen in ganz methodischer und für alle Fälle gleichförmiger Weise jedenfalls in grösserer Annäherung als nach blos zwei Gleichungen her.

Um die Verhältnisse zwischen den Ergebnissen von Summ. und Qu. durch Beispiele theils an den Reihen der einzelnen Beobachter I, II u. s. w., theils an Mittelreihen derselben erläutert zu finden, braucht man blos auf die, im IX. Abschnitt angeführten, Tabellen C, D zurückzublicken, wo die Ergebnisse vergleichend nach Summ. und Qu. zusammengestellt sind.

Unterscheiden wir nun kurz die Werthe nach Summ. und Qu. durch s und q, so sieht man in Tab. C und D, dass wirklich alle Werthe $\Sigma\varepsilon^2$ kleiner nach q als s sind; dass sie aber, eben so wie die h und k der Tabelle B, bei Wechsel von Combinationen oder Beobachtern einander nach s und q nahehin parallel gehen, und dass dabei bald s bald q grössere Werthe für h, k giebt, was die, ohnehin nicht gerechtfertigte, Besorgniss, durch Anwendung von Summ. statt Qu. in einen constanten Fehler zu verfallen, auch von empirischer Seite ausschliesst. Ausserdem kann man sich durch Vergleichung der in Tabelle D für die einzelnen Beobachter I, II u. s. w. gegebenen Werthe $\Sigma\varepsilon^2$ mit denen, welche in Tab. C für die, nach Methode T (Abschn. XV) erhaltenen Mittelreihen dieser Beobachter in derselben Combination gegeben sind, überzeugen, wie sehr gemeinhin durch die Mittelziehung der Reihen die Werthe von $\Sigma\varepsilon^2$ abnehmen.

Dass $\Sigma\varepsilon^2$ bei den vortheilhaftesten Combinationen sich bis auf Bruchwerthe der Einheit verkleinert, hängt daran, dass die Abweichungen ε zwischen Rechnung und Beobachtung hier selbst sämmtlich nur Bruchwerthe der Einheit sind, die sich durch Quadratur um so mehr verkleinern.

Es ist nun aber doch das Verfahren nach Qu. anzugeben. Die einfachste Form desselben, welche für sog. lineare Gleichungen gilt,

ist hier bemerktermassen nicht anwendbar, weil in der Gleichung $hD + k = t$ der Werth t nicht direct durch Beobachtung gegeben, sondern eine complexe Function des direct beobachteten $\frac{r}{n}$ oder $r\frac{0}{0} = 100\frac{r}{n}$ ist. Um nun doch die Aufgabe auf die für lineare Gleichungen gültige Form zurückzuführen, steht ein doppeltes Verfahren zu Gebote, was ich Kürze halber als Gewichtsverfahren und Correctionsverfahren unterscheide. Davon ist das erste von Müller eigens für die Zwecke unseres Untersuchungsgebietes erfunden, und von ihm theoretisch und empirisch als brauchbar erwiesen, indess das zweite längst bekannt und allgemein in Gebrauch ist*).

Eine Hauptrolle spielen in dem Gewichtsverfahren die Werthe $\Gamma = e^{-2t^2}$, sofern sie als Gewichte in mathematischem Sinne in den Gleichungen, womit man zu thun hat, verwendet werden. Zu jedem $r\frac{0}{0}$ und mithin t gehört ein besonderes Γ als Function dieses t; anstatt es aber für jedes bei den Versuchen vorkommende $r\frac{0}{0}$ erst besonders zu berechnen, ist es schon berechnet jedem $r\frac{0}{0}$ in der Fundamentaltabelle beigegeben; und hat man noch überdiess der Fundamentaltafel eine Hülfstafel für die bei der Berechnung nach Qu. zuzuziehenden Γt beigefügt, welche erspart, die Producte Γt in jedem Falle erst besonders zu bilden, so ist das Gewichtsverfahren etwas bequemer und kürzer als das Correctionsverfahren, wesshalb ich es hier benutzt habe und folgends im praktischen Interesse so darlegen und an einem Beispiel erläutern werde, dass es leicht verstanden und danach leicht ausgeführt werden kann, ohne die, dem Qu. überhaupt anhaftende, Umständlichkeit damit ganz ersparen zu können. Inzwischen werde ich hienach auch auf eine vergleichungsweise Darstellung des Correctionsverfahrens mit dem Gewichtsverfahren um so mehr eingehen, als ich den praktischen Vortheil des Gewichtsverfahrens vor dem Correctionsverfahren doch keineswegs so bedeutend finde, als er nach Müller (dessen Abh.

*) Müller unterscheidet drei Verfahren, indem er als I das aufführt, was oben als Correctionsverfahren bezeichnet ist, als II das von ihm mit Recht verworfene, wo man statt $\Sigma\varepsilon^2$ vielmehr $\Sigma\Delta^2$ zum Minimum macht, und als III unter der Bezeichnung Verfahren mit Gewichtscorrectionen das, was ich oben kurz als Gewichtsverfahren bezeichne.

p. 200) scheinen möchte, falls man nur in einer für das Correctionsverfahren anzuwendenden Fundamentaltabelle die Γ durch $\sqrt{\Gamma} = e^{-t^2}$ ersetzt, und als die Natur und der Grund des praktischen Vortheils, der doch hienach noch für das Gewichtsverfahren übrig bleibt, selbst nur aus dem Vergleiche beider Methoden erhellen kann.

Ausser h, k können auch deren wahrscheinliche Fehler, die ich respective mit $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ bezeichne, in Zusammenhang mit h, k selbst nach denselben Methoden bestimmt werden.

Vorausgesetzt ist überall bei den folgenden Formeln, dass bei allen D der Beobachtungsreihe, worauf die Formeln Anwendung finden sollen, dieselbe Zahl der Beobachtungen oder Fälle, dasselbe n, Platz gegriffen hat. Wo nicht, so wäre jedes Γ noch mit dem zum betreffenden D zugehörigen n multiplicirt einzuführen.

Hienach nun gelten für die Gewichtsmethode folgende, durch die nachherigen Erklärungen und Anwendungen zu erläuternde, Formeln zur Bestimmung von h und k:

$$h = \frac{A}{C}\,; \qquad k = \frac{B}{C}$$

$$A = \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Gamma t D - \Sigma\Gamma D \cdot \Sigma\Gamma t$$

$$B = \pm\, \Sigma\Gamma D^2 \cdot \Sigma\Gamma t \mp \Sigma\Gamma D \cdot \Sigma\Gamma t D$$

$$C = \Sigma\Gamma D^2 \cdot \Sigma\Gamma - (\Sigma\Gamma D)^2.$$

Hierin bedeutet $\Sigma\Gamma$ die Summe aller Γ der Fundamentaltabelle, welche den verschiedenen $r\frac{a}{n}$ der Beobachtungsreihe zugehören; $\Sigma\Gamma t D$ die Summe der Producte aus den Γ in die zugehörigen t und D u. s. f.; ΓD die Summe der Producte blos aus Γ und D u. s. f. Die Bildung von $\Sigma\Gamma t$ wird dadurch erleichtert, dass zu jedem t das zugehörige Γt durch die Hülfstafel gegeben ist, indess man die übrigen Producte besonders zu berechnen hat. Im Werthe von C ist $\Sigma\Gamma D^2$ nicht mit $(\Sigma\Gamma D)^2$ zu verwechseln, sofern ersteres die Summe der Producte aus den Γ in die D^2, letzteres das Quadrat der Summe der einfachen Producte aus den Γ in die D ist.

Die Formel für h stimmt nach F und M überein, wogegen für die Bestimmung von k nach F das obere, nach M das untere Vorzeichen im Werthe von B gilt.

Als Beispiel der Anwendung nehme ich die Reihe des Beobachters I für $FW\gamma$, deren Ergebniss nach Summ. und Qu. schon

S. 169 an der Spitze der entsprechenden Ergebnisse für die anderen Beobachter angeführt ist. Man hat unter Zuziehung meiner Fundamentaltafel:

Rechnung nach Qu. für $FW\gamma$. Handgel. no. 1. Beob. I.

D	$r\frac{0}{0}$	t	Γ	Γt	ΓD	$\Gamma t D$	ΓD^2
1	30,65	0,6654	0,4125	0,2744	0,4125	0,2744	0,4125
2	37,70	7157	3590	2569	7180	5139	1,4360
3	51,70	8282	2537	2101	7611	6304	2,2832
5	63,46	9416	1698	1599	8492	7996	4,2460
Summen Σ			1,1950	0,9013	2,7408	2,2183	8,3777
$\log \Sigma$			0,07737	0,95487—1	0,43788	0,34602	0,92312

Unter Anwendung der unten stehenden Summen und deren Logarithmen gewinnt man nun nach obigen Formeln zuvörderst das, in die Bestimmung von h und k gemeinsam eingehende

$$C = 10,034 - 7,5121 = 2,4913$$
$$\log C = 0,39643$$

und hat ferner zur Bestimmung von A und B:

$$\begin{array}{rl} \Sigma\Gamma \cdot \Sigma\Gamma t D = 2,6509 \\ \Sigma\Gamma t \cdot \Sigma\Gamma D = 2,4703 \\ \hline A = 0,1806 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \Sigma\Gamma t \cdot \Sigma\Gamma D^2 = 7,5507 \\ \Sigma\Gamma D \cdot \Sigma\Gamma D = 6,0800 \\ \hline B = 1,4707 \end{array}$$

hienach:

$$h = \frac{0,1806}{2,4913} = 0,072492$$

$$k = \frac{1,4707}{2,4913} = 0,59032 .$$

Diese Werthe von h, k unterscheiden sich um eine Kleinigkeit von den, oben in Tabelle D, Abschn. IX, für dieselbe Reihe gegebenen, unabgekürzt 0,07233 und 0,59085 zu schreibenden, was den Grund hat, dass bei diesen, wie überhaupt von mir im Allgemeinen, die Werthe t, Γ, Γt mittelst Interpolation der Fundamentaltafel und Hülfstafel bis zu fünf Decimalen erhalten waren, indess die Interpolation bei jetziger beispielsweiser Bestimmung einfachheitshalber durch Abrundung nur bis zu vier Decimalen ausgedehnt ist, also z. B. dort $t = 0,66542$, $\Gamma = 0,41246$, $\Gamma t = 0,27444$, statt hier nur respect. 0,6654, 0,4125, 0,2744 genommen ist. Da nun die letzte Decimale der Werthe der Fundamentaltafel und Hülfstafel selbst nicht ganz sicher ist, hat die Interpolation bis auf fünf Decimalen nur den, praktisch eigentlich zu vernachlässigenden Vortheil, dass sich nicht die Ungenauigkeit, welche aus

der Abrundung auf vier Decimalen hervorgeht, mit der Ungenauigkeit der letzten Decimale der Tafeln cumulirt.

Die Vergleichung zwischen Rechnung und Beobachtung geschieht entsprechend, als schon bezüglich der Summationsmethode angegeben ist, und führt zu einem $\Sigma\varepsilon^2 = 13,611$, indess man nach Summ. hatte 17,028, Werthe, die sich aus demselben Grunde als h und k von den S. 169 angegebenen um eine Kleinigkeit unterscheiden.

Will man auch die wahrscheinlichen Fehler von h und k, respective $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, bestimmen, welche den h, k mit dem gewöhnlichen Zeichen $\pm$ beizufügen sind, so dienen hiezu folgende Formeln:

$$\mathfrak{h} = P\sqrt{\Gamma}; \qquad \mathfrak{k} = P\sqrt{\Gamma D^2}$$

$$P = \frac{0,6744897}{\sqrt{N-2}}\sqrt{\frac{\Sigma\Gamma\Delta^2}{C}}.$$

N ist die Zahl der D, also, da bei unsern Handwurzelversuchen 4 D's angewendet sind, $\sqrt{N-2} = \sqrt{2}$, und der Logarithmus von $\frac{0,67\ldots}{\sqrt{2}} = 0,67846-1$. Unter Δ sind wie früher die Unterschiede zwischen den berechneten und den Beobachtungs-t verstanden.

Zur Bildung von $\Sigma\Gamma\Delta^2$ hat man nicht die Summe der Δ^2 mit der Summe der Γ zu multipliciren, sondern die Summe der Producte aus den Δ^2 in die zugehörigen Γ zu nehmen. $\Sigma\Gamma$, $\Sigma\Gamma D^2$ und C sind schon bei der Bestimmung von h, k gefunden.

Hinsichtlich der theoretischen Herleitung der vorigen Methode Seitens Müller verweise ich auf seine Abhandlung p. 203 ff. Die experimentelle Bewährung hat er p. 213 durch den, für eine Anzahl Beispiele geführten, Nachweis gegeben (wozu ich unten Beispiele nach eigner Berechnung fügen werde), dass die nach seinem Gewichtsverfahren berechneten Werthe mit den nach dem Correctionsverfahren berechneten bis auf Kleinigkeiten stimmen; indess das Correctionsverfahren selbst, als anerkannt, keines Beweises mehr bedarf. Ein absolutes Zusammenstimmen aber kann desshalb nicht stattfinden, weil beide Methoden, wegen ihrer Anwendung auf nicht lineare Gleichungen, doch nur auf verschiedenen Wegen so weit getriebene Approximationen mit Vernachlässigung höherer Potenzen sind, dass bei nicht zu grossen Abweichungen zwischen Beob. und Rechn. die Abweichungen von einer absoluten Schärfe der Bestimmung vernachlässigt werden können.

Ausserdem kann noch als empirische Bewährung gelten, dass ich bei den ausserordentlich zahlreichen Fällen, wo ich in dieser Untersuchung Qu. nach der Gewichtsmethode mit vorgängiger Anwendung der Summationsmethode gebraucht habe, stets $\Sigma'\varepsilon^2$ nach erster Methode wirklich kleiner als vorher nach letzter gefunden habe, nur mit einer scheinbaren Ausnahme, wo nämlich $\Sigma'\varepsilon^2$ nach der Summationsmethode dem $\Sigma'\varepsilon^2$ nach der Gewichtsmethode so nahe kam, dass der Unterschied von der Ordnung der durch Abrundung geschwundenen Decimalen war, und zufällig der spurweise Unterschied zu Gunsten der Kleinheit von $\Sigma\varepsilon^2$ nach der Summationsmethode ausfiel.

Hienach wird man sich des Gewichtsverfahrens nach obigen Formeln mit vollem Zutrauen bedienen können.

Die Correctionsmethode anlangend, so führt sich dieselbe nach folgender Weise aus.

Man verschafft sich zuerst, am besten durch die Summationsmethode, angenäherte Werthe von h, k, substituirt diese in die secundäre Gleichung $t = hD + k$ und gewinnt hiedurch berechnete Werthe t, die sich von den beobachteten (d. i. zu den beobachteten $r\frac{0}{0}$ zugehörigen) um Fehler unterscheiden, die wir Δ nennen. Mit Hülfe derselben berechnet man nach den gleich anzuführenden Formeln Correctionen ∂h und ∂k, die man zu den angenäherten h, k zuzufügen hat, um diese richtiger zu erhalten, und zwar mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von dem, womit ∂h, ∂k erhalten worden, wenn man wie gewöhnlich die Fehler als Rechnung minus Beobachtung nimmt, im Gegenfalle mit gleichem Vorzeichen. Hält man die erste Correction noch nicht für genügend, so betrachtet man die corrigirten h, k als Ausgangswerthe für eine neue, nach denselben Formeln vorzunehmende, Correction. In die Formeln geht der Werth ω ein, welcher nichts Anderes als $e^{-t^2} = \sqrt{\Gamma}$ ist; und bemerktermassen in einer, für die Correctionsmethode eingerichteten, Fundamentaltabelle an die Stelle von Γ tritt.*) Die Formeln zur Bestimmung der Correctionen aber sind diese:

$$\partial h = \frac{A'}{C'}, \quad \partial k = \frac{B'}{C'}$$

*) Er wird eben so wie Γ nach S. 205 berechnet; nur dass man statt 2 log t blos log t in Anwendung bringt.

$$A' = \Sigma\omega \cdot \Sigma\omega D\varDelta - \Sigma\omega D \cdot \Sigma\omega\varDelta$$
$$B' = \pm\, \Sigma\omega D^2 \cdot \Sigma\omega \mp \Sigma\omega D \cdot \Sigma\omega D\varDelta$$
$$C' = \Sigma\omega D^2 \cdot \Sigma\omega - (\Sigma\omega D)^2;$$

das obere Vorzeichen in B' gilt auch hier für F, das untere für M. Da die einzelnen $\varDelta$s theils positiv, theils negativ sind, muss diess in Bildung des $\Sigma\omega\varDelta$ und $\Sigma\omega D\varDelta$ berücksichtigt werden, sofern die $\varDelta$s nicht nach ihrem absoluten Werthe, sondern mit ihrem Vorzeichen in diese Summen eingehen, welche hienach je nach Ueberschuss der negativen oder positiven Producte selbst negativ oder positiv ausfallen.

Zu vorigen Gleichungen aber gelangt man auf folgendem Wege. Indem man die kleinen Aenderungen ∂h, ∂k, $\partial t = \varDelta$ als Differenziale von h, k, t betrachtet, hat man

$$D\partial h \pm \partial k = \partial t = \varDelta \quad \ldots \text{(a)}$$

und unter Anwendung des oberen Vorzeichens nach meiner Grundformel B (S. 199)

$$\partial\frac{r}{n} = \frac{4\,\omega\varDelta}{\sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots \text{(b)}$$

mithin durch Uebertragung des Werthes $\varDelta$ aus voriger Gleichung in diese

$$\partial\frac{r}{n} = \frac{4\,\omega}{\sqrt{\pi}}(D\partial + \partial k) \quad \ldots \text{(c)}$$

Lässt man nun $\partial\frac{r}{n}$ die Abweichungen zwischen beob. und ber. $\frac{r}{n}$ d. i. $\frac{\varepsilon}{100}$ bedeuten, so hat man in voriger Gleichung eine lineare Gleichung, nach welcher sich ∂h und ∂k als Function von $\frac{\varepsilon}{100}$ bestimmen lassen. Durch Gleichsetzung von (b) und (c) aber gewinnt man, indem sich $\frac{4}{\sqrt{\pi}}$ auf beiden Seiten hebt, die bequemere lineare Gleichung

$$\omega(D\partial h + \partial k) = \omega\varDelta \quad \ldots \text{(d)}$$

zwischen ∂h, ∂k und $\varDelta$, statt vorhin $\partial\frac{r}{n}$, mit einem ihr beizulegenden Gewichte ω, wonach behandelt sie zu obigen Formeln für die Bestimmung von ∂h, ∂k führt.

Sollte man nun noch Misstrauen gegen die theoretische Herleitung der hier vorgezogenen Form (d) hegen, so würde man es doch

durch empirische Vergleichung der Ergebnisse der darauf gegründeten obigen Formeln mit denen der Summationsmethode und Gewichtsmethode beseitigt finden; und ich habe in dieser Hinsicht vier Reihen untersucht, zwei aus der ersten Abtheilung (no. 1) der Handgelenkversuche, $FW\gamma$ I und $FW\beta$ II, eine aus der zweiten Abtheilung (no. 2) dieser Versuche $FW\gamma$ II, und eine aus den Stirnversuchen*) $FW\gamma$ I, welche Reihen ich respective als (1), (2), (3), (4) unterscheiden werde, und deren Daten folgende sind:

D	Werthe $r\frac{0}{0}$				
	(1)	(2)	(3)	D	(4)
1	30,65	56,3	33,25	0,5	22
2	37,70	61,75	38	1	32
3	51,70	60,35	43	2	55,6
5	63,40	77,3	34,75	4	77,6
				6	87,2
				8	97,6

Mit Rücksicht auf vorstehende Data waren diese Reihen so ausgewählt, dass damit recht mannichfaltige Verhältnisse in's Spiel traten. So steigen in (3) die $r\frac{0}{0}$ blos bis 54,75, in (4) bis 97,6. In (2) findet die Verkehrtheit statt, dass dem grössern $D = 3$ ein kleineres $r\frac{0}{0}$ zugehört, als dem kleineren $D = 2$; und die Werthe $\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n}$ fanden sich sehr verschieden bei diesen Beispielen.

Von diesen vier Reihen sind nun die Werthe h, k vergleichungsweise nach der Summationsmethode, nach der, mit Corr. zu bezeichnenden, auf Grund der Gleichung (d) ausgeführten Correctionsmethode und nach der, mit Gew. zu bezeichnenden, Gewichtsmethode berechnet, und zwar bei Corr. im Ausgange von den nach Summ. gefundenen Werthen. Bei allen vier Reihen ist nach der ersten Correction noch eine zweite versucht worden, diese aber bei (2) und (4) verschwindend klein gefunden, so dass schon die erste Correction hier zum Schlusse führte, wogegen sich bei (1) und (3) durch eine zweite Correction noch eine kleine Aenderung ergeben hat.

*) Abweichend von der sonstigen Verwerthung der Stirnversuche (no. 3) in Abschn. IX und XVI ist hier $D = 8$ mit zugezogen.

Vergleich der Ergebnisse nach der Summations-, Correc-tions- und Gewichtsmethode für F.

		h	k	$\Sigma\varepsilon^2$
(1)	Summ.	0,07774	0,5740	17,05
	Corr. 1	0,07179	0,5901	12,99
	« 2	0,07300	0,5880	12,23
	Gew.	0,07233	0,5909	13,60
(2)	Summ.	0,04648	0,8274	45,54
	Corr. 1	0,05638	0,7972	40,46
	Gew.	0,05192	0,8056	40,60
(3)	Summ.	0,04208	0,6376	2,293
	Corr. 1	0,04309	0,6357	2,270
	« 2	0,04330	0,6342	2,235
	Gew.	0,04229	0,6361	2,213
(4)	Summ.	0,1423	0,5493	32,47
	Corr. 1	0,1399	0,5467	32,34
	Gew.	0,1421	0,5425	30,85

Man sieht, dass abgesehen von (2), wo h einen ziemlich verschiedenen Werth nach Corr. und Gew. hat, beide Methoden überall zu Resultaten führen, die sich nur um eine Kleinigkeit unterscheiden. Die Ausnahme bei (2) aber kann nicht befremden, weil sie eine anomale Reihe mit der S. 227 bemerkten Verkehrtheit betrifft, wodurch die Bedingung, blos mit kleinen Abweichungen zwischen Beob. und Rechn. zu thun zu haben, verlassen wird.

Bei zwei von den vier Reihen ist $\Sigma\varepsilon^2$ nach der Correctionsmethode kleiner als nach der Gewichtsmethode, bei den zwei andern umgekehrt, wonach der Vortheil in dieser Hinsicht zwischen Corr. und Gew. wechselt, und zwar gilt diess schon, wenn man nur die erste Correction berücksichtigt. Ich hatte nun erwartet, was doch bei näherer Ueberlegung nicht als Nothwendigkeit erscheint, dass durch fortgesetzte Correctionen das $\Sigma\varepsilon^2$ in jedem Falle unter das $\Sigma\varepsilon^2$ der Gewichtsmethode herabgebracht werden könne, aber (3) und (4) beweisen, dass der Schluss der Approximation auch schon früher bei der Correctionsmethode eintreten kann.

Werfen wir hienach einen vergleichenden Rückblick auf die Formelsysteme, welche für Gew. und Corr. dienen, so sieht man, dass ihre Form ganz gleich ist; es ersetzt sich nur das T und t für Gew. durch ω und Δ für Corr., und auch die Formeln für die wahrscheinlichen Fehler $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ lassen sich einfach durch diesen Ersatz nach Corr. herstellen. Also kann auch die Rechnung nach Gew. für Bestimmung von ∂h und ∂k ganz in Form der Rechnung nach Gew. zur Bestimmung von h, k geführt werden.

Nach Vorigem lässt sich nun auch beurtheilen, worin der für Gew. in Anspruch genommene praktische Vortheil vor Corr. liegt. Zunächst scheint sich als solcher darzubieten, dass man zur Anwendung von Gew. nicht nöthig hat, erst angenäherte Werthe von h und k zu suchen und danach Rechnung mit Beobachtung zu vergleichen, um die in die Formeln für Corr. eingehenden Δ zu gewinnen, da man vielmehr nach Gew. mit den, durch die Fundamentaltafel zu den beobachteten $r\frac{r}{0}$ gegebenen, t unmittelbar in die Formeln für Gew. eingehen kann. Doch möchte ich diesen Vortheil nicht hoch anschlagen oder selbst kaum gelten lassen, da jene Vorbereitung von Corr. durch Anwendung von Summ. nicht sehr umständlich und zur Controle aus dem S. 219 angegebenen Gesichtspunkte nicht minder nützlich als für Corr. ist. Aber jedenfalls bleibt als praktischer Vortheil für Gew., dass sie eine Hülfstafel gestattet, welche die, in ihre Formeln eingehenden, Tt zu den gegebenen $r\frac{r}{0}$ ein- für allemal giebt, wogegen Corr. keine solche für die $\omega\Delta$ gestattet, die statt dessen in ihre Formeln eingehen, sondern nöthigt, die Producte $\omega\Delta$ jedesmal besonders zu bilden, was die Umständlichkeit um so mehr vermehrt, je grösser die Zahl der Δ ist. Auch lässt sich als kleiner Vortheil hinzufügen, dass man, da Gew. (für F) blos positive Werthe von t giebt, auch blos positive Tt und TD hat, bei Bildung von ΣTt und ΣTtD die darein eingehenden Producte gerade herunter addiren kann, dagegen bei Corr. wegen der theils positiven theils negativen Δs, die positiven und negativen Producte trennen, und durch Abzug von einander die definitive Summe gewinnen muss.

XV. Mittelbestimmungen der Constanten h, k aus den Beobachtungsreihen verschiedener Beobachter.

Die Rechnungsregeln des vorigen Abschnittes sind zunächst auf die Beobachtungsreihen einzelner Beobachter beziehbar, während deren eine constante oder nur in engen Grenzen um einen Mittelwerth schwankende extensive Empfindlichkeit stattgefunden hat; aber nicht selten, und so namentlich bei unserer Untersuchung, gilt es, Werthe h, k als Mittelwerthe aus einer Mehrheit von Reihen zu gewinnen, die sei es von verschiedenen Beobachtern oder von demselben Beobachter in verschiedenen Epochen, wozwischen man auf gleiche oder gleichbleibende Empfindlichkeit nicht rechnen kann, erhalten worden sind. Halten wir uns in der Besprechung der, auf solche Fälle bezüglichen, Regeln nur an erstern Fall, indem der zweite unter entsprechende Gesichtspuncte tritt.

In jedem Falle ist dabei vorausgesetzt, dass die Beobachter, abgesehen von ihrer verschiedenen Individualität, unter möglichst vergleichbaren Umständen beobachtet haben, und, soll sich die Rechnung nicht compliciren, auch alle nicht nur bei denselben D's beobachtet haben, sondern auch jeder eben so viel Beobachtungen als der andere für jedes D angestellt haben, Erfordernisse, denen die Camerer'schen älteren wie neueren Reihen in vorzüglichem Grade genügen; und da zu den Hangelenkversuchen fünf, zu den Stirnversuchen vier Beobachter beigetragen haben, lassen sich auch die folgenden Bemerkungen sehr gut daran exemplificiren.

Zunächst bieten sich zwei Wege der Mittelbestimmung dar, die ich als den Weg der mittlern r und den Weg der mittlern t, kurz als R- und T-Verfahren unterscheide. Nach dem ersten summirt man die (irgendwie reducirten) $r\frac{0}{0}$, welche von den verschiedenen Beobachtern bezüglich desselben D erhalten worden sind, gewinnt durch Division mit der Zahl der Beobachter, welche m sei, in unserm Beispiel mit 5, ein mittleres $r\frac{0}{0}$, sucht hiezu in der Fundamentaltabelle das zugehörige t, und erhält so statt der 5 Reihen eine einzige, die man nach den Regeln des vorigen Abschnittes behandelt, um damit ein mittleres h und k zu erhalten. — Nach dem zweiten, dem T-Verfahren, aber sucht man vorweg zu den einzelnen $r\frac{0}{0}$ der verschiedenen Beobachter für jedes D das zugehörige t, zieht hieraus

das Mittel durch Division mit der Zahl der Beobachter, bestimmt hiezu nach der Fundamentaltafel rückwärts das zugehörige $r\frac{\vartheta}{0}$ und erhält solchergestalt wiederum eine einzige Reihe von $r\frac{\vartheta}{0}$ mit zugehörigem t für die verschiedenen D, welche nach den Regeln des vorigen Abschnittes zu behandeln.

Zur Erläuterung nehmen wir das schon im VII. Abschn. S. 148, 149 benutzte Beispiel aus der ersten Abtheilung der Handwurzelversuche (no. 1) für die Combination $FW\gamma$. Man hat hier

D	nach R		nach T		
	$r\frac{\vartheta}{0}$	t	$r\frac{\vartheta}{0}$	t	
1	27,55	0,6443	27,99	0,6473	$\Sigma\varepsilon^2$ nach R = 0,535
2	35,70	7014	36,21	7048	- - T = 0,374
3	43,21	7577	43,82	7625	
5	55,00	8580	55,84	8658	
	$h = 0{,}053835$ $k = 0{,}59225$		$h = 0{,}054886$ $k = 0{,}059414$		

Man sieht, dass beiderlei Bestimmungen respective nach R und T einander in Betreff der $r\frac{\vartheta}{0}$ wie t einander zwar sehr nahe kommen, aber sich doch in etwas unterscheiden, und zwar allgemein in der Art, dass die $r\frac{\vartheta}{0}$ wie t nach T ein wenig grösser als nach R sind. Hienach nehmen denn auch die (untenstehenden) h, k, welche aus den resultirenden Reihen berechnet werden, Werthe an, welche sich zwar wenig, aber in etwas unterscheiden, obwohl nicht nothwendig so, dass die Werthe derselben für T auch hier allgemein grösser als für R sind. Was die $\Sigma\varepsilon^2$ anlangt, so weichen die (seitlich stehenden) Werthe derselben allerdings je nach T oder R in viel stärkerem Verhältnisse von einander ab, als die h und k, aber es kommt hinsichtlich der Bedeutung, die sie für die Unsicherheitsbestimmung haben, vielmehr auf den doch sehr geringen, und durch Zufälligkeiten leicht verkehrbaren, absoluten Unterschied beider von 0, als ihr Verhältniss zu einander an, indem eben so durch $\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}535$ wie $= 0{,}374$ eine nur sehr geringe Unsicherheit bezeichnet wird.

Bei Wechsel der Combinationen gehen die Aenderungen von $\Sigma\varepsilon^2$ für T und R einander zwar meist, doch nicht immer, in der Richtung parallel, was Vorsicht mitführt, sich bei Beurtheilung des

relativen Vorzugs der Combinationen nicht auf T oder R allein zu verlassen, worauf weiterhin zurückzukommen.

Ausgedehnte Belege zu vorstehenden Bestimmungen kann man in den Tabellen B und C S. 167, 168 des IX. Abschn. finden. In extremen Fällen, bei ungeheuer zwischen den verschiedenen Beobachtern abweichenden Werthen, könnten freilich die Resultate je nach R oder T weit mehr als in diesen Tabellen von einander abweichen; doch sind solche Fälle zu unwahrscheinlich, als dass allgemein gesprochen bezüglich der Resultate, um die es zu thun ist, wesentlich etwas darauf ankäme, ob man sich an das R-Verfahren oder T-Verfahren hält. Schon in dem obigen Beispiele $FW\gamma$ weichen nach der Tabelle des VII. Abschn. S. 148 die $r\frac{0}{0}$ der verschiedenen Beobachter sehr weit von einander ab; wie denn von den Beobachtern III und IV der erste bei denselben D durchschnittlich ungefähr doppelt so grosse $r\frac{0}{0}$ als der zweite hat; doch ist der Unterschied der mittlern Resultate je nach R und T nur so gering, wie die obige Beispiels-Tabelle zeigt. Indess, wenn es doch eine Wahl zwischen beiden Verfahrungsarten gilt, fragt sich, wonach sich zu entscheiden; in dieser Hinsicht aber scheinen mir folgende Gesichtspuncte massgebend.

Das R-Verfahren ist jedenfalls weniger umständlich als das T-Verfahren, da man bei jenem nicht nöthig hat, wie bei diesem, das $r\frac{0}{0}$ jedes Beobachters einzeln in sein t zu übersetzen, um aus dem mittleren t der Beobachter erst das $r\frac{0}{0}$ abzuleiten, mit welchem als beobachteten das nach h, k berechnete zu vergleichen, sondern dieses mit dem direct erhaltenen mittleren $r\frac{0}{0}$ vergleichen kann. Ausserdem hat das T-Verfahren den Nachtheil, dass bei dem kleineren n der einzelnen Beobachter leichter Fälle $r\frac{0}{0} = n$ vorkommen, als bei dem summirten n sämmtlicher Beobachter; und wenn sich auch solche Fälle nach der S. 211 angegebenen Regel noch verwerthen lassen, wird es doch immer besser sein, sie zu vermeiden.

Also hat das R-Verfahren in jedem Falle wesentliche praktische Vortheile vor dem T-Verfahren, indess aber von der anderen Seite eben so gewiss, weil nicht nur theoretisch leicht zu beweisen, sondern auch empirisch zu constatiren ist, dass, wenn man einfache arithmetische Mittelwerthe zwischen den h, k der einzelnen Beobachter verlangt, nach welchen die Empfindlichkeit der verschiedenen

Hauttheile, bei denen sich diese Beobachter betheiligt haben, zu vergleichen ist, nur das T-Verfahren streng zum Zwecke führt.

In der That, fassen wir beispielsweise und einfachheitshalber blos den Fall zweier Beobachter ins Auge, so haben wir für gleiche Werthe D:

nach dem einen, $t_1 = h_1 D + k_1$

- - anderen, $t_2 = h_2 D + k_2$

und hienach im Sinne von T:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2} D + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

mit dem zu $\frac{t_1 + t_2}{2}$ nach der Fundamentaltafel zugehörigen Werthe $r\frac{0}{0}$. Also gehört der Reihe der so bestimmten Werthe $r\frac{0}{0}$ dasselbe mittlere h sowie k zu, welche wir auch erhalten, wenn wir direct das Mittel aus den für sich bestimmten h sowie k der beiden Beobachter ziehen. Sofern sich aber die nach R direct gefundenen $r\frac{0}{0}$ von diesen unterscheiden, können sie nicht zu denselben mittleren h und k führen.

Es ändert nichts in Betreff der Anwendbarkeit des T-Verfahrens zu genanntem Zweck, dass die r seitens verschiedener Beobachter eine verschiedene Sicherheit haben, wie sich nach den verschiedenen $\Sigma\varepsilon^2$ zeigt, die sie gewähren, indem diess zwar die Sicherheit des Mittels ändert, aber nicht veranlassen kann, das arithmetische Mittel selbst zu verlassen, nach welchem der Vergleich für die verschiedenen Hauttheile zu vollziehen. Fraglos bleibt das arithmetische Mittel h_m, k_m aus den Bestimmungen durch m Beobachter der Werth, bezüglich dessen die einzelnen h, k die geringste Summe der Quadrate der Abweichungen liefern, und zugleich der Werth, der sich dem Werthe, den man durch unendliche Vervielfältigung der Beobachter bei gleicher Zahl ihrer Beobachtungen erhalten würde, nach Wahrscheinlichkeit um so mehr nähert, je mehr Beobachter schon zu seiner Bildung beigetragen haben. Diess bleibt sich gleich, mag die Sicherheit, welche den einzelnen h, k, aus denen man das Mittel zieht, noch so verschieden sein.

Vielleicht zwar könnte man glauben, dass doch das in folgender Weise zu gewinnende Mittel aus den Datis mehrerer Beobachter, ich will es das G-Mittel nennen, für den Zweck des Empfindlichkeitsvergleiches verschiedener Hauttheile dem einfachen arithmetischen Mittel noch vorzuziehen sei.

Man bestimme für jeden Beobachter sein h, k und zugleich die wahrscheinlichen Fehler dieser Constanten, respective $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, wofür

die Regeln im XIV. Abschnitte gegeben sind, setze das Gewicht der einzelnen Bestimmungen nach bekanntem Prinzip proportional mit $\frac{1}{\mathfrak{h}^2}$, $\frac{1}{\mathfrak{k}^2}$ und nehme das Mittel mit Rücksicht auf diese Gewichte.

Seien beispielsweise h_1, h_2 die Bestimmungen von h durch zwei Beobachter, und die dazu gehörigen $\frac{1}{\mathfrak{h}_1^2}$, $\frac{1}{\mathfrak{h}_2^2}$ kurz durch p_1, p_2 bezeichnet, so hätte man hienach als G_h zu nehmen:

$$G_h = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2}{p_1 + p_2}.$$

Entsprechend mit der Bestimmung von G_k.

Auch wäre diess Verfahren unbedingt anzuwenden, wenn den verschiedenen Beobachtern ein an sich identischer Werth h zur Bestimmung unterläge, dem sie sich nur mit verschiedener Genauigkeit oder Sicherheit nähern, indem sie denselben, respective h_1, h_2 u. s. w. finden. Aber die verschiedenen Beobachter haben wegen an sich verschiedener Empfindlichkeiten an sich verschiedene Werthe h, k, zwischen denen das Mittel zu suchen, worauf die vorige Regel nicht anwendbar ist.

Näher zugesehen hat der Werth G, den man durch die vorige Bestimmungsweise erhält, die Bedeutung, dass man durch denselben dem Werthe h, k möglichst, d. h. so weit es die vorliegenden Beobachtungen hergeben, nahe kommt, den man erhalten würde, nicht, wenn man die Zahl der Beobachter mit ihren verschiedenen Empfindlichkeiten, sondern wenn man die Zahl der Beobachtungen seitens der einmal zu den Versuchen beitragenden Beobachter in's Unendliche vervielfältigte, was ein andrer Gesichtspunkt als der vorige ist. Der Werth G von h, k würde hienach vielmehr von dem Verhältniss der Genauigkeit, mit welcher die einzelnen Beobachter beobachtet haben, als von dem Verhältnisse der h, k der einzelnen Beobachter selbst abhängen; und so bleibt man, noch abgesehen davon, dass die Bestimmung des Werthes G allgemein gesprochen so umständlich ist, um dadurch unpraktisch zu werden, streng genommen, auf das arithmetische Mittel der h, k zwischen den verschiedenen Beobachtern, hiemit das T-Mittel, verwiesen, um die Empfindlichkeitsverhältnisse der verschiedenen Hauttheile danach zu vergleichen.

Inzwischen, da man auch nach dem R-Verfahren ein Resultat

für h, k erhält, was zwischen die Resultate der einzelnen Beobachter fällt, und sich vom arithmetischen Mittel im Allgemeinen so wenig bald nach der einen bald nach der andern Richtung unterscheidet, um nur als kleine Vermehrung von dessen wahrscheinlichen Fehler angesehen werden zu können, so glaube ich, dass allgemein gesprochen der praktische Vortheil des R-Verfahrens den kleinen principiellen Nachtheil in Betreff möglichst sicherer Bestimmung des arithmetischen Mittels überwiegt. Wollte man zu den gegebenen Beobachtern einen neuen zufügen oder von den gegebenen einen weglassen, so würde sich ja doch das arithmetische Mittel ändern; und zu Bestimmungen von so zu sagen astronomischer Sicherheit sind die psychophysischen Massmethoden überhaupt nicht angethan; genug, wenn ihre Sicherheit so weit geht, um zur Ermittelung bestimmter gesetzlicher Verhältnisse führen zu können.

Andere Rücksichten aber treten überhaupt ein, wenn man sich die, von der vorigen sehr abweichende, wenn schon sich leicht damit verwirrende, Aufgabe stellt, nicht sowohl ein mittleres h, k aus den Bestimmungen mehrerer Beobachter so zu erhalten, um den Vergleich verschiedener Hauttheile danach zu bewirken, sondern so, dass der Vorzug zwischen verschiedenen Formeln, wie F und M und überhaupt Combinationen, wie $FW\alpha$, $FW\beta$ u. s. w. danach entschieden werden kann; diess aber ist die wesentlichste Aufgabe, um die es sich für uns hier handelt.

Hiebei scheint mir in jedem Falle festzuhalten, dass, wenn man beide Rechnungsweisen R, T auf dieselbe Formel und überhaupt Combination bezieht, diejenige Rechnungsweise vorzuziehen ist, welche die kleinste Summe der Quadrate der Abweichungen, das kleinste $\Sigma\varepsilon^2$ zwischen den durch die Mittelziehung nach R oder T direct gegebenen $r\frac{r}{n}$ und den $r\frac{r}{n}$ finden lässt, welche aus der Berechnung nach h, k fliessen; denn worauf sonst eine Entscheidung gründen? Principiell wird die Entscheidung zwischen den verschiedenen Combinationen überhaupt nach Massgabe sicherer sein, als die Zufälligkeiten, die, abgesehen von der Güte der Combination, Einfluss auf die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung haben, besser ausgeglichen sind, und diess kann bei Mittelziehung nach R und T in Anwendung auf dieselbe Combination eben nur aus den geringeren oder grösseren $\Sigma\varepsilon^2$, wozu sie führen, erkannt werden.

Nun zeigt sich aber, und kann man die Belege davon in den Tabellen des IX. Abschn. finden, dass je nach den Versuchsreihen und Combinationen bald R, bald T in Vortheil ist, also sich etwas ganz Allgemeines nicht darüber aussagen lässt; und es bleibt daher meines Erachtens, um ganz sicher zu gehen, nichts übrig, als beide Verfahrungsweisen durch die zu prüfenden Combinationen durchzuführen, und auf dem, was beiderseits zusammenstimmt, zu fussen; nur dass freilich durch die Verbindung des R-Verfahrens und T-Verfahrens die Mühe der Untersuchung sehr vergrössert und der Raumanspruch vermehrt wird.

Nun lässt sich allerdings bemerken, dass die nach dem T-Verfahren aus den mittleren t abgeleiteten $r\frac{0}{0}$, welche für den Vergleich zwischen Beobachtung und Rechnung die beobachteten $r\frac{0}{0}$ zu vertreten haben, nicht direct beobachtet sind, aber auch die nach dem R-Verfahren erhaltenen mittlern $r\frac{0}{0}$ sind nicht direct beobachtet, sondern eben nur als arithmetisches Mittel aus direct beobachteten Werthen $r\frac{0}{0}$ abgeleitet, die eine verschiedene Sicherheit haben und verschiedenen Werthen h, k zugehören; und es wäre eine petitio principii anzunehmen, dass unter diesen Bedingungen das arithmetische Mittel am Besten für das beobachtete substituirt werden könne, und dass hierauf ein Vorzug des R-Verfahrens zu gründen sei. Vielmehr scheint mir, dass beide Verfahrungsweisen nur mit verschiedener, aber nicht a priori zu beurtheilender, Annäherung dem Zwecke möglichster Compensation der Zufälligkeiten im Sinne jeder Combination entsprechen.

An sich selbst dürfte es das oben betrachtete G-Mittel sein, bei welchem die nach den Daten der Versuche vollständigst mögliche Combination der Zufälligkeiten, um die es uns bei jetziger Aufgabe zu thun sein muss, wirklich erreicht ist; auch wird nichts hindern, falls man anders die grosse Umständlichkeit der Herleitung nicht scheut, hienach ein mittleres h, k aus den vorliegenden Beobachtungen zu bestimmen und weiter danach die t und mithin $r\frac{0}{0}$ jeder Combination zu berechnen. Aber damit hat man eben nur berechnete $r\frac{0}{0}$, wozu es an beobachteten oder für solche zu substituirenden fehlt, wenn man nicht die nach T oder R erhaltenen dafür nehmen will. Thäte man nun diess, so würde man danach unstreitig bei diesem Vergleiche bald T bald R in Vortheil durch vorwiegende Kleinheit des $\Sigma\varepsilon^2$

finden; und anstatt diesen ungeheuer umständlichen Weg einzuschlagen, erscheint es doch praktischer, ohne minder zweckentsprechend zu sein, das R-Verfahren und T-Verfahren direct nach der Kleinheit des $\Sigma\varepsilon^2$, wozu sie führen, einander gegenüber zu schätzen, und sofern keines von beiden in dieser Hinsicht einen allgemeingültigen Vorzug in Anspruch zu nehmen vermag, sich an beide zu halten.

Unstreitig wäre erwünscht, wenn ein Fachmathematiker, der eine tiefere Einsicht in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, als ich mir zutrauen darf, mit der erforderlichen Einsicht in die Sachlage und Bedürfnisse der Untersuchung, um die sich's hier handelt, verbände, die Frage, wie die Kriterien zwischen den verschiedenen Combinationen am Besten zu stellen, seinerseits in Untersuchung nähme; doch zweifle ich, dass er zu andern praktisch brauchbaren Ergebnissen in dieser Hinsicht kommen könnte, als im Sinne voriger Erörterungen im folgenden Abschn. in Anwendung kommen werden.

XVI. Erfahrungsmässige Beantwortung der drei ersten Hauptfragen dieser Untersuchung (S. 113, 114).

Diese Beantwortung ist einschliesslich in der Beantwortung der Frage nach dem Vorzuge zwischen den verschiedenen Combinationen $FW\alpha$, $FW\beta$ u. s. w. (S. 115) enthalten; näher zugesehen aber lösen sich die Combinationen in die Elemente F, M, W, U, α, β, γ auf, und hat die letzte Entscheidung sich hierauf zu beziehen, d. i., um auf die Bedeutung der Elemente selbst zurückzugehen, darauf, ob man sich vielmehr für meine oder Müller's Formel (F oder M), vielmehr für das wissentliche oder unwissentliche Verfahren (W oder U), vielmehr für diese oder jene Reductionsweise der Fälle (α, β, γ) zu entscheiden hat.

Nun tritt uns freilich von vornherein die Schwierigkeit entgegen, dass die Erfahrung die verschiedenen Elemente, um deren Vorzug sich's handelt, nicht isolirt, sondern eben nur in Combinationen für die Untersuchung darbietet, deren nach S. 115 im Ganzen 12 zu berücksichtigen sind. Also kann der erfahrungsmässige Vorzug des einen oder anderen Elementes nur aus vergleichungsweiser Prüfung der Combinationen, worein dasselbe Element eingeht, mit anderen Combinationen, worein es bei Gleichheit der übrigen Elemente nicht

eingeht, erschlossen werden. Aber es fragt sich nun vor Allem, auf welche Kriterien der Vortheil oder Vorzug der einen vor der anderen, und in Folge dessen des einen Elementes vor dem anderen überhaupt zu gründen sei; und in dieser Hinsicht wird auf Grund schon früher gepflogener Erörterungen zunächst folgender Gesichtspunct als massgebend anzusehen sein.

Jede andere Combination führt nach der, im XIV. und XV. Abschnitt auseinandergesetzten, Berechnungsweise zu anderen Werthen der Constanten h, k, welche man für die neueren Camerer'schen Versuche, an die wir uns hier halten, in der Tabelle B S. 167 verzeichnet findet, wonach man durch Substitution derselben in die Gleichung:

$$t = hD \pm k$$

für jede andere Combination andere berechnete Werthe t und dazu gehörige Werthe r_0^0 erhält, die sich mit den beobachteten vergleichen lassen.

Hätten wir nun mit den Beobachtungen eines einzigen Beobachters zu thun, so würden ohne Frage als beobachtet die von demselben unmittelbar erhaltenen (reducirten) r_0^0 in den Vergleich treten; sofern wir uns aber an Mittelwerthe aus den Ergebnissen mehrerer Beobachter halten, giebt es überhaupt kein direct beobachtetes r_0^0, mit welchem der Vergleich stattfinden kann; wir haben aber die Wahl, je nach Anwendung der R-Methode oder T-Methode entweder die arithmetischen Mittel der von den einzelnen Beobachtern direct erhaltenen r_0^0, oder die r_0^0, welche sich zu den arithmetischen Mitteln der t der einzelnen Beobachter finden, an Stelle der direct beobachteten Werthe in den Vergleich mit den, nach h, k berechneten, Werthen zu ziehen; und da wir nach vorigem Abschnitte keinen Grund haben, die eine Bestimmungsweise, T oder R, der anderen vorzuziehen, werden wir uns an beide halten, und nur die Resultate für gesichert halten, die aus der Zusammenstimmung beider sich herausstellen. Uebrigens findet sich, dass beide nur hie und da im Prüfungsergebnisse von einander abweichen, und wollte man auf einer von beiden Bestimmungsweisen allein fussen, so würde man auch zu keinen wesentlich anderen Definitivresultaten kommen, als durch die andere.

Je weniger nun die, nach einer Combination berechneten, r_0^0 von den beobachteten abweichen, für desto vortheilhafter wird man

die Combination zu halten haben. Nach bekannten mathematischen Principien aber hält man die Quadrate der, mit ε zu bezeichnenden, Abweichungen zwischen Beobachtung und Berechnung für massgebender als die einfachen Abweichungen, und hat hienach den Vorzug der einen Combination vor der anderen danach zu beurtheilen, dass sie bei gleichbleibender Zahl der Fälle n, welche hier immer für die zu vergleichenden Combinationen vorausgesestzt wird, eine kleinere Summe der Quadrate der Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten r_0^0, kurz eine kleinere Summe $\Sigma\varepsilon^2$ giebt.

Da die Tübinger und älteren Camerer'schen Versuche aus früher besprochenen Gründen keine genügende Unterlage für die Prüfung in betreffender Hinsicht gewähren, so wird sich dieselbe an die (unter No. 2 begriffenen) drei neueren Gesammtreihen Camerer's halten, d. i. no. 1 Handgelenk mit halbstündigen Pausen der Versuche; no. 2 Handgelenk mit Pausen von 5 Min., und no. 3 Stirn, auch mit Pausen von 5 Min., welche sämmtlich als contrastfrei gelten können, wobei aber folgende Bemerkung nicht ausser Acht zu lassen ist.

no. 1 enthält (nach S. 155) 5800, no. 2 8000, no. 3 mit $D = 8$ 6000, ohne $D = 8$ 5000 Hauptversuche; insofern ist also von no. 2 die grösste Sicherheit der Bestimmungen zu erwarten, indess no. 1 und no. 3 sich hinsichtlich der Gesammtzahl der Versuche nahe gleich stehen. Die Stirnversuche no. 3 aber stehen den Handgelenkversuchen überhaupt wegen der S. 157 angegebenen ungünstigen Versuchsbedingungen nach; und da der Nachtheil zugestandenermassen mit der Grösse der Distanzen wächst und darin selbst ein Anlass lag, mit den Distanzen nicht über $D = 8$ hinauszugehen, so fragte sich von vornherein, ob nicht schon $D = 8$ von den massgebenden Beobachtungen auszuschliessen. Um diess zu untersuchen, habe ich zuvörderst die Berechnung für alle Combinationen der Stirn unter Zuziehung von $D = 8$ nach Qu. geführt, um die Constanten h, k so scharf wie möglich im Sinne jeder Combination zu bestimmen. Durch Substitution dieser Constanten in die Formel $hD + k = t$*) liessen sich aber die $D = \frac{t + k}{h}$ für jede Combination berechnen und die so berechneten D mit den, in den Versuch ge-

*) t hiebei nach dem T-Verfahren im Mittel der vier Beobachter bestimmt.

gebenen, vergleichen, um zu sehen, ob die Abweichung zwischen beiden, welche $\mathfrak{d}$ heisse, bei $D = 8$ von der Ordnung der übrigen Abweichungen oder unverhältnissmässig grösser sei. Nun erhielt ich beispielsweise für $FW\alpha$ folgendes Ergebniss:

D gegeben	D berechnet	$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{d}^2$	
0,5	0,5623	0,0623	0,0039	$h = 0,09079$
1,0	0,7808	0,2192	0,0481	$k = 0,4750$
2,0	2,195	0,195	0,0381	
4,0	3,649	0,313	0,1232	
6,0	5,867	0,133	0,0177	
8,0	9,827	1,827	3,3381	
		$\Sigma\mathfrak{d}^2 = 3,5691$		

Man sieht, dass $\mathfrak{d}^2$ in Bezug auf $D = 8$ für sich allein gleich 3,3381 ist, indess die Summe aller übrigen $\mathfrak{d}^2$ blos 0,2310 ist, dass also in der That $D = 8$ eine ganz unverhältnissmässig grössere Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung finden lässt, als alle anderen D. Diess galt für $FW\alpha$; für die gesammten 12 Combinationen aber wurden folgende Ergebnisse erhalten, wenn allgemein a das $\mathfrak{d}^2$ für $D = 8$ insbesondere, b die Summe der $\mathfrak{d}^2$ für die übrigen D's bedeutet.

	a	b		a	b		a	b		a	b
$FW\alpha$	3,34	0,23	$FU\alpha$	6,40	0,18	$MW\alpha$	0,04	1,63	$MU\alpha$	0,56	0,14
β	0,60	0,64	β	6,66	0,13	β	0,03	2,15	β	0,27	0,25
γ	2,44	0,11	γ	0,11	0,09	γ	0,03	1,39	γ	0,46	0,57

Hienach ist, mit den schwachen Ausnahmen von $FW\beta$ und $FU\gamma$, in allen Combinationen mit F a sehr gross gegen b; wogegen in den Combinationen mit M gleich oft a und b überwiegt. Da sich aber aus den folgenden Prüfungen von selbst herausstellen wird, dass die Müller'sche Formel (M) überhaupt unmöglich als haltbar angesehen werden kann, würde es, bei der definitiven Beschränkung auf die Wahl zwischen den Combinationen mit F, an sich sehr bedenklich sein, $D = 8$ mit zu den Berechnungen zuziehen zu sollen, während für $D = 6$ nach entsprechender, Kürze halber hier zu

übergehender, Untersuchung noch kein entsprechender Grund des Ausschlusses vorliegt.

Lässt man nun $D = 8$ bei Berechnung von h und k bei Seite, so ändern sich hiemit diese Werthe, was zu einem anderen, viel vortheilhafteren, Vergleich zwischen beobachteten und berechneten D's führt, nämlich für *FWα* findet man:

D gegeben	D berechnet	ð	ð²	
0,5	0,6012	0,101	0,010	$h = 0,08607$
1,0	0,8234	177	031	$k = 0,48173$
2,0	2,260	260	068	
4,0	3,739	261	016	
6,0	5,993	007	000	

Ich habe nun bei der Stirn die Berechnung von h, k und $\Sigma\varepsilon^2$ nach T ohne Zuziehung von $D = 8$ für alle Combinationen durchgeführt, doch dasselbe bezüglich $\Sigma\varepsilon^2$ auch mit allen Combinationen unter Zuziehung von $D = 8$ gethan, und man findet letztere Rechnung in der Tabelle E des IX. Abschnittes S. 170 aufgeführt. Bei den folgenden Prüfungen halte ich mich aber an erstere Resultate, die mir nach vorigen Bemerkungen massgebender erscheinen.

Von vornherein könnte man vielleicht glauben, da meine wie die Müller'sche Formel zwei Constanten enthält, die aus den Beobachtungen selbst zu bestimmen sind, hiezu aber bei den Handgelenkversuchen nur 4, bei den Stirnversuchen nur 6 oder bei der vorgezogenen Weglassung von $D = 8$, nur 5 Bedingungsgleichungen, entsprechend der Zahl der D, vorliegen, und da diese nicht in zu weiten Grenzen von einander abweichen, dass nichts Entscheidendes überhaupt bei der Untersuchung des $\Sigma\varepsilon^2$, was sie liefern, herauskommen könne, indem unter solchen Umständen durch sehr verschiedene Formeln und überhaupt Combinationen den Beobachtungen in nahe gleicher Weise entsprochen werden könne; ja, hätten wir so viele D's als Constanten, so würde sogar jede beliebige Formel oder allgemeiner Combination eine volle Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung, mithin $\Sigma\varepsilon^2$ gleich null, finden lassen, und je geringer die Zahl der D gegen die der Constanten, und je näher

die D einander stehen, desto näher werden sich die Resultate der verschiedenen Formeln oder Combinationen kommen. Aber die Thatsache selbst lehrt, dass diess Bedenken uns nicht trifft, indem für dieselben Reihen je nach der Combination ungeheure Unterschiede im $\Sigma\varepsilon^2$ vorkommen. So ist in no. 1 (nach S 168, Rechnung nach T und Qu.) $\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}642$ für FWa, $= 10{,}7$ für MWa, also für M bei Gleichheit der übrigen Elemente mehr als 16mal so gross als für F. Ueberhaupt braucht man blos einen allgemeinen Blick auf die Prüfungstafel S. 168 zu werfen, um sich von der grossen Verschiedenheit der $\Sigma\varepsilon^2$ je nach der Combination überhaupt zu überzeugen.

Die $\Sigma\varepsilon^2$ in dieser Tabelle sind sowohl nach der Summationsmethode (Summ.) als Methode der kleinsten Quadrate (Qu.) bestimmt. Natürlich wird man sich bei den folgenden Prüfungen vielmehr an letztere als erstere halten, aber einmal schien es mir von Interesse, zu zeigen, dass man mit der einfachen Summationsmethode zu demselben Prüfungsergebnisse kommen würde, als mittelst der, freilich schärferen aber viel umständlicheren, Methode der kleinsten Qu., sofern die $\Sigma\varepsilon^2$ nach beiden Methoden zwar einander nicht proportional aber vorwiegend parallel gehen; zweitens wollte ich dadurch, dass $\Sigma\varepsilon^2$ nach Qu. überall kleiner als nach Summ. ist, zur Gewähr beitragen, dass kein Rechenfehler begangen ist (vergl. S. 219), endlich aber überhaupt einen Anhalt zum Vergleich der Resultate von Summ. und Qu. unter verschiedenen Umständen geben.

Da die drei Gesammtreihen no. 1, 2, 3 mit einem verschiedenen n operiren und überhaupt unter verschiedenen Bedingungen angestellt sind, so sind auch die $\Sigma\varepsilon^2$ für die verschiedenen Combinationen nur in jeder Verticalspalte für sich zu vergleichen.

Unter den 12 Combinationen jeder Gesammtreihe, die der Prüfung nach Tabelle C S. 168 zu unterziehen sind, wird nun eine gewisse Combination das allerkleinste $\Sigma\varepsilon^2$ geben, und insofern als die vortheilhafteste, kurz beste, erscheinen; eine andere hingegen das allergrösste $\Sigma\varepsilon^2$ geben, und insofern als die unvortheilhafteste, kurz schlechteste, erscheinen. Insofern nun in den 12 Combinationen alle mögliche Verbindungen vorzuziehender und zu verwerfender, kurz guter und schlechter, Elemente erschöpft sind, wird man in der besten Combination lauter gute, in der schlechtesten lauter schlechte Elemente zu erwarten haben, wogegen in den übrigen Combinationen

zwei gute mit einem schlechten oder zwei schlechte Elemente mit einem guten in der Art zusammentreffen, dass dadurch eine partielle Compensation ihrer Vortheile und Nachtheile entstehen kann.

Hienach schiene es zunächst, dass man durch Achten auf die beste und schlechteste Combination in vorigem Sinne die gewünschte Entscheidung über die vorzuziehenden Elemente auf einmal und in einfachster Weise erhält, indem man als vorzuziehen oder gut die Elemente zu betrachten hat, welche in die allerbeste Combination eingehen, als verwerflich oder schlecht die, welche in die allerschlechteste Combination eingehen; mit Rücksicht, dass beide Entscheidungen sich zu ergänzen und zu controliren haben. Und in der That würde diess Kriterium für alle Elemente auf einmal genügen, wenn sich nur fände, dass in allen drei zur Prüfung vorliegenden Gesammtreihen dieselbe Combination durch das Minimal-$\Sigma'\varepsilon^2$ als die beste, und dieselbe durch das Maximal-$\Sigma'\varepsilon^2$ als die schlechteste aufträte, was aber keineswegs der Fall ist. Vielmehr tritt nach unserer Prüfungstabelle in jeder der drei Reihen nach T wie R eine andere Combination als die beste, eine andere als die schlechteste auf, wovon die Möglichkeit sich leicht daraus ergiebt, dass ausser der Güte der Combination und ihrer Elemente unausgeglichene Zufälligkeiten (im Sinne der Anmerkung auf S. 216), die in den verschiedenen Reihen eine verschiedene Rolle spielen, Antheil an der Grösse des $\Sigma'\varepsilon^2$ haben; aber man wird doch nach Wahrscheinlichkeit diejenigen Elemente als die besten ansehen können, welche in allen drei besten Combinationen oder mindestens zweien derselben, also im Uebergewicht, vorkommen, eben so die Elemente als die schlechtesten, welche in allen drei schlechtesten Combinationen oder mindestens je zweien, vorkommen, indem die Güte oder Schlechtigkeit jedes Elementes an sich selbst in allen drei Reihen dieselbe bleibt, wogegen die Zufälligkeiten bald günstiger, bald ungünstiger für die Vergrösserung des $\Sigma'\varepsilon^2$ ausfallen können. Durch folgende Ausführung wird sich diess von selbst erläutern, wobei wir uns zunächst an die nach T gewonnenen Bestimmungen halten, für welche die Tabelle vollständiger ist, als für die nach R gewonnenen.

Als die beste Combination in Betracht des kleinsten $\Sigma'\varepsilon^2$ erscheint nun nach der Prüfungstabelle in no. 1 $FW\beta$, in no. 2 $FW\gamma$, in no. 3 $FU\gamma$; als die schlechteste in no. 1 $MU\alpha$, in no. 2 $MW\alpha$, in

no. 3 $MW\beta$. Hienach kommt F in jeder der drei besten, in keiner der drei schlechtesten, M keinmal in einer besten, hingegen in jeder der drei schlechtesten Combinationen vor, wodurch gleich von vornherein mit grosser Sicherheit für F gegen M entschieden ist. Natürlich kann man entsprechend den Vorzug der anderen Elemente nach ihrem Vorkommen in der besten und schlechtesten Combination beurtheilen; aber es wird nach unten folgender Bemerkung besser sein, diess erst nach Ausscheidung der Combinationen mit M zu thun.

Da es ein Interesse haben kann, zu sehen, in wie weit in den besten Combinationen die erfahrungsmässigen Data durch Rechnung reproducirt werden, so schalte ich hier die Zusammenstellung zwischen den (nach F, T und Qu.) berechneten und den beobachteten $r\frac{a}{0}$ für die obgenannten drei besten Combinationen ein, bezüglich auf die mittleren Werthe aus den Datis der fünf oder vier Beobachter.

D	Hdgl. no. 1. $FW\beta$		Hdgl. no. 2. $FW\gamma$	
	beob.	ber.	beob.	ber.
1	38,88	38,82	29,94	29,59
2	46,55	46,77	35,45	36,44
3	54,49	54,00	43,43	42,82
5	66,29	66,29	54,13	54,24
	$h = 0,06242$ $k = 0,66156$ $\Sigma\varepsilon^2 = 0,292$		$h = 0,04819$ $k = 0,61007$ $\Sigma\varepsilon^2 = 1,487$	

D	Stirn, no. 3. $FU\gamma$	
	beob.	ber.
0,5	22,16	23,00
1	28,50	29,11
2	40,21	38,02
4	59,57	59,80
6	73,91	74,71
	$h = 0,08371$ $k = 0,56706$ $\Sigma\varepsilon^2 = 6,567$	

Hiezu noch die Berechnung für die Combination $FW\gamma$ in no. 1, um zu zeigen, dass sie kaum minder gut stimmt, als $FW\beta$, wonach der kleine Vor-

theil von β vor γ in Betreff des etwas kleineren $\Sigma\varepsilon^2$ bei $FW\beta$ um so mehr für zufällig gelten kann, als eine weiter unten (S. 147, 148) folgende Untersuchung, welche auf die Ergebnisse der einzelnen Beobachter zurückgeht, zur Unterstützung hievon gereicht.

D	Hdgl. no. 1. $FW\gamma$	
	beob.	ber.
1	27,99	28,25
2	36,21	36,10
3	43,82	43,35
5	55,84	56,13

$h = 0{,}05489$
$k = 0{,}59814$
$\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}374$

Bei voriger Anwendung des Kriteriums, welches a) heisse, zogen wir blos die drei besten und drei schlechtesten Combinationen jeder der drei Gesammtreihen in Betracht; wir können aber auch in folgender Weise, welche mit b) bezeichnet werde, alle zuziehen, und dadurch das vorige Kriterium ergänzen und verschärfen. Sofern es zunächst den Vortheil zwischen F und M gilt, haben wir in no. 1 sechs Combinationen mit F, eben so viel mit M bei übrigens gleichen Elementen; und hienach sechs Vergleiche zwischen F und M. Hievon zeigt sich F fünfmal und meist in starkem, M nur einmal und zwar in sehr schwachem Vortheil. Entsprechend verhält es sich in no. 2 und no. 3; im Ganzen also ist F fünfzehnmal, M nur dreimal in Vortheil.

Nach Methode R ist der Vergleich zwischen M und F nicht entsprechend durchzuführen, weil die Tabelle für die Combinationen mit M auf der Seite R nur unvollständig berechnet ist, indem ich geglaubt habe, mir diese Vervollständigung der Berechnung, bezüglich der Vorzugsfrage zwischen F und M, ersparen zu können, weil nicht nur das Resultat nach T schon so durchschlagend in dieser Hinsicht ist, um nicht erwarten zu können, dass es durch Berechnung nach R, welche nur ausnahmsweise vom Parallelismus der Resultate mit F abweicht, wieder umgestossen werden könne, sondern auch weil, so weit die Berechnung nach R für die Combinationen mit M vorliegt, sie im Resultate mit dem vorigen stimmt.

Nachdem wir nun M mit Entschiedenheit als beseitigt ansehen

können, würde es unzweckmässig sein, bei Untersuchung des Vorzugs zwischen den übrigen Elementen die Combinationen mit M noch mit zu berücksichtigen; denn es könnte sein, dass die Abweichungen von der Beobachtung, welche das fehlerhafte M nach gewisser Rücksicht begünstigt, durch ein anderes fehlerhaftes Element, welches solche nach entgegengesetzter Richtung begünstigt, bis zu gewissen Grenzen so compensirt würden, dass der Nachtheil beider dadurch mehr oder weniger versteckt würde. Ziehen wir also für das Folgende nur die sechs Combinationen mit F in Betracht, für welche die Berechnung sowohl nach R als T vollständig ist.

Nach dem Kriterium a) nun haben wir respective als beste und schlechteste Combination

	nach T			nach R		
beste	$W\beta$,	$W\gamma$,	$U\gamma$;	$W\alpha$,	$W\gamma$,	$U\gamma$;
schlechteste	$U\beta$,	$U\gamma$,	$W\beta$;	$U\beta$,	$U\gamma$,	$W\beta$.

Hienach kommt, unter Zusammenfassung von T und R, *W* in den besten Combinationen viermal, in den schlechtesten nur zweimal, hingegen *U* in den besten Combinationen nur zweimal, in den schlechtesten viermal vor; und ist also *W* nach Kriterium a) in entschiedenem Vortheil gegen *U*. Anderseits hat man nach Kriterium b) unter den 18 möglichen Vergleichen nach F und R zwölfmal *W*, nur sechsmal *U*, in Vortheil, was den Vortheil in vorigem Sinne bestätigt.

Zu Hülfe kommt der Annahme dieses Vortheils, dass sowohl nach a) als b) sämmtliche Fälle, welche dem Ausfall der übrigen entgegen, den Vortheil für *U* finden lassen, sich ausschliesslich bei der Stirn finden, an der die Beobachtungen weniger Vertrauen in Anspruch nehmen können, als am Handgelenk, und wesentlich nur von einem der vier Beobachter (IV) abhängen, worauf unten bei dem dritten Specialkriterium zurückzukommen.

Inzwischen will ich nicht verschweigen, dass nach den mir von Camerer mitgetheilten (S. 117 erwähnten) neuen Geschmacksversuchen, welche ihrerseits einen Vergleich zwischen wissentlich und unwissentlich einschliessen, *U* und *W* ungefähr gleich in Betreff des Vortheils stehen; und so wäre möglich, dass Verschiedenheiten der Beobachter, der Versuchsgebiete und Nebenumstände überhaupt Ver-

schiedenheiten in dieser Beziehung bedingen. Gewiss bleibt, dass das sozusagen aprioristische Misstrauen, was seither gegen das wissentliche Verfahren gegenüber dem unwissentlichen bestanden hat, in den bisherigen Versuchen überhaupt keine Rechtfertigung oder auch nur Unterstützung findet, und dass jedenfalls bei den uns hier insbesondere beschäftigenden, Versuchen im Tastgebiete das wissentliche im Ganzen einen Vorzug bewährt hat.

Was endlich den Vorzug zwischen den verschiedenen Reductionsweisen anlangt, so sieht man, wenn man die Frage für W und U theilt, nach Kriterium a) aus obiger Zusammenstellung der besten und schlechtesten Combinationen (für F), dass nach W α so wie β nur einmal, hingegen γ zweimal unter den besten Combinationen vorkommt, γ und α keinmal, β zweimal unter den schlechtesten; wonach γ am besten erscheint, demnächst α, dann β. Nach Kriterium b) entscheidet sich der Vorzug zwischen α und β, so wie α und γ nicht, wogegen γ fünfmal in Vortheil gegen β, nur einmal umgekehrt ist. Nach Allem also hat man jedenfalls bei wissentlichem Verfahren die Reductionsweise γ vorzuziehen, ein Resultat, womit auch die Geschmacksversuche stimmen.

Was die Combinationen mit U anlangt, so befindet sich nach Kriterium a) α und β keinmal, γ zweimal unter den besten Combinationen, α keinmal, β, so wie γ zweimal unter der schlechtesten Combinationen, ferner fällt nach Kriterium b) unter sechs Fällen der Vortheil zwischen α und β fünfmal auf β, zwischen β und γ gleich oft auf beide, zwischen α und γ fünfmal auf γ. Diese Bestimmungen für U führen zu keiner sichern Entscheidung.

In gewissen Fällen, wo zwei Combinationen, zwischen denen es zu entscheiden gilt, sich nach dem T- wie R-Mittel sehr nähern, kann es nützlich sein, von diesen auf die Specialreihen zurückzugehen, um zu sehen, ob sie ihrer Zahl nach ein, mit dem Ausschlag der mittleren Reihen zusammenstimmendes, Resultat geben, wo nicht, darin ein Gegengewicht gegen die Aussage der Mittel zu erblicken.

Ein bemerkenswerthes und instructives Beispiel in dieser Beziehung giebt der Vergleich von $FW\gamma$ mit $FW\beta$ in no. 1. Nach Aussage der Prüfungstabelle für T, so wie nach der Ausführung in der Einschaltung S. 244, 245, hat man für $FW\beta$ $\Sigma\varepsilon^2 = 0{,}292$, für $FW\gamma = 0{,}374$; und ist also (entgegen dem Resultat der allgemeinen

Prüfung) $FW\beta$ in Vortheil vor $FW\gamma$, mithin β im Vortheil vor γ. Geht man aber auf die Resultate der Specialreihen zurück, welche in Tabelle D S. 169 gegeben sind, so sieht man, dass $FW\beta$ viermal im Nachtheil gegen $FW\gamma$ und nur einmal im Vortheil, hier aber allerdings in Betracht der Kleinheit des Σ^2 in sehr starkem Vortheil ist.

Inzwischen ist der Fall eines Conflicts der Specialreihen mit dem T- oder R-Mittel im Resultate an sich unwahrscheinlicher, als der Fall der Einstimmung, erstens, weil durchschnittlich überhaupt, so lange nicht bestimmte Gründe für ein gegentheiliges Ueberwiegen vorliegen, die mittlere Richtung der Mehrzahl der specialen Richtungen folgt, zweitens, weil die Güte einer Combination an sich selbst zur Verringerung von $\Sigma'\varepsilon^2$ beiträgt, dieser Einfluss aber sich eben sowohl auf die Zahl als Grösse der specialen $\Sigma'\varepsilon^2$ erstrecken muss, so dass man im Grunde den Fall des Conflicts nur in Fällen zu erwarten hat, wo die verglichenen Combinationen so verwandt sind, dass der von ihrer verschiedenen Güte abhängige Vortheil auch bei möglichster Ausgleichung der Zufälligkeiten, welche den Specialreihen noch anhaften, doch wegen der Unvollständigkeit dieser Ausgleichung nach entgegengesetzter Seite ausschlagen kann; und der Fall einer solchen Verwandtschaft findet wirklich in unserem Beispiele statt. Nämlich FW geht in beide Combinationen gemeinsam ein, γ aber ist insofern theils mit α, theils mit β verwandt, als die Reductionsweise γ zwischen beiden steht, so dass der Vorzug zwischen γ und β, so wie zwischen γ und α leichter durch Zufälligkeiten wechseln kann, als zwischen α und γ oder gar als zwischen zwei Combinationen, in denen alle oder auch nur zwei Elemente gegen die andern verschieden sind. Eine Durchführung des Rückganges auf die Specialreihen würde übrigens wegen der enormen Zeit und Mühe, die sie kostete, nicht wohl geschehen können, und überflüssig sein, sofern das Fussen auf den Mitteln schon hinreichend entscheidend ist.

Ausser den bisherigen, gemeinsam auf alle Elemente anwendbaren, Kriterien giebt es noch drei andere, bezeichnen wir sie als Specialkriterien, zwar von beschränkterer aber einfacherer Anwendbarkeit als die vorigen, wovon zwei sich auf die Entscheidung zwischen F und M, das dritte zwischen W und U beziehen. Ausserdem kann in erster Hinsicht noch ein im XVIII. Abschnitt geltend zu machender, Umstand berücksichtigt werden.

Erstes Specialkriterium. Dieses ist aus dem bezugsweisen Gange zwischen den Differenzen der $r\frac{0}{0}$ und zugehörigen D zu gewinnen, und von Müller in einer, früher mit ihm gepflogenen, Correspondenz gegen eine, damals von mir versuchte, Formel triftig geltend gemacht worden, ja würde auch gegen die jetzige entscheiden, wenn man sich an die Tübinger Versuche, welche damals erst allein vorlagen, oder auch an die älteren Camerer'schen Versuche halten dürfte. Nach den neuen massgebendern Camerer'schen Versuchen aber wendet sich der Vortheil des Kriteriums vielmehr zu Gunsten von F; und schon aus der Discussion eines in die Frage einschlagenden Theils der älteren Versuche erhellt, an welchem Fehler der älteren Versuche das scheinbar günstige Resultat derselben für M hängt. Das Wesentliche des Kriteriums ist dieses:

Beim Aufsteigen der $r\frac{0}{0}$ von 0 bis 50 steigen nach den, die beiden Formeln repräsentirenden, Fundamentaltafeln für F und M die t für F in der Weise mit auf, dass gleichen Differenzen aufsteigender t abnehmende Differenzen der $r\frac{0}{0}$ zugehören, hingegen für M in der Weise, dass gleichen Differenzen der t wachsende Differenzen der $r\frac{0}{0}$ zugehören;*) sofern aber $t = hD \pm k$ ist, und h wie k constant ist, sind den Differenzen von t, in welchen k verschwindet, die Differenzen der D proportional, und können für unser Kriterium den Differenzen der t substituirt werden, wonach diess Kriterium sich so gestaltet.

Nehmen wir eine Versuchsreihe, in welcher wie gewöhnlich die D's um gleiche Differenzen vorschreiten, mit den zugehörigen $r\frac{0}{0}$, beispielsweise:

$$\begin{array}{llllll} D = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ r\frac{0}{0} = & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{array}$$

und führen sie so weit fort, oder ziehen sie so weit in Betracht, dass $r\frac{0}{0} = 50$ zwischen die zwei höchsten Werthe, also im Beispiel zwischen a_4 und a_5, zugehörig zu $D = 4$ und 5, fällt. Die Differenz

*) Diess lässt sich allerdings nicht direct aus den Fundamentaltafeln finden, weil darin nicht die t, sondern die $r\frac{0}{0}$ um gleiche Differenzen vorschreiten; aber indirect insofern, als, wenn gleichen Differenzen von t wachsende oder abnehmende Differenzen von $r\frac{0}{0}$ zugehören, umgekehrt gleichen Differenzen von $r\frac{0}{0}$ abnehmende oder wachsende Differenzen von t zugehören, wonach man die obigen Angaben verificiren kann.

$a_5 - a_4$ zwischen den höchsten a heisse q. Nach F nun wird diese Differenz kleiner, nach M aber grösser sein, als jede rückliegende Distanz $a_4 - a_3$, $a_3 - a_2$ u. s. w., um so mehr, je weiter letztere Distanz rückliegt. Also wird der Unterschied in dieser Hinsicht bei F und M am meisten betragen, wenn wir q mit der am weitest rückliegenden Differenz $a_2 - a_1$, welche p heisse, vergleichen. Und so kommt das Kriterium einfach darauf hinaus, dass man bei Reihen, in welchen D um gleiche Differenzen vorschreitet, p grösser oder kleiner als q findet. Erstenfalls ist für F, zweitenfalls für M entschieden. Sollte die Reihe nicht bis $r\frac{0}{0} = 50$ reichen, so hätte man als q die Differenz zwischen den zunächst rückliegenden $r\frac{0}{0}$ zu nehmen.

Freilich lässt sich diess Kriterium nicht auf alle Reihen, mit denen man zu thun hat, anwenden, weil manche blos Werthe von $r\frac{0}{0}$ über 50 enthalten, andere nicht hinreichende $r\frac{0}{0}$ unter 50, um den Vergleich anzustellen, auch bei manchen die D nicht um gleiche Differenzen fortschreiten. Indessen liegen doch sowohl von älteren als neueren Versuchen Camerer's Fälle vor, um die vergleichende Prüfung daran vorzunehmen.

In dieser Beziehung sind von den älteren Versuchen am instructivsten, ja in gewisser Beziehung von fundamentaler Wichtigkeit, die S. 132, 133 angeführten (unwissentlichen) Versuche Camerer's, wo dieselben Hauptversuche mit und ohne eingeschaltete Vexirversuche verglichen werden, und die constante Differenz der D gleich 3 ist; jedoch sind aus angegebenen Gründen nur die Versuche von Ida in der ersten Abtheilung (1875—1876) für die Anwendung des Kriteriums brauchbar. Beispielsweise haben wir hier für Ida, Acromion:

D		14	17	20	23
$r\frac{0}{0}$	mit Vex.	10,6	22,6	46,6	60
	ohne Vex.	8	25,3	46	55,3

mithin:

	p	q
mit Vex.	22,6 — 10,6 = 12,0	60 — 46,6 = 13,4
ohne Vex.	25,3 — 8 = 17,3	55,3 — 46 = 9,3

zusammengestellt für alle vier Hauttheile aber:

	mit Vex.		ohne Vex.	
	p	q	p	q
Acromion	12,0	13,4	17,3	9,3
Oberarm	20,6	22,0	25,3	10,7
Ellbogen	9,3	42,7	28,3	20,7
Vorderarm	12,7	26,6	11,4	32,6

Man sieht, dass die Versuche mit Einschaltung von Vexirversuchen alle für M, ohne Einschaltung alle, nur mit Ausnahme von Vorderarm, für F stimmen. Da nun aber durch Einschaltung von Vexirversuchen nach Abschnitt VI ein fremdartiger Einfluss entsteht, so muss das Resultat der Versuche ohne Vexirversuche vorgezogen werden, welches weit überwiegend für F gegen M spricht.

Nun sind alle älteren Versuche Camerer's, mit Ausnahme der hier in Rücksicht gezogenen Vergleichsversuche, eben so alle Tübinger Versuche, mit Einschaltung von Vexirversuchen angestellt, und so hat man Grund, den Umstand, dass bei den einen wie andern weit überwiegend, das Kriterium vielmehr für M als F sprechend findet, wofür ich Kürze halber die leicht zu findenden Belege übergehe, auf den Fehler der Versuche zu schreiben, der durch die Einschaltung von Vexirversuchen entsteht.

Es könnte bei alledem misslich erscheinen, auf vorige Vergleichsversuche allein zu bauen, da sie unwissentlich und mit einer Reductionsweise angestellt sind, welche vielmehr β) als γ) entsprechen dürfte, was beides nicht die vortheilhaftesten Verhältnisse sind; weil ausserdem dem günstigen Resultat dreier Hauttheile für F doch das ungünstige von einem, d. i. Vorderarm, entgegensteht. Aber die Entscheidung wird vollends durch die neuen Versuche Camerer's herbeigeführt, in welchen theils Vexirversuche ganz beiseite gelassen, theils nur in so grossen Intervallen eingeschaltet wurden, dass ihr alterirender Einfluss nach Aussage der Versuche selbst wegfiel, die ausserdem auch den Einfluss von wissentlich und unwissentlich, so wie von den verschiedenen Reductionsweisen, auf den Erfolg des Kriteriums zu beurtheilen gestatten.

Hiebei gilt in den beiden Abtheilungen der Handgelenkversuche no. 1 und 2, mit den Distanzen 1, 2, 3, 5, in dem Falle, dass $r\frac{g}{0} = 50$

zwischen $D = 3$ und 5 fällt, als q die Differenz der $r\frac{0}{0}$ von $D = 3$ bis 5, als p die Differenz der $r\frac{0}{0}$ von $D = 1$ bis 3, da diese gleich gross als von 3 bis 5 ist. Im Fall aber $r\frac{0}{0} = 50$ zwischen $D = 2$ und 3 fällt, gilt als q die Differenz der $r\frac{0}{0}$ von $D = 2$ bis 3, als p von 1 bis 2.

Stirn schreitet nicht durch gleiche Differenzen von D fort, nämlich durch $D = 0{,}5$; 1; 2; 4; 6; 8, und $r\frac{0}{0} = 50$ fällt in den verschiedenen Combinationen meist zwischen $D = 2$ und 4; zuweilen auch zwischen 4 und 6. Man kann aber das p für die Differenz zwischen $D = 0{,}5$ und 2 mit dem q für die im Verhältniss $\frac{4}{3}$ grössere Differenz zwischen $D = 2$ und 4 oder $D = 4$ und 6 vergleichen, indem man die direct erhaltenen p im Verhältniss $\frac{4}{3}$ vergrössert, was wenigstens approximativ zulässig sein muss. Die so vergrösserten p sind für Stirn in folgender Tabelle mitgegeben. Die der Tabelle unterliegenden $r\frac{0}{0}$ sind nach der T-Methode aus den Versuchen der verschiedenen Beobachter bestimmt. Die Untersuchung nach der R-Methode giebt so wesentlich entsprechende Resultate, dass ich sie übergehe.

Die drei Combinationen mit U in no. 1 sind nicht benutzungsfähig für unseren Vergleich, weil die Reihen dafür sämmtlich Verkehrtheiten einschliessen, wovon unten. Auch Stirn $W\beta$ lässt sich nicht wohl benutzen, weil $r\frac{0}{0} = 50$ hier schon zwischen $D = 1$ und 2 fällt.

	Hdgl. no. 1		Hdgl. no. 2		Stirn no. 3	
	p	q	p	q	p	q
$W\alpha$	15,96	12,46	14,74	12,35	29,8	19,5
β	7,67	7,94	7,81	7,68	—	—
γ	15,83	12,02	13,49	10,70	36,7	15,9
$U\alpha$	—	—	7,68	6,54	17,3	17,6
β	—	—	9,89	5,82	22,8	17,2
γ	—	—	11,18	3,85	20,0	21,78

Man sieht, dass in allen drei Reihen und bei den verschiedensten Reductionen, mit ein paar ganz schwachen Ausnahmen, p überall grösser als q ist, was dem Vorzuge von F entspricht.

Die Volkmann'schen Versuche mit unverdünnter Haut (wissent-

lich ohne Vex.) geben allerdings bei I und II $q > p$ (S. 171), aber können theils wegen der geringen Zahl der Versuche, theils weil sie sehr rasch hinter einander angestellt sind, ohne Sicherstellung, dass das wechselnde Auf- und Absteigen zur Compensation des davon abhängigen Contrasteinflusses hingereicht hat, nicht entscheidend ins Gewicht fallen. Ueberhaupt hat man zu berücksichtigen, dass bei wenig zahlreichen Versuchen die Aussage des Kriteriums durch zufällige Aenderungen von p und q alterirt werden kann.

Zweites Specialkriterium. Soll von zwei Formeln, wie F und M, die eine besser als die andere passen, so muss sie nicht blos zu den Ergebnissen der Hauptversuche mit grösseren und kleineren D, sondern auch der Vexirversuche bei $D = 0$ besser passen, und hiemit die Vexirfehler besser unter sich fassen, sofern die Vexirfehler nichts Andres sind, als Werthe $r\frac{0}{0}$ bei $D = 0$. Der Werth $D = 0$ ist aber nur ein besonderer Fall, der Grenzfall der Werthe D, für welche die allgemeine Formel gelten soll.

Nennen wir nun das bei $D = 0$ erhaltene $r\frac{0}{0}$ das Vexir-$r\frac{0}{0}$, und das dazu in der Fundamentaltafel gehörige t das Vexir-t, so muss principiell nach F wie M das Vexir-t gleich der Constante $+ k$ (nach F) oder $- k$ (nach M) sein, welche in die secundäre Formel

$$t = hD \pm k$$

eingeht, indem es durch Setzung von $D = 0$ daraus hervorgeht. Der Werth k aber ist durch Ableitung aus den Hauptversuchen für die verschiedenen zu prüfenden Combinationen zu finden, indess der Werth Vex. $r\frac{0}{0}$ und hienach Vex. t, experimental für dieselben Combinationen gegeben ist. Und wir können nun für jede Combination der neueren Camerer'schen Versuche insbesondere untersuchen, wiefern das aus den Hauptversuchen abgeleitete, in der Tabelle S. 169 verzeichnete, k mit dem direct aus dem Vex. $r\frac{0}{0}$ abgeleiteten t zusammenstimmt; indess die älteren Camerer'schen sowie Tübinger Versuche sich zu einer solchen Untersuchung nicht eignen, weil die $r\frac{0}{0}$ der Vexirversuche hier durch Contrastverhältnisse alterirt sind, und je nach Einschaltung zwischen verschieden grosse D's einen verschiedenen Werth annehmen.

Die procentalen Daten der Vexirversuche, auf die wir zurückzugehen haben (wissentlich blos für die Handgelenkversuche no. 1

und die Stirnversuche no. 3 vorliegend) sind, nach S. 139, 140 zusammengestellt, folgende:

Werthe der Vexir-$r\frac{0}{0}$.

		2 Sp.	m.	u.	1 Sp.	Σn
Hdgl. no. 1	wiss.	4,72	5,88	—	89,41	85
	unwiss.	28,5	9,5	2,5	59,5	1000
Stirn no. 3	wiss.	1,85	9,26	—	88,89	216
	unwiss.	9,5	6,6	0,2	84,2	1000

Unter Σn ist die Totalzahl der Vexirversuche verstanden, aus welchen die betreffenden procentalen Ergebnisse bei $D = 0$ erhalten sind.

Die wissentlichen Bestimmungen für Handgelenk no. 1 sind freilich, als blos aus $\Sigma n = 85$ Vexirversuchen abgeleitet und nach der Bemerkung S. 139 den Charakter der Unsicherheit an sich selbst tragend, sehr unsicher, verhältnissmässig viel sicherer die für Stirn no. 3, als aus $\Sigma n = 216$ herrührend; die unwissentlichen aber, für no. 1 wie no. 2 aus $\Sigma n = 1000$ herrührend, überhaupt ohne Vergleich sicherer als die wissentlichen. Bei allen diesen Bestimmungen aber fehlt wegen der Zwischenzeit von 5 Min. bis $\frac{1}{2}$ Stunde zwischen den Versuchen an demselben Individuum ein merklicher Contrasteinfluss.

Zuvörderst nun giebt die Übersetzung der obigen Spitzendata in Vex.-$r\frac{0}{0}$ je nach der für die Reduction zu Grunde zu legenden Combination, gleichgeltend für F und M, folgende Vex.-$r\frac{0}{0}$:

		$W\alpha$	$W\beta$	$W\gamma$	$U\alpha$	$U\beta$	$U\gamma$
Vex.-$r\frac{0}{0}$	no. 1	4,72	10,60	7,66	29,75	39,25	34,5
	no. 3	1,85	11,10	6,48	9,5	15,7	12,65

Und suchen wir hiezu einerseits die Vex.-t nach den Fundamentaltabellen für F und M, anderseits die Werthe k nach den Tabellen im IX. Abschn. für dieselben Combinationen bei F und M, um den Grad der Übereinstimmung von Vex.-t und k bei F und M zu vergleichen, so finden wir:

			$W\alpha$	$W\beta$	$W\gamma$	$U\alpha$	$U\beta$	$U\gamma$
no. 1	*F*	Vex.-*t*	0,504	0,538	0,521	0,659	0,727	0,722
		k	0,532	662	0,594	667	787	692
	M	Vex.-*t*	1,183	883	1,010	336	190	282
		k	0,532	662	0,594	667	787	722
no. 3	*F*	Vex.-*t*	0,475	0,541	0,514	0,529	0,568	0,550
		k	0,484	601	0,542	500	627	568
	M	Vex.-*t*	1,175	864	1,071	927	715	808
		k	0,895	401	0,597	842	400	599

Hier sieht man nun, dass, mag man sich an diese oder jene Combination, sei es bei no. 1 oder no. 3, halten, Vex.-*t* von *k* unverhältnissmässig weiter bei M als F abweicht, so dass man den Unterschied unmöglich bloss auf Zufälligkeiten schreiben kann; womit bestimmt für F gegen M entschieden ist. Hingegen schwankt innerhalb der Werthe für F der Vortheil der Combinationen, und betragen die Abweichungen zwischen Vex.-*t* und *k* bei den günstigsten Combinationen nicht mehr, als noch auf Rechnung von Zufälligkeiten geschrieben werden kann.

Drittes Speecialkriterium. Ordnungsmässig müssen in allen Combinationen die $r\frac{0}{0}$ wie *t* mit den *D*'s aufsteigen, und so findet es sich auch in den meisten sei es nach dem R- oder T-Verfahren gebildeten mittleren Reihen. Gehen wir aber auf die Specialreihen der einzelnen Beobachter zurück, so kommen darunter solche vor, in denen ein- oder mehrmals das Umgekehrte stattfindet, nämlich einem grösseren *D* ein kleineres $r\frac{0}{0}$ zugehört, oder auch, wo zweien in Grösse sich folgenden *D*'s zwei gleiche $r\frac{0}{0}$ zugehören. Nennen wir erstere Fälle Verkehrtheiten und bezeichnen sie durch den Unterschied der sich verkehrt folgenden $r\frac{0}{0}$, letztere Gleichheisfälle, und bezeichnen sie mit =. In den Combinationen von no. 1 mit *U* erstrecken sich Verkehrtheiten von den einzelnen Reihen sogar auf die mittleren Reihen. Natürlich, je mehr und stärkere Verkehrtheiten es bei einer Combination giebt, desto mehr spricht es gegen die Combination, und auch Gleichheitsfälle sind in diesem Sinne zu nehmen. Für F und M bleiben die Verkehrtheiten und Gleichheitsfälle dieselben, und ist also diess Kriterium zur Entscheidung zwischen beiden

unanwendbar; wogegen je nach W und U sich erhebliche Unterschiede danach finden.

Zur Erläuterung diene zunächst $U\alpha$ verglichen mit $W\alpha$ bei Beobachter I in no. 1. Wir haben hier:

r_0^0 $[\alpha]$.

D		1	2	3	5
r_0^0	$W\alpha$	23	29,35	40,35	52,05
	$U\alpha$	38,7	48	45,05	61,05

also für $U\alpha$ eine Verkehrtheit = 2,95 zwischen D = 2 und 3, indess $W\alpha$ keine Verkehrtheit zeigt. In derselben Gesammtreihe no. 1 zeigt Beobachter IV für $U\alpha$ zwischen D = 2 und 3 die enorme Verkehrtheit 9,05, indess $W\alpha$ bei demselben Beobachter keine Verkehrtheit zeigt. Zählen wir überhaupt bei unseren Gesammtreihen no. 1, 2, 3 die Verkehrtheiten und Gleichheitsfälle der verschiedenen Beobachter zusammen und geben den ersten ihren Werth im obigen Sinne, so erhalten wir folgende Tabelle:

Verkehrtheiten und Gleichheitsfälle.

<table>
<tr><th></th><th>no. 1</th><th>no. 2</th><th>no. 3</th></tr>
<tr><td>$W\alpha$</td><td>—</td><td>2,25</td><td>0,8 | 10,4 (IV)</td></tr>
<tr><td>β</td><td>1,4</td><td>—</td><td>0,08 (IV)</td></tr>
<tr><td>γ</td><td>—</td><td>0,75</td><td>5,6 (IV)</td></tr>
<tr><td>$U\alpha$</td><td>2,95 | 9,05</td><td>0,75 | 0,20 | 0,25 | 1,5 | 7,0</td><td>—</td></tr>
<tr><td>β</td><td>2,95 | 1,00 | 2,35</td><td>= | =</td><td>—</td></tr>
<tr><td>γ</td><td>4,95 | 0,20 | 5,70</td><td>= | = | = | 2,75</td><td>—</td></tr>
</table>

Man sieht, dass in den Handgelenkreihen no. 1 und 2 die Verkehrtheiten und Gleichheitsfälle zahlreich bei den Combinationen mit U, nur selten bei denen mit W vorkommen. Bei der Stirnreihe no. 3 verhält es sich freilich umgekehrt, wie auch bei den vorigen Kriterien die Stirn sich günstiger für U als W findet, was als Gegengewicht gegen den Vortheil von W vor U nicht ausser Rechnung zu lassen ist; indess überwiegt doch das Resultat der beiden Handgelenkreihen durch ihre Zusammenstimmung, und ist nach den Bemerkungen S. 157 der Stirnreihe überhaupt nicht so viel Zutrauen zu schenken, als den Handgelenkreihen. Ja, sieht man näher zu, so

beruhen alle Verkehrtheiten in den Combinationen mit *W* bei der Stirn blos auf den Versuchsdatis des Beobachters IV, und dass sie sich ausnahmsweise von den übrigen Beobachtern hier finden, lässt jedenfalls ihr Gewicht nur sehr gering erscheinen.

Beiläufig gab eine Rechnung (nach T und Qu.) für Stirn unter Weglassung der Distanz $D = 8$ und des Beobachters IV folgendes Ergebniss:

	$\Sigma \varepsilon^2$		$\Sigma \varepsilon^2$
$FW\alpha$	8,28	$FU\alpha$	17,08
β	39,8	β	3,00
γ	4,94	γ	8,25

Nach Allem bleibt als Endresultat der neuen Camerer'schen Versuche ein Vortheil von F vor M, von *W* vor *U*, von γ vor α und β.

XVII. Abhängigkeitsverhältnisse der Constanten *h*, *k*.

Da nach Allem die Müller'sche Formel den Beobachtungen gegenüber nicht Stand hält, so unterlasse ich, auf die Verhältnisse ihrer Constanten näher einzugehen, sondern beschränke mich auf die Verhältnisse der meinigen.

In rein formeller Beziehung nun hat folgende Bemerkung Platz zu finden. Der Werth *t* hängt nach der Fundamentaltafel seinem Zahlausdruck nach von $r\frac{g}{0}$ ab, rücksichtslos auf die Masseinheit, Millimeter, Linie u. dgl., auf welche man den in *t* eingehenden Distanzwerth *D* bezieht. Soll diese Unabhängigkeit bestehen, so muss nach der secundären Formel $t = hD + k$, bei Aenderung der Einheit von *D*, der Zahlausdruck von *h* sich in umgekehrtem Verhältnisse als der Zahlausdruck von *D* ändern, indess der Zahlausdruck von *k* ungeändert bleibt. Sofern sich nun der Zahlausdruck von *D* in umgekehrtem Verhältnisse als die Einheit, worauf *D* bezogen wird, ändert, muss sich der Zahlausdruck von *h* im directen Verhältnisse als die Einheit von *D* ändern. Diese Punkte lassen sich leicht durch Ausführung der Ableitung von *h*, *k* bei abgeänderter Einheit von *D* an beliebigen Beispielen bewähren, und verdienen Rücksicht, wenn man Bestimmungen von *h*, *k*, die bei Unterlage verschieden angenommener Einheit von *D* gewonnen sind, auf einander reduciren will.

In sachlicher Beziehung sind namentlich die Volkmann'schen Versuche des X. Abschnittes von fundamentalster Bedeutung für die Abhängigkeitsverhältnisse von *h*, *k*, indem sie sehr entschieden zeigen, dass das durch Vermehrung der $r\frac{a}{0}$ angezeigte Wachsthum der Empfindlichkeit wegen wachsender Uebung so wie Hautverdünnung gar nicht von einer Vergrösserung des *h*, sondern nur des *k* abhängt, was, wie ich gestehe, mir sehr unerwartet gewesen ist.

In der That sehen wir in der ersten wie zweiten Gesammtreihe, S. 172, in welcher die Nummern I, II . . . fortschreitender Uebung entsprechen, *h* nur wenig und unregelmässig sich ändern; oder sollte man in der zweiten eine andere als zufällige Aenderung von *h* annehmen, so würde *h* mit fortschreitender Uebung vielmehr etwas abnehmen als zunehmen; wogegen sowohl in der ersten als zweiten Gesammtreihe *k* mit fortschreitender Uebung continuirlich in positivem Sinne wächst, ja bei der ersten aus negativ in positiv übergeht. Nun gehört die erste Gesammtreihe unverdünnter, die zweite verdünnter Haut zu; es ist aber in allen Uebungsepochen *k* sehr viel grösser in der zweiten als in der ersten Gesammtreihe, wogegen *h* in der zweiten durchschnittlich etwas kleiner als in der ersten ist, ein Unterschied, der doch auch zufällig sein kann, da zwischen Reihen, die nicht in Zusammenhang angestellt sind, solche Unterschiede recht wohl zufällig vorkommen können, ausserdem die Zahl der Fälle zu gering ist, um in betreffender Hinsicht entscheidend zu sein.

Zur Evidenz aber geht aus vorigen Ergebnissen hervor, dass *k* keineswegs, wie ich früher geneigt war, anzunehmen, wesentlich als Sache eines, nur mit *h* complicirten, constanten Fehlers anzusehen ist, da der Einfluss der Uebung und Hautdünne nicht diese Bedeutung haben können. Obwohl unstreitig, im Fall wirkliche constante Fehler als Vergrösserungen oder Verkleinerungen von *D* auftreten, diese sich mit auf *k* werfen werden, und somit Antheil daran haben können. Denn sei *c* ein constanter Fehler, um den *D* vergrössert oder verkleinert erscheint, und *k'* der davon unabhängige Theil von *k*, so wird man zu setzen haben:

$$t = h\,(D + c) + k'$$
$$= hD + hc + k'.$$

Das Product der Constanten *hc* aber wird für die Rechnung mit *k'* zu einer einzigen Constante *k* verschmelzen. Hieher mögen

die Contrastfehler und Einbildungsfehler gehören, wovon im VI. Abschnitte die Rede war, insofern sie einen Einfluss in constanter Richtung gewinnen; und auch wo sie Zufälligkeiten unterliegen, mögen sie sich doch im Allgemeinen in einen nach Gauss'chem Gesetze variirenden und einen constanten Theil zerlegen lassen.

Dass h und k auch bei möglichst vergleichbar gehaltenen Versuchen doch verschieden für verschiedene Beobachter ausfallen können, lässt sich von vornherein wahrscheinlich finden, und bestätigt sich durch die Tabelle *D* S. 169, wo die Werthe h, k für verschiedene Combinationen in no. 1 und 2 bezüglich der Beobachter I, II u. s. w. angegeben sind. Halten wir uns dabei an die massgebendsten Bestimmungen, d. i. die nach Qu. für $FW\gamma$ und $FW\beta$ gefundenen, so zeigt sich bei Handgelenk wie Stirn, dass k nur in verhältnissmässig engen Grenzen, h aber in viel stärkerem Verhältnisse vom Einfachen bis über das Doppelte, selbst bis zum Dreifachen schwankt.

Die Abhängigkeitsverhältnisse der h, k von der Verschiedenheit der Reductionsweisen α, β, γ und dem Unterschiede von wissentlich und unwissentlich lassen sich nach der Tabelle B S. 167 beurtheilen, wobei in Mitrücksicht kommt, dass an den Ergebnissen dieser Tabelle Vexireinfluss und davon abhängiger Contrasteinfluss keinen Antheil haben. Allgemein zeigt sich hiebei für F sowohl bei no. 1 als 2 als 3, sowohl bei *W* als *U*, sowohl nach T als R, dass h wie k grösser nach β) als nach α) ausfällt, indess γ eben so allgemein zwischen beiden steht, und dass *W* grössere, h aber kleinere k als *U* giebt. Letzteres hat nur eine ganz schwache Ausnahme in no. 2 nach T bezüglich des Verhältnisses zwischen $FW\beta$ und $FU\beta$ (die ich auch durch Revision der Rechnung nicht wegzubringen vermag), indem sich hier k für $FW\beta = 0,692$, für $FU\beta = 0,685$ findet; wogegen nach R eine entsprechende Annäherung an die Gleichheit in normalem Sinne besteht.

Eine Folge des im Allgemeinen gültigen normalen Verhältnisses in dieser Beziehung ist, dass das Grössenverhältniss der $r\frac{f}{0}$ zwischen einer wissentlichen und unwissentlichen Reihe bei sonst gleichen Bedingungen ihrer Anstellung geneigt ist, sich im Fortschritt von kleineren zu grösseren *D* umzukehren. Nimmt man *D* so klein, dass in der secundären Formel $t = hD + k$ der Werth hD gegen k verschwindet, oder doch t und mithin $r\frac{f}{0}$ in der Hauptsache von k abhängt, so überwiegt das $r\frac{f}{0}$ von *U*; steigt man aber mit den *D*, so nähert sich

das $r\frac{0}{0}$ von *W* mehr und mehr der Gleichheit mit dem $r\frac{0}{0}$ von *U*, und überwiegt endlich, wenn die Reihe weit genug fortschreitet.

Wiefern die Einschaltung von Vexirversuchen bei rasch auf einannderfolgenden Versuchen, vermöge des davon abhängigen Contrasteinflusses, auf *h* und *k* Einfluss hat, lässt sich nach der unter den älteren Camerer'schen Versuchen befindlichen Reihe (S. 132, 133) untersuchen, welche den Vergleich von Reihen mit und ohne Einschaltung von Vexirversuchen für Vorderarm, Ellbogen, Oberarm und Acromion in der 1. und 2. Epoche enthält. Ich habe zu dieser Untersuchung die Reihen für Vorderarm und Ellbogen nach dem T-Verfahren combinirt, und *h*, *k* nach Qu. daraus bestimmt; aber keine constanten Ergebnisse erhalten, nämlich:

	mit Vex.		ohne Vex.	
	h	*k*	*h*	*k*
Hedwig 1. Ep.	0,061	— 0,063	0,066	— 0,016
- 2. -	0,105	— 0,290	0,116	— 0,457
Ida 1. Ep.	0,081	— 0,417	0,067	— 0,299
- 2. -	0,079	0,025	0,042	0,390

Hienach ändert sich *h* bei Hedwig durch Einschaltung von Vexirversuchen nicht erheblich, nimmt aber bei Ida erheblich in positivem Sinne zu; *k* ändert sich durch Vex. bei Hedwig stark in positiver Richtung, bei Ida umgekehrt. Allgemein gültig ist dabei nur, dass *h* und *k* sich so im Zusammenhange ändern, dass $r\frac{0}{0}$ bei gegebenem *D* mit Vex. grösser als ohne solche aufallen.

XVIII. Frage nach Verschiedenheiten der extensiven Empfindlichkeit zwischen centralen und seitlichen Theilen der Haut.

Meines Erachtens würde die einfachste und directeste Methode, diese Frage zu untersuchen, die, schon in meinen Elem. I, 131 ff. besprochene, und folgends im XX. Abschnitte noch näher in Betracht zu nehmende, Methode der Aequivalente sein, welche jedoch noch keine Anwendung darauf gefunden hat, überdiess nach Abschn. XX. einer directen Vergleichbarkeit mit unserer Methode entbehrt. Auch nach dieser aber lässt sich die Frage untersuchen, und ungeachtet die Versuche Camerer's in Bezug darauf zu keinem ganz entschei-

denden Ergebniss geführt haben, sind sie doch berücksichtigenswerth, sofern sie jedesfalls keine Zunahme, eher eine Abnahme der extensiven Empfindlichkeit nach den Seiten hin auf dem Handgelenk annehmen lassen.

Das Wesentliche der Versuche ist dieses. Nachdem Camerer vom 18. Mai bis 22. Juni 1882 eine Reihe wissentlicher centraler Versuche am Handgelenk, d. h. wo die Mitte der Distanzen mit der Mitte des Handgelenkes zusammenfiel (mit Pausen von 5 Min.), angestellt hatte, verlegte er in einer darauf folgenden Reihe vom 1. Juli bis 5. Sept. das Centrum derselben Distanzen an eine seitliche Stelle, 2 Centim. von der Mitte des Handgelenkes, und stellte eine der vorigen ganz entsprechende Reihe wissentlicher Versuche an, nur dass dazu von den fünf Versuchspersonen der centralen Reihe blos I, II, V zugezogen wurden, dann aber auch von den centralen Versuchen blos die Resultate dieser drei Beobachter zum Vergleich mit den seitlichen benutzt wurden. Beidesfalls wurden die Versuche sowohl am rechten als linken Handgelenk angestellt, und zwar die seitlichen so, dass, wenn die Hand auf den Rücken gelegt wurde, die seitliche Stelle immer rechts von der Mittellinie war.

Nun gaben im Mittel für alle drei Beobachter und vier Distanzen 2400 Versuche central und eben so viel seitlich folgendes procentale Ergebniss:

	2 Sp.	m.	u.	1 Sp.
central	22,5	29,42	0,29	47,79
seitlich	19,71	25,58	—	54,71

also einen kleinen Vortheil zu Gunsten der centralen Versuche. Indess bemerkt Camerer selbst, dass das Resultat dieser Versuche nicht durchschlagend ist, da der Unterschied zwischen central und seitlich nicht gross ist, und bei der Versuchsperson I insbesondere überhaupt wegfiel. Auf Uebungseinfluss kann er jedoch nicht geschoben werden, da die seitlichen Versuche mit dem schwächeren Resultate nach den centralen angestellt sind; aber sofern sie nicht abwechselnd damit angestellt sind, und man auf völliges Gleichbleiben der Empfindlichkeitsverhältnisse in verschiedenen Epochen überhaupt nicht rechnen kann, so könnte der kleine Unterschied recht wohl davon abhängen.

Hienach kann bemerkt werden, dass auch ohne Verlegung des Centrums der Distanzen sich aus blos centralen Versuchen mit einer Reihe verschiedener *D*'s ein Schluss darauf machen lassen muss, ob die Empfindlichkeitsverhältnisse sich mit der Entfernung von der Mittellinie ändern, wenn man nur den Spielraum der *D*'s nicht zu klein nimmt, der Güte der Formel oder überhaupt Combination, nach der man rechnet, sicher ist, und die Zahl der Versuche gross genug nimmt, um nicht einer zu grossen Unsicherheit durch unausgeglichene Zufälligkeiten zu unterliegen. Sofern nämlich die grösseren Distanzen von dem gemeinsamen Centrum aus weiter nach der Seite reichen, als die kleineren, kommt folgendes Princip zur Geltung.

Soll eine Constanz der Empfindlichkeitsverhältnisse im ganzen Spielraum der *D*'s bestehen, so müssen die für die Empfindlichkeit massgebenden Werthe h und k, die aus Versuchen mit kleineren *D*'s abgeleitet sind, mit denen, die aus solchen mit grösseren abgeleitet sind, so weit stimmen, als es unausgeglichene Zufälligkeiten zulassen, wo nicht, so wird sich ein Unterschied zeigen.

Freilich gewinnt man dadurch unmittelbar keine reine Sonderung der Werthe h, k für centrale und seitliche Distanzen, weil ja alle Distanzen central sind, und in die grösseren, welche weiter nach der Seite reichen, die kleineren, welche sich mehr um die Mitte halten, mit eingehen. Aber man kann die reine Sonderung, insofern es um eine solche zu thun ist, durch Abzug je zweier auf einander folgender *t*'s $= hD + k$, in nachher anzugebender Weise bewirken.

Dabei ist freilich die oben angegebene Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, dass man eine für die Berechnung von Versuchen dieser Art genügende Formel und überhaupt Combination zur Ableitung von h, k verwende; wo nicht, so könnte eine Abweichung der Constanten zwischen centralen und seitlichen Theilen auch davon abhängen, dass die Formel oder Combination überhaupt ungeeignet ist, die Verhältnisse zwischen $r\,{}^0\!/_0$, h, k bei Aenderung von D richtig zu repräsentiren, und insofern kann man auch ein Nebenkriterium für die Güte verschiedener Formeln oder überhaupt Combinationen darin suchen, dass man bei centralen Versuchen, die sich nur auf einen so kleinen Spielraum (5 Mill.) erstrecken, als Camerer's neue Handwurzelversuche, diejenige Formel oder überhaupt Combination

vorzieht, welche die beste Uebereinstimmung zwischen den h, k gewährt, die aus Versuchen mit kleineren und grösseren D's gefolgert sind, sofern die Kleinheit des Spielraumes, namentlich in Verbindung mit dem früher (S. 160) bemerkten Umstand, dass die Stelle des Spitzenaufsatzes etwas variirt wurde, an sich keine erhebliche Verschiedenheit der Constanten nach central und seitlich erwarten lässt; und vielmehr in dieser Beziehung, als um Aufschluss über die Titelfrage dieses Abschnittes zu erhalten, kann es allerdings ein Interesse haben, die Combination, die sich nach Abschn. XVI im Ganzen als die vortheilhafteste erwiesen hat, d. i. $FW\gamma$, theils an sich selbst darauf zu prüfen, ob sie der Bedingung der Constanz der Constanten im Spielraum der D's hinreichend entspricht, theils sie mit anderen Combinationen, welche etwa sonst noch Anspruch an Berücksichtigung machen könnten, zu vergleichen, ob es nicht darunter solche giebt, welche dieser Bedingung noch besser entsprechen. Stellen wir also hier eine Untersuchung darüber an.

Freilich kann das hiezu einzuschlagende Verfahren, indem es nöthigt, die ganzen Reihen in Fractionen nach der Grösse der D zu legen, und diese besonders zu berechnen, auch bei Führung der Rechnung nach der richtigsten Combination, nicht dieselbe Sicherheit für die Constanten der Fractionen gewähren, als die zusammenhängende Berechnung der ganzen Reihe für die mittlern Werthe ihrer Constanten; wozu noch kommt, dass, wenn h oder k durch Berechnung für eine gewisse Fraction wegen Zufälligkeiten zu gross oder zu klein gefunden ist, diess für die benachbarte Fraction nach mathematischem Zusammenhange die Neigung mitführt, dieselbe Constante in umgekehrtem Sinne zu klein oder gross finden zu lassen, womit sich der zufällige Grund des Unterschiedes verdoppelt. Die Versuche müssten daher noch viel mehr vervielfältigt werden, als bisher der Fall ist, um die zufälligen Unterschiede zwischen den Constanten der verschiedenen Fractionen derselben Reihe so weit herabzubringen, als zu wünschen wäre; indess lohnt es doch der Mühe, die dazu sich eignenden Versuche, so wie sie vorliegen, der betreffenden Untersuchung zu unterwerfen, das sind die neuen Handgelenkversuche Camerer's no. 1 und no. 2. Indem wir nun das Verfahren zunächst auf die Combination $FW\gamma$ in no. 1 verwenden, wird sich dasselbe dadurch von selbst erläutern.

Diese Combination giebt im Mittel der fünf Versuchspersonen (nach dem T-Verfahren) folgende Werthe:

D	r_0^0	$t = hD + k$	
1	27,99	0,6472	für die ganze Reihe nach Qu.
2	36,21	7048	$h = 0,0553$
3	43,82	7625	$k = 0,5931$
5	55,84	8658	

Hienach haben wir durch successive Substitution der vier Werthe D in die allgemeine Gleichung $t = hD + k$, die vier Gleichungen $1 \cdot h + k = 0,6472$; $2h + k = 0,7048$ u. s. f. Ziehen wir nun die erste Gleichung von der zweiten, die zweite von der dritten, die dritte von der vierten ab, so verschwindet überall k, und bestimmt sich h successive für die Fractionen $1/2$; $2/3$; $3/5$, um diese kurze Bezeichnung nach den D's zu gebrauchen, wie sogleich zu verzeichnen. Aus denselben 4 Gleichungen kann man aber auch die k für dieselben drei Fractionen bestimmen, indem man dazu die erste mit der zweiten, die zweite mit der dritten, die dritte mit der vierten combinirt, und erhält solchergestalt:

	für:	$1/2$	$2/3$	$3/5$
no. 1	h	0,0575	0,0577	0,0517
	k	0,5897	0,5893	0,6074

Ganz dieselbe Rechnung für $FW\gamma$ in no. 2 angestellt giebt:

D	1	2	3	5
t	0,6606	0,6992	0,7594	0,8497

mit mittlerem $h = 0,0499$ und $k = 0,6057$. Hienach:

	für:	$1/2$	$2/3$	$3/5$
no. 2	h	0,0386	0,0602	0,0451
	k	0,6220	0,5788	0,6241

Das Resultat für no. 1 ist sehr zufriedenstellend, da $1/2$ und $2/3$ sowohl betreffs h als k so gut wie ganz übereinstimmen, und $3/5$ doch nicht weiter davon und von den für die ganze Reihe gel-

tenden Werthen abweicht, als nach den Unsicherheitsverhältnissen der Fractionen durch unausgeglichene Zufälligkeiten erträglich scheint. In no. 2 schwanken allerdings die Werthe von *h* stark, aber unregelmässig, und schreiten nicht mit den *D* in gleicher Richtung vor, was doch die Abhängigkeit von Zufälligkeiten wahrscheinlich macht. Die Schwankungen des Werthes *k* sind offenbar bei no. 1 wie 2 nicht grösser, als füglich auf Zufälligkeiten zu schreiben.

Erwägt man die Verhältnisse des vorigen Verfahrens näher, so sieht man, dass 1/2 ein *h* für das seitliche *D* giebt, was man erhält, wenn man von der grösseren Distanz 2 die kleinere 1 abzieht, 2/3 ein *h* für das noch mehr seitliche *D*, was man erhält, wenn man von der grösseren Distanz $D = 3$ die kleinere $= 2$ abzieht, u. s. f., so dass die Bestimmung des *h* sich in der That für die mehr central und seitlich gelegenen Distanzen *D* solchergestalt sondert. Was die *h* anlangt, so werden sie durch diess Abzugsverfahren nicht unmittelbar mitbestimmt, weil sie ja dabei wegfallen, wohl aber, und zwar in identischer Weise, wenn wir mit dem, durch das Abzugsverfahren bestimmten *h*, sei es in die eine oder andere der beiden Gleichungen eingehen, die dem Abzugsverfahren unterworfen sind, so dass das danach bestimmte *k* doch für dasselbe *D* als das *h* in Anspruch genommen werden kann.

Indem ich nun das vorige Verfahren noch auf einige andere Combinationen sowohl in no. 1 als no. 2 mit F und M anwandte, erhielt ich folgende Resultate, die ich blos für *h* specificire; indem man allgemein findet, dass nach Massgabe als die *h* einer gegebenen Combination besser unter einander stimmen, es auch mit den *k* der Fall ist, nur dass bei den absolut grösseren *k* die Abweichungen verhältnissmässig immer viel kleiner als bei den *h*'s erscheinen.

Werthe *h* folgender Combinationen.

		FWα	*FWβ*	*TWγ*	*FUγ*	*MWγ*
no. 1	1/2	0,0553	0,0601	0,0575	0,0488	0,1777
	2/3	0498	0688	0577	— 0046	1415
	3/5	0472	0601	0517	0539	1081
no. 2	1/2	0,0291	0,0635	0,0386	0,0084	0,1080
	2/3	0684	0696	0602	0723	1470
	3/5	0466	0497	0451	0201	0952

Verglichen mit den vorigen Bestimmungen für $FW\gamma$, welche hier wieder mit aufgenommen sind, zeigt sich nun, dass jedenfalls keine Combination vortheilhafter hinsichtlich der Constanz der h als diese, und nur etwa $FW\beta$ ungefähr gleichwerthig damit ist. Im grössten Nachtheil ist $FU\gamma$ gegen $FW\gamma$, also U gegen W, indem bei no. 1 sogar ein kleiner negativer, d. i. unmöglicher, Werth von h mit unterläuft.

XIX. Tabellen und Resultate aus den älteren Camerer-schen Versuchsreihen (No. 1). Allgemeiner Rückblick auf die früheren Versuche.

In früheren Abschnitten, III und VII, sind im Zusammenhange mit den neueren Versuchen Camerer's (No. 2) auch die frühern (No. 1) mehr oder weniger eingehend besprochen, und dabei die Gründe angegeben, wesshalb wir in der Untersuchung der fraglichen Puncte im Ganzen vielmehr auf die neuern als frühern Versuche zu fussen haben. Indessen kann es doch auch ein Interesse haben, zu sehen, welche Unterschiede überhaupt in den Ergebnissen zwischen den früheren und neueren in Folge der verschiedenen Umstände, die bei ihnen stattfinden, vorkommen, und zwar wird es hauptsächlich gelten, in dieser Beziehung die Handgelenkversuche in's Auge zu fassen, sofern solche den neueren und älteren Versuchen gemein sind; doch habe ich ausserdem auch die Resultate der älteren Versuche an Fingerspitze und Vola manus untersucht.

In gewisser Weise nun ergänzen sich die älteren und neueren Versuche dadurch, dass die älteren bei grösseren Distanzen angestellt sind, als die neueren; wie denn am Handgelenk die Distanzen bei den neueren Versuchen von $D = 1$ bis 5, bei den ältern von 7 bis 20 Mill. reichen, so dass letztere in dieser Hinsicht nur als die Fortsetzung von jenen erscheinen; eine gegenseitige Ergänzung, die überhaupt höchst erwünscht wäre, wenn nur beide nach anderer Beziehung vergleichbar wären, was aber so wenig der Fall ist, dass es grosse Vorsicht fordert, aus dem Vergleich beider doch Schlüsse ziehen zu wollen, die eine solche Vergleichbarkeit voraussetzen. Insbesondere ist in dieser Hinsicht Folgendes zurückzurufen.

Die älteren Versuche sind bloss unwissentlich (U), die neueren sowohl wissentlich (W) als unwissentlich (U) angestellt; also können

die älteren Versuche blos mit unwissentlichen neueren verglichen werden, welche den wissentlichen aber nach dem Ergebnisse der neueren Versuche selbst nachstehen. Die ältern Versuche sind mit stumpfen, die neuern mit scharfen Spitzen angestellt; das macht aber einen Unterschied in der Beschaffenheit des Eindrucks. Bei den älteren Versuchen wurden blos richtige und falsche Fälle, bei den neueren viererlei Fälle, 2 Sp., m., u., 1 Sp. unterschieden; die Vergleichung jener mit diesen Eindrücken aber lässt Zweifel übrig, wenn schon ich es wahrscheinlich finde, dass die richtigen Fälle der früheren Versuche am meisten den, von mir mit β, bezeichneten 2 Sp. + $\frac{1}{2}u$ der neueren entsprechen, welche nach der Prüfungstabelle auch nicht die vortheilhaftesten sind. Die früheren Versuche unterliegen wegen rascher Folge der Versuche und Mischung mit Vexirversuchen dem Contrasteinflusse, die neuen sind mit wie ohne Vexirversuche dem Contrasteinflusse durch sehr langsame Folge entzogen. Die früheren Versuche sind blos an zwei Individuen, den Kindern Camerer's, Hedwig und Ida, die neuen (am Handgelenk) an fünf Individuen, welche S. 154 genannt sind, angestellt, wovon I mit Hedwig, II mit Ida übereinkommt; also kann, insoweit überhaupt ein Vergleich zwischen den Resultaten der älteren und neueren Versuche gemacht werden soll, dieser nicht zwischen den Specialresultaten der ältern Versuche für Hedwig und Ida und den mittlern Resultaten der neuen Versuche für alle fünf Individuen, welche in Tabelle B und C S. 167, 168 verzeichnet sind, gezogen werden, sondern es können von den Resultaten der neuen Versuche blos die Specialresultate für I und II, welche Combinationen mit U und β zugehören, in Vergleich kommen; und es sind daher solche für no. 2 der Handgelenkversuche in Tabelle D auf S. 169 angeführt; für no. 1 aber desshalb nicht gegeben, weil hier die Reihe $U\beta$ bei I eine starke Verkehrtheit einschliesst, und bei II fast gleiche Werthe reducirter r_0^0 für $D = 1, 2, 3$ giebt, was keine sichere Bestimmung der Constanten zulässt.

In der folgenden Tabelle für die älteren Versuche am Handgelenk (No. 1, Taf. IV, p. 8, 9) ist jede Procentzahl r_0^0 der Hauptversuche aus 200 Hauptversuchen abgeleitet, jede Procentzahl der Vexirfehler aus 100 Vexirversuchen bei Mischung mit den obenstehenden D.

Tabelle von Versuchen am Handgelenk aus Camerer's unwissentlichen früheren Versuchsreihen (No. 1).

D	$r\frac{0}{0}$ der Hauptversuche							Proc. Vexirfehler *)						
	7	9	11	13	15	17	20	7	9	11	13	15	17	20
Hedwig. Erste Epoche														
1. Nov. 1875			38,5	59,5	66,5	74,5	83			3	1	3	2	6
2. März 1876			33,5	50	67,5	80	95			5	6	0	2	1
3. April -		50	62	84	92,5	97			6	4	2	1	0	
4. April -			74,5	86,5	91,5	97	100			4	2	2	0	1
Zweite Epoche														
1. Nov. 1879		73	69	85,5	94,5	97	100		4	13	3	2	1	1
2. Jan. 1880	62,5	81	89,5	98,5	100	100		12	11	2	2	3	2	
3. März -	65,5	86,5	91,5	99	100			6	1	1	0	2		
4. Mai -	46,5	75	90	96	99			9	5	2	1	2		
Ida. Erste Epoche														
1. Nov. 1875			38,5	54,5	65	72	90			7	6	4	4	8
2. März 1876			64,5	76,5	84,5	92	98,5			0	2	2	0	2
3. April -		64,5	84	89	95	99			9	10	4	2	1	
4. April -			79,5	89	95,5	95,5	99,5			10	8	6	4	4
Zweite Epoche														
1. Nov. 1879		34	54,5	73,5	80	93	96,5		8	1	3	1	0	0
2. Jan. 1880	46,5	63	70	83	86,5	93,5		15	8	5	8	1	1	
3. März -	61,5	74,5	91	95,5	99			5	4	0	1	0		
4. Mai -	70	76	87	94,5	97,5			11	4	1	0	0		

Hienach gebe ich in folgenden zwei Tabellen die Werthe von h, k, $\Sigma\varepsilon^2$, für alle drei untersuchte Hauttheile nach den älteren Versuchen respective nach meiner Formel (F) und Müller's Formel (M).

*) Die procentalen Angaben der Vexirfehler sind auf ganze Zahlen abgerundet.

Nach F.

	h	k	$\Sigma\varepsilon^2$
	Handgelenk		
H. 1. Ep.	0,0766	+ 0,1033	16,8
2. -	1363	— 0,0570	3,7
I. 1. Ep.	0720	— 0,1645	8,9
2. -	0783	+ 0,3590	19,5
	Vola manus		
H. 1. Ep.	0,2365	— 0,1298	0,137
2. -	1864	+ 0,3029	8,6
I. 1. Ep.	1625	+ 0,1668	7,6
2. -	1222	+ 0,3533	8,9
	Fingerspitze		
H. 1. Ep.	0,7111	— 0,0373	23,0
2. -	1,1688	— 0,1786	0,034
I. 1. Ep.	0,7207	— 0,2127	76,25
2. -	0,7402	+ 0,1027	16,36

Nach M.

	h	k	$\Sigma\varepsilon^2$	$S = \frac{k}{h}$	$k\sqrt{\pi}$
		Handgelenk			
H. 1. Ep.	0,1332	1,4610	8,4	10,96	2,59
2. -	2025	1,2474	6,6	6,16	2,21
I. 1. Ep.	1082	1,0738	6,9	9,08	1,90
2. -	1343	0,7763	4,0	5,78	1,38
		Vola manus			
H. 1. Ep.	0,3566	1,4047	5,4	3,94	2,49
2. -	2934	0,7737	2,7	2,64	1,37
I. 1. Ep.	2504	0,9722	10,7	3,88	1,72
2. -	2069	0,7932	20,0	3,83	1,41
		Fingerspitze			
H. 1. Ep.	1,4300	1,8156	1,1	1,27	3,22
2. -	1,2210	1,1758	6,8	0,96	2,08
I. 1. Ep.	1,5205	2,3308	7,6	1,53	4,13
2. -	0,8713	0,8320	80,2	0,95	1,48

Hiezu folgende Bemerkungen: Die Resultate der vorigen Tabellen sind als mittlere nach der T-Methode unter Anwendung von Qu. aus den successiven Reihen mit je 200 Hauptversuchen für jedes D erhalten. Nun lagen für die Versuche am Handgelenk in jeder beider Epochen nicht blos 3 sondern 4 Reihen vor; es sind aber überall blos 3 Reihen zur Mittelziehung benutzt, und sowohl bei diesen Versuchen als den Versuchen an den andern Theilen mehrfach die grössten oder kleinsten D nicht mit zugezogen, um überall vergleichbare Data zur Mittelziehung zu haben. Es fehlen nämlich in manchen Reihen Data für die kleinsten oder grössten D oder finden sich bei manchen hohen D's derselben Reihe mehrere Werthe $r\frac{0}{0} = 100$, wo dann die betreffenden Reihen oder die betreffenden D's von der Mittelziehung ausgeschlossen wurden; wogegen, wo blos ein $r\frac{0}{0} = 100$ vorlag, das $n = 200$ nach der Erörterung S. 241 als 199,75 gerechnet wurde. So ist bei den Handgelenkversuchen Hedwig 1. Epoche die dritte Reihe weggelassen, weil sie ausnahmsweise von den übrigen blos bis $D = 17$ geht, und die D's der andern drei sind nur von 11 bis 20 benutzt; indem aber die vierte Reihe bei $D = 20$ ein $r\frac{0}{0} = 100$ gab, ist das t dazu für $F = 2,4187$, für $M = 2,1476$ gesetzt. Bei Hedwig 2. Epoche wurde die 1. Reihe weggelassen, und die D's blos von 7 bis 13 benutzt u. s. w. Es würde zu umständlich sein, hierüber überall in's Detail zu gehen. Jedenfalls geschah die Benutzung und Weglassung überall in derselben Weise für F und M.

Vergleichen wir nun die Data der vorigen Tabellen für F Handgelenk, als am meisten der Combination $FU\beta$ der neuen Handgelenkversuche entsprechend, mit den Resultaten für diese Combination in Tabelle D S. 169, indem wir uns dabei erinnern, dass in dieser Tabelle Hedwig durch I, Ida durch II bezeichnet ist, so muss in hohem Grade auffallen, dass die k der älteren Versuche in unserer jetzigen Tabelle viel kleiner als die der neueren, ja zum Theil negativ sind. Der Grund dieses Unterschiedes aber bleibt nach den, im XVII. Abschnitt besprochenen, Abhängigkeitsverhältnissen des k noch unklar. Möglicherweise könnte er darin gesucht werden, dass die älteren durch die Einmischung von Vexirversuchen alterirt sind, die neuen nicht; da über diess Abhängigkeitsverhältniss nach S. 260 noch keine entscheidenden Resultate vorliegen; möglicherweise könnte auch der Umstand, dass die neuen Versuche mit scharfen, die alten mit stumpfen Spitzen angestellt sind, von Einfluss sein. Die Werthe h sind zwar bei den ältern Handgelenkversuchen nicht unerheblich grösser als bei den neuen, doch ist der Unterschied in dieser Hinsicht nicht gleich auffällig, als der Unterschied betreffs der k.

Vergleichen wir ferner die Resultate der beiden Tabellen für F und M für sämmtliche drei Hauttheile nach den Werthen von $\Sigma\varepsilon^2$,

so sehen wir unter den 12 Bestimmungen $\Sigma\varepsilon^2$ 6 mal kleiner und 6 mal grösser für F als M, so dass der Vortheil von dieser Seite unbestimmt bleibt. Nur kann hieraus nicht der Schluss gezogen werden, dass die Müller'sche Formel überhaupt eben so passend für unser Versuchsgebiet ist, als die meinige; sondern sie passt sich nur eben den Missständen der ältern Versuche in gewisser Hinsicht besser an, wobei namentlich der im XVI. Abschn. zur Sprache gebrachte Umstand in Rücksicht kommt, dass durch die Einschaltung der Vexirversuche ein Gang der $r\frac{0}{0}$ begünstigt wird, der besser zu Müller's als meiner Formel stimmt.

Es liesse sich nun auch noch die Aufgabe stellen, die Tübinger Versuche specieller zu discutiren; und in der That bin ich für mich selbst verschiedentlich darauf eingegangen, ohne aber eine sichere oder neue Belehrung in Betreff der uns hier interessirenden Fragen daraus schöpfen zu können, da diese Versuche noch weniger als die älteren Camerer'schen dazu angethan sind, reine Resultate in Bezug darauf zu liefern, Vieles aber, was von den Camerer'schen älteren Versuchen gilt, auch von ihnen gilt.

Inzwischen wäre es Schade, die Resultate der so mühsamen und fleissigen Tübinger wie älteren Camerer'schen Versuche in Betreff der Empfindlichkeitsscala der verschiedenen Hauttheile schlechthin preiszugeben; und so könnten sie wohl in dieser Beziehung einer neuen Discussion mit Rücksicht auf die in dieser Abhandlung festgestellten Puncte unterzogen werden. Die Durchführung einer solchen Untersuchung durch das ganze vorliegende Material mit Berücksichtigung aller einschlagenden Puncte wäre freilich eine sehr weitschichtige Arbeit, und fraglich, ob man dem Bedürfniss nicht schon durch die jedenfalls als angenähert gültig anzusehende Vierordt'sche Scala so weit genügt halten kann, um die Mühe einer solchen Arbeit nicht lohnend genug zu finden. Sollte man freilich statt einer blossen Stufenreihe der Empfindlichkeiten eine Scala wirklich rein vergleichbarer Massbestimmungen für die verschiedenen Hauttheile verlangen, so würde eine solche überhaupt nicht durch eine Discussion und Kritik der bisher vorliegenden Versuche, sondern nur durch eine Wiederaufnahme der ganzen experimentalen Untersuchung unter den Rücksichten, zu denen die bisherige Untersuchung geführt hat, erzielt werden können. Als solche rechne ich nament-

lich, dass die zu vergleichenden Hauttheile durch dieselben Beobachter mit einer gleichen Zahl von Beobachtungen bedacht werden; dass zu schärferer Bestimmung der Distanzen scharfe Spitzen den stumpfen vorgezogen werden; dass der störende Einfluss eingemischter Vexirversuche durch Weglassung derselben oder hinreichend langsame Folge der Versuche beseitigt werde; dass, wofern durch solche der Contrasteinfluss der vorgängigen Versuche auf die späteren noch nicht hinreichend ausgeschlossen sein sollte, durch regelmässigen Wechsel zwischen Aufsteigen und Absteigen mit den Distanzen die möglichste Compensation derselben erzielt werde; dass die, zwischen richtigen und falschen Fällen unbestimmten, Zwischenfälle zwischen beiden gleich getheilt werden; endlich, dass das unwissentliche Verfahren dem wissentlichen vorgezogen werde, oder, sollte man den Vorzug des ersteren nach den Erörterungen des V. und XVI. Abschnittes noch nicht für hinreichend gesichert halten, dass man sich vor Vornahme der Untersuchung selbst Gewissheit darüber verschaffe. Ist nun auch Camerer in seinen älteren Versuchen schon mit einem Theile dieser Massregeln über die Tübinger Versuche hinausgegangen, so doch noch nicht mit allen; indess die neuen überhaupt nicht sowohl auf die Feststellung der Massscala zwischen verschiedenen Hauttheilen, als die Feststellung zweckmässiger Massnahmen, welche dazu führen können, gingen, und nur einen Vergleich zwischen Handgelenk und Stirn zulassen.

Mit all' dem wird man darauf verzichten müssen, eine einfache Scala der Empfindlichkeit für die verschiedenen Hauttheile aufstellen zu können, nachdem sich gezeigt hat, dass sie von zwei, nichts weniger als parallel gehenden, Elementen abhängt; nur dass man für höhere Distanzen approximativ sich an die Constante h als Hauptwerth halten kann (s. S. 185); wohl aber könnte man es sich zur Aufgabe machen, die Constanten h, k jedes Hauttheiles für verschiedene Individuen und verschiedene Umstände, als wie Alter, Geschlecht, Uebungszustand u. s. w. zu bestimmen, um damit theils zu Ansichten über die Weite ihres Spielraumes, theils zu einer erweiterten Kenntniss ihrer Abhängigkeitsverhältnisse zu gelangen. Was sich aus den bisherigen Versuchen darüber folgern liess, ist im XVII. Abschnitte besprochen.

XX. Beziehung der Methode der richtigen und falschen Fälle zur Methode der Aequivalente. Weitere Ausführungen über letztere Methode.

Unstreitig in hohem Grade erwünscht wäre, wenn Versuche nach unserer Methode d. r. u. f. F. mit solchen nach der Methode der Aequivalente, wie sie in meinen Elem. I. 131 ff. dargestellt und in etwas weiterer Ausführung unten reproducirt ist, unter möglichst vergleichbaren Umständen angestellt würden, um ihre Resultate sei es durch einander zu controliren, oder doch ihr Verhältniss zu einander kennen zu lernen. Bisher aber ist diess noch nicht oder nur in einigen, bisher noch nicht veröffentlichten, Versuchen geschehen, wonach sich doch schon Folgendes, theils nach theoretischer, theils empirischer Seite darüber sagen lassen wird.

Nach beiden Methoden ist das Verhältniss der extensiven Empfindlichkeit zweier Hauttheile *A*, *B* den für sie äquivalenten Distanzen *a*, *b* reciprok zu setzen; d. h. nach der Methode der r. u. f. F. (kurz Ri) den Werthen von *D*, welche auf ihnen ein gleiches $r\frac{r}{n}$ liefern, nach der Methode der Aequivalente (kurz Aeq) den Werthen von *D*, welche direct gleich gross erscheinen. Und es entsteht nun die Frage, ob das Verhältniss der äquivalenten Distanzen *a*, *b* und mithin der (ihnen reciprok zu setzenden) extensiven Empfindlichkeiten nach beiden Methoden übereinstimmt.

Ein directer experimentaler Vergleich beider Methoden in dieser Beziehung ist nun freilich nicht möglich; weil die Distanzen, in denen sich beide halten, statt zusammenzufallen, vielmehr auseinanderfallen, indem Ri bei Distanzen aufhört, anwendbar zu bleiben, von welchen an die Anwendbarkeit von Aeq erst beginnt. Bei jener nämlich müssen richtige und falsche Fälle wechseln, und sie hört bei Distanzen auf, wo alle Fälle richtig werden, d. h. die Distanzen immer als Distanzen erscheinen; diese aber kann blos bei Distanzen Platz finden, wo letzteres immer der Fall ist. Aber nachdem sich eine empirisch bewährbare Formel für das Verhältniss äquivalenter Distanzen $\frac{b}{a}$ nach Ri hat finden lassen, welche keine mathematische Einschränkung für die Grösse dieser Distanzen enthält, so hindert nichts, zu untersuchen, ob sich das, nach jener Formel be-

rechenbare, Verhältniss $\frac{b}{a}$ auch bei den grösseren Distanzen, zu denen Aeq fortschreitet, empirisch wiederfindet.

Nun haben wir auf S. 184 nach Ri (unter Bevorzugung des für die Formel F geltenden, oberen Vorzeichens) als Verhältniss der äquivalenten Distanzen b, a für zwei Hauttheile gefunden:

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} + \frac{k_a - k_b}{a h_b}.$$

Im Fall eine Vergleichbarkeit der nach Ri und Aeq zu erhaltenden Werthe besteht, bleiben die Constanten für beide dieselben, und es findet nur der Unterschied statt, dass b und a für Ri klein, für Aeq gross sind; das aber bringt mit sich, dass der Werth $\frac{k_a - k_b}{a h_b}$, in welchen der Werth a als Divisor eingeht, wegen dessen Grösse, bei Aeq als verschwindend oder sich dem Verschwinden doch nähernd anzusehen ist, wonach für Aeq merklich nur übrig bleibt:

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b}$$

d. h., um eine Vergleichbarkeit zwischen beiden Methoden anzunehmen, muss das Verhältniss der äquivalenten Distanzen nach Aeq sich nahehin umgekehrt wie das Verhältniss der Werthe h auf denselben Hauttheilen nach Ri verhalten, und es hindert nichts, sich empirisch zu versichern, ob diess der Fall ist.

Nach den, bisher zwar erst vorläufigen, doch schon ganz entscheidend scheinenden, Versuchen aber ist es nicht der Fall; indem die äquivalenten Distanzen b, a für gegebene Hauttheile nach den zugehörigen h der Methode Ri beurtheilt, in viel grösserem Verhältnisse von einander abweichen, als nach Aeq direct geprüft. Folgendes die thatsächlichen Verhältnisse, auf welche sich diese Erklärung stützt.

1) Nach Tabelle B des IX. Abschnittes S. 167 lässt sich das h für Handgelenk = 0,0516*), für Stirn = 0,0977 annehmen, wonach, wenn Handgelenk als A, Stirn als B gilt

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{0,0516}{0,0977}.$$

*) Als Mittel nämlich von 0,0545 in no. 1 und 0,0482 für no. 2, für $FW\gamma$ nach T und Qu berechnet.

Sofern nun die äquivalenten Distanzen gegebener Hauttheile sich umgekehrt wie die h derselben verhalten sollen, müsste nach Aeq mit der einfachen Distanz auf Stirn ziemlich die doppelte auf Handgelenk äquivalent sein. Aber man nehme 5 Mill. Stirn gegen 9 oder 10 Handgelenk, oder 10 Mill. Stirn gegen 18 oder 20 Handgelenk, und die Distanz auf Stirn wird viel kleiner als die Distanz auf Handgelenk erscheinen und in starkem Verhältniss vergrössert werden müssen, um der Distanz auf Handgelenk äquivalent zu werden. Auf Genaueres gehe ich hier nicht ein, da die Bestimmung des genauen Aequivalents noch mehr und genauere Versuche fordern würde, als ich angestellt habe.

2) Der Einwand liegt nahe, dass die hier in Betracht gezogenen Versuche nach Ri von Camerer an seinen Beobachtungssubjecten, die Versuche nach Aeq von mir an mir selbst angestellt seien, meine alte Haut aber mit der Haut von jenen jüngeren Subjecten nicht verglichen werden könne. Also habe ich Camerer gebeten, die vergleichenden Versuche zwischen Handgelenk und Stirn an denselben Beobachtungssubjecten zu wiederholen, welche bei den Versuchen nach Ri an Handgelenk und Stirn betheiligt gewesen sind, und es hat sich herausgestellt, dass ganz eben so wie bei mir die äquivalenten Distanzen nach Aeq sich weit näher stehen, als nach Ri. Auch hier gebe ich noch keine bestimmten Zahlen, indem die Versuche dazu noch nicht hinreichend discutirt sind, und ich die schliessliche Veröffentlichung derselben am liebsten Camerer selbst überlasse.

3) Die neuen Versuche Camerer's nach Ri, welche in dieser Abhandlung besprochen sind, geben überhaupt blos die Möglichkeit, die äquivalenten Distanzen auf Handgelenk und Stirn zu vergleichen. Halten wir uns aber supplementär mit an die älteren, so finden wir als Mittel der vier Bestimmungen, welche in der Tabelle S. 269 für Vola manus (Handteller), so wie für Spitze des linken Mittelfingers gegeben sind, $h = 0{,}1754$ auf Vola m., $= 0{,}8352$ auf Fingerspitze, also auf letzterer fünfmal so gross als auf ersterer. Aber nach Versuchen, die ich in letzten Tagen an mir selbst anstellte, finde ich vielmehr, wenn auf Finger als sog. A-Theil eine feste Distanz $= 10$ Mill. als Vergleichsmassstab für Handteller als sog. B-Theil angenommen wird, im Mittel von 8, nahe mit einander stimmenden, Ver-

suchen 13,09 Mill. Handteller mit jenen 10 Mill. Finger äquivalent, und wenn umgekehrt 13 Mill. Handteller als *A*-Werth zum Vergleich mit Finger dient, im Mittel von eben so viel Versuchen 10,09 Mill. Finger mit den 13 Mill. Handteller äquivalent.

4) Der Verdacht, dass das Auseinanderweichen der Resultate beider Methoden davon abhänge, dass bei den grösseren Distanzen der Methode Aeq andere Hauttheile von an sich geringerer Empfindlichkeit mit ins Spiel gezogen werden, als bei Ri, erledigt sich dadurch, dass man bei Vergleich der verschiedenen Abtheilungen der grösseren Distanzen unter sich nach Aeq keine Unterschiede findet, die auch nur annähernd hinreichen, jenes Auseinanderweichen der Resultate beider Methoden zu erklären.

Diese Versuche und Vergleiche können natürlich noch eine weitere Entwicklung finden, welche ihnen in der That zu wünschen ist.

Es entsteht nun die Frage, aus welchem Gesichtspuncte diese Verschiedenheit der Resultate beider Methoden zu fassen, und an welche von beiden man sich definitiv beim Vergleich der extensiven Empfindlichkeit der verschiedenen Hautstellen zu halten habe; worauf zunächst Folgendes aus allgemeinem Gesichtspuncte zu bemerken sein dürfte.

Nach näherer Ueberlegung kann es von vornherein nicht zu sehr auffallen, dass, da durch beide Methoden die Empfindlichkeit der Haut in sehr verschiedener Weise angesprochen und nach verschiedenen Leistungen beurtheilt wird, auch das Vergleichsmass derselben sich ändert. Es ist doch etwas Anderes, ob ein Hauttheil im Stande ist, unter dem Einflusse unbestimmbar einwirkender Zufälligkeiten eine Distanz öfter als solche zu erkennen, oder ob er sie unmittelbar grösser findet, als eine andere; und wennschon beide Eigenschaften zusammenhängen, ist damit doch nicht gesagt, dass die Masswerthe der einen unmittelbar auf die der anderen übertragen werden können; vielmehr wird es nöthig sein, die Masswerthe nach beiden Methoden für sich zu untersuchen, weil sie für verschiedene Leistungen zu gelten haben; und es ist zwar wahrscheinlich, doch noch nicht einmal entschieden, dass sie einander überall parallel gehen.

Kann man hienach s a c h l i c h die Resultate der einen Methode durch die der anderen weder ersetzbar noch verdrängbar halten, so

gestehe ich doch offen, dass ich aus formellen Gesichtspuncten den Resultaten der Methode der Aequivalente das grössere Interesse und Gewicht beilegen möchte, weil sich diese Methode auf eine einfachere Leistung der Empfindlichkeit, ja so zu sagen die einfachst mögliche, bezieht, in der Ausführung geringeren Schwierigkeiten unterliegt, und von manchen Fragen, welche die Ri-Methode compliciren, unabhängig ist. In der That, die Frage, ob wissentlich oder unwissentlich, die Frage, wie es mit den Zwischenfällen zwischen richtig und falsch zu halten, die Frage, welche Formel zur Repräsentation der Resultate vorzuziehen, u. s. w. fallen hier weg.

Dennoch thäte man Unrecht, die Methode Ri durch Aeq für antiquirt anzusehen. Denn der Methode Ri bleibt doch das eigenthümliche Interesse, dass sie die, durch Aeq zu erlangenden, Aequivalenzverhältnisse vergrössert wiedergiebt, wonach sie, wie ein Vergrösserungsglas, feinere Unterschiede der Empfindlichkeit erkennen lassen kann, als Aeq, und unstreitig steht sie eben hiedurch in näherer Beziehung zu der praktischen Verwendung des Tastorgans, bei der es ja nicht sowohl gilt, grössere auseinanderliegende Distanzen vergleichungsweise zu schätzen, als kleinste räumliche Unterschiede zu erkennen. In dieser Hinsicht schliesst sich die Methode Ri der Methode der Ebenmerklichkeit an, welche so zu sagen an ihrer Grenze auftritt; und, sieht man die bekannten Empfindlichkeitstabellen an, welche sich auf die Methode der Ebenmerklichkeit gründen, so scheint die Methode Ri sich auch in den Massverhältnissen mehr den Massverhältnissen dieser Methode, als denen von Aeq zu nähern. An einem genaueren Vergleiche freilich fehlt es noch in dieser Hinsicht.

Ausserdem kann man als äussere Nachtheile von Aeq gegen Ri geltend machen, dass erstere, weil auf grössere Distanzen angewiesen, leichter in Gebiete merklich verschiedener Empfindlichkeit mit Versuchen hineinreicht, die zur strengen Berechnung eine Gleichförmigkeit der Empfindlichkeit über die ganze in Anspruch genommene Strecke voraussetzen, und dass aus gleichem Grunde die Distanz auf der Haut, wegen Krümmung derselben, von der Distanz nach der Zirkelweite leichter in einem zu berücksichtigenden Grade abweichen kann. Wegen ersteren Umstandes ist jedenfalls für gewisse Zwecke eine Ergänzung der Aequivalenzversuche zwischen zwei Hauttheilen

durch Aequivalenzversuche zwischen den Abtheilungen der in Anspruch genommenen Strecken auf jedem Hauttheile insbesondere nöthig, und von besonderem Interesse wird es sein, die Raschheit der Aenderungen der Empfindlichkeit von verschiedenen Hautpuncten aus nach der Methode selbst zu verfolgen. Der zweite Umstand dürfte bei vielen Hauttheilen weniger fühlbar werden, wenn man die Zirkelweite vielmehr nach der Längsrichtung als Querrichtung des Gliedes nimmt; und auch hier wird es wieder von Interesse sein, nach der Methode selbst die Empfindlichkeit nach beiden auf einander senkrechten Richtungen an verschiedenen Hautstellen zu vergleichen, worüber bis jetzt noch so viel wie nichts vorliegt. Endlich kann noch bemerkt werden, dass die Methode Aeq sich durch die nöthige Elimination constanter Fehler complicirt, welche bei Ri keine Rolle spielen.

In letzterer Beziehung aber bedarf es bei der Methode Aeq gar mancher Rücksichten und Vorsichten, die von vornherein nicht auf der Hand liegen; und nachdem ich diese, bisher von anderen Seiten so gut als brach liegende*), Methode in früheren, bisher nicht veröffentlichten, Versuchen bis zu gewissen Grenzen verfolgt habe, und hoffe, dass sie künftig in weiteren Angriff genommen werden wird, will ich hier noch einigen Bemerkungen über die Ausführung derselben, zur Vervollständigung der schon in meinen »Elem.« darüber gemachten, Platz geben.

Mögen die zwei Hauttheile, deren Aequivalenz zu bestimmen, allgemein mit K, L, und eben so ihre äquivalenten Distanzen bezeichnet werden; dann kann man das Verhältniss derselben beliebig als $\frac{K}{L}$ oder umgekehrt als $\frac{L}{K}$ darstellen; wählen wir die erste Form, durch deren Umkehrung sich die zweite von selbst ergiebt. Beispielsweise mögen wir uns unter K Kinn, unter L Lippe (Oberlippe über dem rothen Mundtheil) vorstellen, wofür die zwei, schliesslich beispielsweise anzuführenden, Versuchsreihen (von Grabau und Koch) gelten.

*) In der That liegen ausser den noch sehr einfachen Versuchen von E. H. Weber nach der Methode der Aequivalente über die Empfindlichkeit verschiedener Hauttheile für den Druck durch aufgelegte Gewichte, meines Wissens bisher keine anderen nach dieser Methode vor. Die betreffenden Versuche Weber's sind enthalten in einer Sammlung seiner Programme unter dem Titel: Programmata collecta 1851. Lipsiae, apud C. F. Koehler. p. 98 ff.

Unmittelbar erhält man durch die Versuche, wie sie auch angestellt werden mögen, das Verhältniss $\frac{K}{L}$ noch mit constanten Fehlern behaftet, oder, wie wir kurz sagen mögen, als rohes Verhältniss; und es besteht also bemerktermassen die Aufgabe, es durch Elimination der constanten Fehler rein darzustellen. Hiezu sind dieselben, da sie sich nicht vermeiden lassen, mit entgegengesetzter Richtung so methodisch in die Versuche einzuführen, dass sie sich durch Zusammennehmen der gegensätzlich dadurch bestimmten Resultate compensiren. Das von constanten Fehlern befreite Verhältniss $\frac{K}{L}$ bezeichnen wir als gesuchtes mit x. Hienach gestaltet sich die einzuschlagende Methode so:

1) Man grenzt, beispielsweise zuerst auf Kinn als sog. A-Theil, mittelst des sog. A-Zirkels eine Distanz a_k als gegeben ab, und sucht hiezu auf L als B-Theil mittelst eines anderen gleichen Zirkels, des sog. B-Zirkels, die äquivalente Distanz als diejenige, welche auf L der A-Distanz a_k auf K gleich erscheint, indem man unter wiederholter Zwischenaufsetzung des A-Zirkels auf K die Spannweite das B-Zirkels auf L so lange abändert, bis das Gefühl der Gleichheit möglichst sicher erreicht ist. Diesen Versuch mit der gegebenen A-Distanz auf K treibt man wiederholt, sagen wir n-mal, bis zu demselben Puncte, zweckmässig dabei abwechselnd mit einer zu grossen und zu kleinen B-Distanz anfangend, und erhält so zu dem stets gleich bleibenden a_k auf K eine Reihe äquivalent erscheinender Distanzen, die sich nach Zufälligkeiten etwas unterscheiden. Sie mögen allgemein mit $\mathfrak{l}$, und ihr arithmetisches Mittel $\frac{\Sigma \mathfrak{l}}{n}$ mit l bezeichnet werden.

Wesentlich kommt hiebei in Rücksicht, dass, so wie eine einzige Distanz um etwas vergrössert oder verkleinert werden kann, ohne dass man den Unterschied spürt, so lange er die Unterschiedsschwelle nicht erreicht, auch das Verhältniss zwischen zwei Distanzen in gewissen Grenzen schwanken kann, ohne dass das Gleichheitsgefühl verloren geht, wenn nur nicht eine gewisse Grenze, eine Schwelle der Aequivalenz, überschritten wird. Als die wahre Aequivalenz ist das Mittel aus allen möglichen Verhältnissen innerhalb der Schwelle der Aequivalenz anzusehen; dieser wahren Aequivalenz aber nähert man sich nach Zufälligkeiten bald von dieser, bald von jener Seite

bei den Einstellungen auf Gleichheit. Abgesehen hievon kann aber auch das Gefühl der Gleichheit zwischen zwei Distanzen durch Zufälligkeiten, welche die wesentliche Aequivalenz der Hautstellen nichts angehen, Einbildungsfehler, Contrasteindrücke u. s. w., wie solche auch bei der Ri-Methode vorkommen (S. 189), mitbestimmt, und dadurch die Schwelle scheinbar bald nach einer, bald nach der anderen Seite verrückt werden, diess aber im Mittel vieler Versuche sich ausgleichen.

2) Da eben so gut L als K die A-Distanz abgeben kann, so kehrt man das Verfahren um, indem man, in eben so viel Versuchen n als unter 1), zu einer fest angenommenen A-Distanz auf L, welche a_l heisse, die äquivalenten B-Distanzen $\mathfrak{k}$ auf K sucht, deren arithmetisches Mittel $k = \frac{\Sigma \mathfrak{k}}{n}$ sei.

Die Versuche 1) und 2) zur Erlangung von l und k haben einzeln oder in Abtheilungen von mehreren Versuchen jeder Seite mit einander abzuwechseln.

Nachdem die Wahl der festen A-Distanz a_k auf K willkürlich gewesen ist, kann die Wahl des Werthes a_l, der als feste A-Distanz auf L zu dienen hat, in doppelter, als G_1 und G_2 zu unterscheidender, Weise geschehen. Nach G_1 nimmt man a_l dem a_k gleich, und braucht dann den gemeinsamen Namen a dafür. Nach G_2 nimmt man a_l dem, durch vorgängig mit a_k angestellte, Versuche oder durch die ersten Versuche der Gesammtreihe selbst bestimmten, l gleich oder doch nahe gleich, indem man dieses dazu nur auf eine ganze Zahl abrundet. Principiell dürften beide Wege zum Zweck führen; auch bin ich verschiedentlich nach dem einen und anderen verfahren (so nach G_2 in dem S. 275 angeführten Vergleich zwischen Finger und Handteller), ohne aber vergleichende Versuche über einen etwaigen sachlichen Vorzug des einen vor dem anderen angestellt zu haben. In formeller Hinsicht wird jedenfalls der Weg G_1 vorzuziehen sein, da er gewisse Rechnungsvortheile gewährt; die nächstfolgenden Betrachtungen aber sind auf G_1 und G_2 gleich anwendbar.

Ich habe die Methode hier beschrieben, wie sie von mir selbst und nach meinen Angaben von einigen meiner Zuhörer ausgeführt worden ist. Aus den, mir von Camerer gemachten, Mittheilungen ersehe ich aber, dass er sie mit einer gewissen Abweichung davon

ausgeführt hat. Ich selbst komme, wie gesagt, im Ausgange von einer unbestimmt zu grossen oder zu kleinen *B*-Distanz im Allgemeinen erst durch mehrfach wiederholtes Hin- und Wiederändern der *B*-Distanz zwischen zu gross, zu klein und unsicher auf die definitive Einstellung »möglichst sicher«, bei der ich mich beruhige. Camerer aber kommt von der erst zu gross oder zu klein genommenen *B*-Distanz, ohne wiederholtes Hin und Her, durch successive Abänderungen in einer und derselben Richtung auf einen Punct, wo das Gefühl der Gleichheit zuerst eintritt, den er notirt, und bemerkt ausdrücklich, dass er dabei nur ausnahmsweise über das Ziel nach entgegengesetzter Richtung hinauskomme, so dass ein Rückgang nöthig werde. Natürlich, dass bei Wiederholung der Versuche eben so oft mit einer zu grossen als zu kleinen *B*-Distanz begonnen und schliesslich das Mittel aus den dabei erhaltenen Einstellungen genommen wird.

Ohne sicher entscheiden zu können, welches von beiden Verfahren vortheilhafter ist, vermuthe ich doch, dass es das Camerer'sche ist. Allerdings kann man wohl darauf rechnen, dass nach meinem Verfahren die definitive Einstellung nach mehrfachem Hin und Her bei dem möglichst entschiedenen Gleichheitsgefühl, was ich anstrebe, der wahren Aequivalenz, als dem Mittel der unter der Aequivalenzschwelle begriffenen Werthen, näher kommt, als nach Camerer's Verfahren die Einstellung bei derjenigen Distanz, bei welcher das Gefühl der Aequivalenz zuerst eintritt, wenn man von der einen oder anderen Seite in einfacher Richtung nach der Mitte vorgeht; diese Einstellungen werden sich voraussetzlich im Durchschnitt mehr als jene den Schwellengrenzen nähern; aber man wird in derselben Zeit mehr Bestimmungen nach Camerer's Verfahren als nach meinem Verfahren erhalten, und erwarten können, dass durch Mittelziehung aus den Resultaten beider Seiten eine Compensation der Einseitigkeit einer jeden entstehe. Im Ganzen erscheint das Camerer'sche Verfahren doch methodischer, und rechtfertigt sich vollends durch die gut in sich stimmenden Resultate der mir von Camerer mitgetheilten Versuchsreihe.

Mag man nun mein oder Camerer's Verfahren befolgen, so hat man, wenn man Kinn immer in den Zähler stellt, durch die

Versuche 1) die Aequivalenz $\frac{a_k}{l}$, durch die Versuche 2) die Aequivalenz $\frac{k}{a_l}$ erhalten. Beide unterscheiden sich im Allgemeinen etwas, indem der Umstand, dass erstenfalls die festgegebene A-Distanz auf Kinn, andernfalls auf Lippe genommen wird, um die Einstellung der anderen, so zu sagen beweglichen, Distanz danach zu richten, jederseits einen constanten Fehler einführt, der durch die Mittelziehung aus den noch rohen Werthen $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$ zu eliminiren ist. Ich werde diesen Fehler den Hauptfehler oder p-Fehler nennen, und als Verhältnissfehler von x mit p oder $\frac{1}{p}$ bezeichnen, je nachdem K oder L die A-Distanz abgiebt, indem er beidesfalls eine entgegengesetzte Richtung hat.

Hienach kann mit der Elimination zugleich die Bestimmung von p, womit natürlich $\frac{1}{p}$ von selbst gegeben ist, durch Ansatz folgender Gleichungen geschehen:

$$\frac{a_k}{l} = px\,, \qquad \frac{k}{a_l} = \frac{x}{p}$$

oder gleichgeltend:

$$x = \frac{a_k}{pl} = \frac{pk}{a_l}.$$

Durch Verhältnissmittelziehung aus den beiden Werthen von x, d. i. Wurzelausziehung aus ihrem Producte, eliminirt sich p und erhält man das reine $x = \sqrt{\frac{a_k}{l} \cdot \frac{k}{a_l}}$. Anderseits erhält man durch Division von $\frac{a_k}{l}$ mit $\frac{k}{a_l}$ und Wurzelausziehung $p = \sqrt{\frac{a_k}{k} \cdot \frac{a_l}{l}}$.

Die vorigen Formeln gelten gleich für das Verfahren G_1 und G_2, vereinfachen sich aber, wenn wir G_1 vorziehen, wo a_k und a_l mit gleichen Werthen unter der gleichen Bezeichnung a auftreten, indem wir dann haben:

$$x = \sqrt{\frac{k}{l}}\,, \qquad p = \frac{a}{\sqrt{kl}}.$$

Die vorigen Bestimmungen würden von Rechnungsseite genügen, wenn wir blos mit dem vorigen constanten Fehler zu thun hätten; es giebt aber ausserdem noch andere, die sich mit dem vorigen und unter einander compliciren, wodurch verschiedene Combinationen constanter Fehler entstehen. Jeder dieser Fehler wird eben so wie

der vorige seine besondere Bezeichnung erhalten, und im Ausdruck der ganzen Combination je nach seiner gegensätzlichen Richtung die Stellung oben als Multiplicator oder unten als Divisor einnehmen; und ich nenne hienach g e g e n s ä t z l i c h je zwei Combinationen, in deren einer alle constanten Fehler die entgegengesetzte Richtung als in der anderen haben, so dass in der einen alle Fehler, die im Ausdruck der einen oben stehen, in dem der anderen unten stehen.

So spreche ich von einem Z e i t f e h l e r und bezeichne ihn mit ξ oder $\frac{1}{\xi}$, je nachdem beim Aequivalenzversuche z u e r s t K oder L in den Versuch genommen wird. Diess giebt mit p und $\frac{1}{p}$ die vier Combinationen:

$$1)\ p\xi\ ;\quad 2)\ \frac{p}{\xi}\ ;\quad 3)\ \frac{1}{p\xi}\ ;\quad 4)\ \frac{\xi}{p}\,.$$

In der ersten tritt nach der Bedeutung von p Kinn als A-Distanz auf und geht nach der Bedeutung von ξ die Application des Zirkels auf Kinn der Application auf Lippe voran. In der zweiten findet der erste Umstand statt, aber die Application auf Lippe geht voran, u. s. f. 1) und 3) sind gegensätzliche Combinationen, eben so 2) und 4).

Sei nun C überhaupt eine bestimmte Combination constanter Fehler und $\frac{1}{C}$ die entgegengesetzte, so wird man in den obigen einfachen Formeln, wo wir blos mit p und $\frac{1}{p}$ zu thun hatten, C und $\frac{1}{C}$ statt p und $\frac{1}{p}$ einzusetzen haben, um sowohl zur Elimination als Bestimmung der betreffenden Combination zu gelangen. Und zwar wird die Elimination nach dem, im Ganzen vorzuziehenden, G_1-Verfahren stattfinden, wenn wir das mit einer gegebenen Fehlercombination behaftete k durch das mit der entgegengesetzten Combination behaftete l dividiren und die Wurzel ausziehen. Nun haben wir im obigen Beispiel zweier constanten Fehler p und ξ zwei Paar gegensätzlicher Combinationen, erstens 1) und 3), zweitens 2) und 4) gefunden, und erhalten dadurch zwei Bestimmungen von x, die sich nach Zufälligkeiten etwas unterscheiden, aber, wenn die Versuche gut sind, nur wenig unterscheiden dürfen, und aus denen das Mittel zu ziehen ist. Hätten wir noch mehr constante Fehler, so könnten wir, da sie noch mehr Paare entgegengesetzter Combi-

nationen hergeben, auch noch mehr Bestimmungen von x dadurch erhalten, die sich zur definitiven Mittelziehung darbieten.

Was andererseits die Bestimmung irgend einer Combination constanter Fehler anlangt, so wird man sie nach denselben Principien unter Voraussetzung von G_1 erhalten, wenn wir in der Formel $p = \frac{a}{\sqrt{kl}}\ p$ durch C und k, l durch die mit entgegengesetzten Combinationen behafteten Werthe derselben ersetzen. Haben wir aber die Werthe für die Combinationen gefunden, so lassen sich, allgemein gesprochen, auch die einzelnen Elemente, d. h. einzelnen constanten Fehler, daraus isoliren, so p durch Wurzelausziehung aus dem Product von 1) und 2), ξ durch Division von 4) durch 1) und Wurzelausziehung.

Diese Regeln werden sich durch die Anwendung, welche davon in den zuletzt anzuführenden Versuchsreihen gemacht werden wird, um so besser erläutern. Es sind aber dazu noch folgende Bemerkungen zu fügen.

In jedem Falle gilt es, in der rechnenden Behandlung der Methode mehrfache Mittelbestimmungen vorzunehmen, einmal die Mittelbestimmungen zwischen den $\mathfrak{l}$ so wie $\mathfrak{k}$, um l und k daraus zu gewinnen, dann die Mittelbestimmung zwischen $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$, um den constanten Hauptfehler p wegen der Einseitigkeit der Vergleichsrichtung zu eliminiren; und, sofern noch andere constante Fehler zu eliminiren, die Mittelbestimmung zwischen den Werthen, die dem Gegensatz derselben zugehören; endlich, im Falle der Zuziehung von mehreren Beobachtern, die Mittelziehung zwischen deren Resultaten. Es kann aber ein Mittel als arithmetisches oder als geometrisches genommen werden*), welches letztere ich, insofern es aus Verhältnisswerthen gezogen wird, selbst Verhältnissmittel nenne. Und es fragt sich nun, von welchem beider Mittel vorzugsweise vor dem anderen bei den Rechnungen, wozu unsere Methode Anlass giebt, Gebrauch zu machen.

*) Letzteres bekanntlich, wenn es aus n Werthen a, b, c gezogen werden soll, durch:

$$\sqrt[n]{abc\cdots}$$

darzustellen und logarithmisch als Zahl zu der mit n dividirten Summe der Logarithmen der Werthe a, b, c · · · zu erhalten.

In dieser Beziehung gilt nun im Allgemeinen, dass das geometrische Mittel zwar überall kleiner als das arithmetische Mittel, der Unterschied beider aber um so kleiner ist, je näher sich die Werthe stehen, aus denen die Mittelziehung geschieht, so dass er bei einander sehr nahe stehenden Werthen vernachlässigt werden kann, insofern er zu vernachlässigende Decimalen betrifft. Und so wird auch, insofern es sich bei unserer Methode allgemeingesprochen immer um Mittelziehung aus einander sehr nahe stehenden Werthen handelt, merklich gleichgültig das arithmetische oder geometrische Mittel dienen können. Principiell aber ist in Betreff der Anwendung beider Folgendes zu bemerken.

Die arithmetische Mittelziehung aus den $\mathfrak{l}$ so wie $\mathfrak{k}$, um zu l und k und von hier aus zu $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$ zu gelangen, aus denen x als definitives Mittel hervorgeht, ist nicht nur die bequemste, sondern auch principiell die richtige. Denn um die wahrscheinlichsten Werthe von $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$ zu erlangen, müssen die wahrscheinlichsten Werthe von l und k gefunden sein; diese aber sind nach der Methode der kleinsten Quadrate nur als arithmetisches Mittel zu erhalten, wie sich in folgender Einschaltung ausführt.

In der That, unterscheiden wir die einzelnen $\mathfrak{k}$ so wie $\mathfrak{l}$, aus denen die mittleren Werthe k und l zu gewinnen, durch Indices 1, 2 . . . u. s. w., und nennen, um uns zunächt mit k zu beschäftigen, unter Ersatz von a_l durch a, die einzelnen Verhältnisse $\frac{\mathfrak{k}_1}{a}$, $\frac{\mathfrak{k}_2}{a}$ u. s. w., woraus der wahrscheinlichste Werth des Verhältnisses $\frac{k}{a}$ zu erhalten, respective y_1, y_2 u. s. w. Ihre Zahl sei n, und der wahrscheinlichste Werth von $\frac{k}{a}$ heisse y.*)

Nun sind die Werthe $\mathfrak{k}$ beobachtet, die a aber gegeben, folglich für Anwendung der Methode der kleinsten Qu. die Gleichungen so anzusetzen:

$$ay_1 = \mathfrak{k}_1$$
$$ay_2 = \mathfrak{k}_2 \text{ u. s. w.}$$

was nach bekannten Regeln, mit Rücksicht, dass a constant, dass $\Sigma\mathfrak{k} = nk$ und $\Sigma a = na$ ist, giebt:

$$y = \frac{\Sigma a\mathfrak{k}}{\Sigma a^2} = \frac{a\Sigma\mathfrak{k}}{a\Sigma a} = \frac{\Sigma\mathfrak{k}}{\Sigma a} = \frac{nk}{na} = \frac{k}{a},$$

*) Nicht mit x zu verwechseln, welches frei von dem constanten Fehler ist, mit welchem y, als nur einseitig bestimmt, noch behaftet ist.

wonach wir den wahrscheinlichsten Werth von $y = \frac{k}{a}$ erhalten, wenn wir sei es die Summe der n veränderlichen $\mathfrak{k}$ durch die Summe der n constanten a oder das mittlere k mit dem einfachen a dividiren.

Um andererseits zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes von $\frac{a}{l}$, welcher v heisse, zu gelangen, reicht es hin, den wahrscheinlichsten Werth des reciproken Verhältnisses, welcher u heisse, bestimmt zu haben, wonach $v = \frac{1}{u}$ sein wird. Hiezu hat man, da $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ u. s. w. beobachtet sind, indess a gegeben ist, den Ansatz:

$$au_1 = \mathfrak{l}_1$$
$$au_2 = \mathfrak{l}_2 \text{ u. s. w.},$$

mithin nach ganz entsprechender Herleitung als vorhin den wahrscheinlichsten Werth:

$$u = \frac{\Sigma a\mathfrak{l}}{\Sigma a^2} = \frac{l}{a},$$

mithin:

$$v = \frac{a}{l}.$$

Um den wahrscheinlichen Fehler der Bestimmung von k, heisse er w_k, zu erhalten, nimmt man die Abweichungen der einzelnen $\mathfrak{k}$ von ihrem Mittel k, mögen sie ε heissen, und sei n die Zahl der $\mathfrak{k}$, dann hat man:

$$w_k = 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon^2}{n(n-1)}}.$$

Entsprechend bestimmt man w_l als den wahrscheinlichen Fehler von l, indem man als ε die Abweichungen der einzelnen $\mathfrak{l}$ von l nimmt. Den wahrscheinlichen Fehler von $\frac{k}{a}$ und $\frac{l}{a}$ erhält man, indem man w_k sowie w_l mit a dividirt.

Was dagegen die definitive Mittelziehung aus $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$ betrifft, um den in sie eingehenden constanten Fehler zu eliminiren — das Entsprechende aber gilt allgemein für die Elimination aller constanten Fehler aus Verhältnissbestimmungen und lässt sich auf die Zusammensetzung von mehreren derselben übertragen — so erscheint es principiell überhaupt unstatthaft, aus Verhältnissen, die sich beliebig umkehren lassen, arithmetische Mittel zu ziehen, weil man durch diese Mittelziehung zu einem verschiedenen Resultat gelangt, je nachdem man sie aus den directen Werthen $\frac{a_k}{l}$ und $\frac{k}{a_l}$, oder den reciproken Werthen $\frac{l}{a_k}$ und $\frac{a_l}{k}$ vornimmt, indem man nämlich zweitenfalls nicht, wie es doch sein sollte, den reciproken Werth des ersten Mittels

erhält, wovon man sich leicht an beliebigen selbst gewählten Beispielen von Verhältnissen, sagen wir z. B. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, überzeugen kann*). Wo freilich die Verhältnisse, aus denen das Mittel zu ziehen, wenig von einander abweichen, weicht auch das aus den directen Verhältnissen erhaltene arithmetische Mittel wenig von dem (sog. harmonischen) Mittel ab, was man durch Umkehr des aus den reciproken Verhältnissen erhaltenen erzielt, und kann der Unterschied beider von einander so wie vom Verhältnissmittel zu vernachlässigen sein. Letzteres Mittel ist aber überhaupt vom betreffenden Uebelstande frei, und da es nicht viel mehr Mühe kostet, es aus zwei Verhältnissen zu ziehen als das arithmetische Mittel, so scheint es mir hier überall vorzuziehen, wonach man das definitive Mittel als frei vom constanten Fehler nicht $= \frac{\frac{a_k}{l} + \frac{k}{a_l}}{2}$, sondern $= \sqrt{\frac{a_k}{l} \cdot \frac{k}{a_l}}$ zu nehmen hat.

Haben verschiedene Beobachter unter vergleichbaren Umständen beobachtet, so wird man nach Analogie des doppelten Verfahrens, R-Verfahren, T-Verfahren, welches nach S. 230 bei der Methode Ri anwendbar ist, auch bei Aeq ein doppeltes Verfahren anwenden können, und allgemeingesprochen eben so wenig einen erheblichen Unterschied zwischen den Resultaten beider Verfahren hier wie da finden. Insofern man nicht erwarten kann, dass die Aequivalenzverhältnisse der verschiedenen Beobachter gleich sind, würde principiell hier wie da das dem T-Verfahren analoge Verfahren vorzuziehen sein, um reine Mittelwerthe zwischen den Aequivalenzen der verschiedenen Beobachter zu erhalten; es wird aber auch hier wie da nicht leicht Anlass sein, das praktisch vortheilhaftere Ver-

*) Auch bei der Mittelziehung aus den $\frac{\mathfrak{k}_1}{a_l}$, $\frac{\mathfrak{k}_2}{a_l}$ u. s. w., um zu $\frac{k}{a_l}$ zu gelangen, würde man durch Umkehr der Verhältnisse in $\frac{a_l}{\mathfrak{k}_1}$, $\frac{a_l}{\mathfrak{k}_2}$ u. s. w. und Mittelziehung daraus zu einem Verhältnisse gelangen, das nach seiner Umkehr dem vorigen nicht entspräche; aber die Willkür dieser Umkehr besteht hier nicht, weil nach dem Sinn der Versuche für die Bessimmung der zufällig abweichenden $\mathfrak{k}$ der feste Werth a_l als Vergleichsmassstab, nicht umgekehrt, unterliegt; wogegen von den definitiv gewonnenen Verhältnissen $\frac{a_k}{l}$, $\frac{k}{a_l}$ das eine eben so gut als das andere als Vergleichsmassstab für das andere dienen kann.

fahren, welches dem R-Verfahren analog ist, gegen das T-Verfahren aufzugeben.

Hienach fassen wir die, bei unserer Methode ausser dem Hauptfehler p etwa noch in Betracht zu ziehenden, constanten Fehler etwas näher ins Auge, mit deren Aufzählung jedoch nicht gesagt sein soll, dass alle diese Fehler von gleicher Bedeutung sind; ja aus den Beispielsreihen am Schluss wird sich durch die Rechnung selbst ergeben, dass sie es nicht sind, und mancher jedenfalls unter Umständen vernachlässigt werden könne, aber ob überall, bedarf erst noch weiterer Versuche. Auch kommen manche der folgends registrirten Fehler nur bei gewissen Versuchseinrichtungen in Rücksicht.

Zeitfehler oder ξ-Fehler entsteht bemerktermassen, je nachdem man den Zirkel bei Gewinnung des Aequivalents zuerst auf K, zuzweit auf L aufsetzt, oder umgekehrt verfährt. Bezeichnung erstenfalls mit ξ, zweitenfalls mit $\frac{1}{\xi}$. Dabei ist Folgendes zu bemerken: Wenn man, wie es am natürlichsten erscheint, den A-Zirkel, der die feste Distanz auf dem A-Theil giebt, sei dieser K oder L, immer zuerst applicirt, den B-Zirkel auf dem B-Theil immer zuzweit, um hienach die B-Distanz mit der A-Distanz zu vergleichen, so eliminirt sich mit dem Hauptfehler p der Zeitfehler zugleich, weil mit dem Wechsel von K und L als A-Theil, also Wechsel von p und $\frac{1}{p}$, immer zugleich der Wechsel von ξ und $\frac{1}{\xi}$ zusammentrifft, und so kann man sich dieses Verfahrens, was ich das u-Verfahren nennen will, recht wohl zu gleichzeitiger Elimination beider bedienen, wird dann aber auch den Hauptfehler und Zeitfehler nur in Verbindung als $p\xi$ bestimmen können. Will man beide gesondert bestimmen, so ist es nöthig, eben so oft als das u-Verfahren das umgekehrte Verfahren, was ich das v-Verfahren nennen will, zu befolgen, wo man nämlich die Application des B-Zirkels auf B der Application des A-Zirkels auf A vorausgehen lässt, was in der That wie folgt geschehen kann. Man applicirt zuerst die veränderliche B-Distanz mit irgend einem Werthe auf B, nachher die feste A-Distanz auf A, und sieht zu, ob diese mit jener stimmt, vergrössert oder verkleinert dann die B-Distanz je nach der Richtung der Abweichung, die man findet, sieht wieder zu, ob die nachher applicirte A-Distanz mit jener stimmt, und fährt so bis zum erreichten Ziele fort.

Handfehler oder λ-Fehler. Dieser entsteht, je nachdem man den Zirkel, sei es als A-Zirkel oder B-Zirkel, auf K mit der Linken, auf L mit der Rechten aufsetzt, oder umgekehrt verfährt. Bezeichnung erstenfalls mit λ, zweitenfalls mit $\frac{1}{\lambda}$.

Diesen Fehler zu berücksichtigen, kann man durch die Besorgniss veranlasst werden, dass je nach Anwendung der Linken oder Rechten die Applicationsweise des Zirkels unwillkürlich eine etwas verschiedene werden kann; und, wenn man die Versuche an sich selbst anstellt, kann hiezu noch die Besorgniss treten, dass man je nach Anwendung der Linken oder Rechten durch eine Art Association geneigt sein kann, die Distanz verschieden aufzufassen. Haben wir doch bei den Versuchen nach Ri gesehen, dass die Einbildung bei der Distanzschätzung eine Rolle mitspielt.

χ-Fehler, kommt bei den später anzuführenden Versuchsreihen (Grabau, Koch) in folgender Weise in Rücksicht. An jedem Versuchstage sind zwei gegensätzliche Combinationen als wie $p\xi\lambda$ und $\frac{1}{p\xi\lambda}$, oder $\frac{p\xi}{\lambda}$ und $\frac{\lambda}{p\xi}$ u. s. w., mit einer gleichen Anzahl von Versuchen unmittelbar hinter einander geprüft. Aber es fragt sich, ob es gleichgültig ist, die eine oder andere beider Combinationen vorausgehen zu lassen, da die spätere einen Einfluss durch die vorausgehende erfahren, dieser aber je nach Beschaffenheit der vorausgehenden Combination verschieden sein könnte; und es ist also zur Ermöglichung der Elimination gleich oft damit zu wechseln. Wenn man nun in dem Falle, wo die Combination mit Kinn als A-Distanz vorausgeht, mithin p oben steht, dem betreffenden Fehler χ auch die Stellung oben giebt, so wird man ihm im entgegengesetzten Falle, wo die Combination mit Lippe als A-Distanz vorausgeht, mithin p unten steht, auch die Stellung unten geben müssen; und es wird also p und χ immer in Zusammenhang oben und unten auftreten, also auch $p\chi$ sich in Zusammenhang eliminiren und nur in Zusammenhang bestimmen lassen.

Der α-Fehler. Dieser kommt blos in Betracht, wenn in derselben Versuchsreihe zwei verschiedene A-Distanzen auf K so wie auf L angewendet werden, um zu ermitteln, ob das Aequivalenzverhältniss bei kleinen und grossen A-Distanzen gleich bleibt. Seien z. B. die beiden A-Distanzen sowohl auf K als L gleich 10 Lin. und

20 Lin., und wechseln die Versuche mit 10 Lin. und 20 Lin. so, dass ein möglicher Einfluss der einen auf die anderen stattfindet; bezeichnen wir ferner das Verfahren, wo die Versuche mit der kleinen Distanz vorausgehen, mit *a*), das gegentheilige mit *b*), so wird das *a*-Verfahren sowohl angewendet werden können, wenn *k* als veränderliche *B*-Distanz, auf die ein Einfluss von den vorhergehenden Versuchen stattfinden kann, diesen nachfolgt, als wenn *l* als veränderliche *B*-Distanz folgt. Dieser Einfluss wird, insofern er von derselben Art Folgewirkung auf *k* und *l* abhängt, auch auf *k* und *l* dieselbe, hiemit auf das Verhältniss x die entgegengesetzte Richtung haben. Geben wir nun dem Fehler in dem Falle, dass die Versuche mit $L = l$, also mit $K = a_k$ folgen, die Bezeichnung α, so werden wir ihm in dem Falle, dass die Versuche mit K als k, mithin L als a_l vorausgehen, die entgegengesetzte Bezeichnung $\frac{1}{\alpha}$ geben müssen. Gehen aber nach dem *b*-Verfahren die Versuche mit den grösseren Distanzen voran, so werden sich die Verhältnisse wieder umkehren und man also überhaupt haben:

α	bei	*a*)	wenn	l,	mithin	a_k	folgt
α	-	*b*)	-	k	-	a_l	-
$\frac{1}{\alpha}$	-	*a*)	-	k	-	a_l	-
$\frac{1}{\alpha}$	-	*b*)	-	l	-	a_k	-

Die vorigen constanten Fehler kommen in gleicher Weise in Rücksicht bei dem Verfahren, wie ich es selbst eingehalten habe, und wie es Camerer eingehalten hat. Hiezu treten aber noch bei dem Camerer'schen Verfahren zwei constante Fehler, die ich als β-Fehler und γ-Fehler bezeichne, der erste bezüglich darauf, ob der Ausgang bei Bestimmung der *B*-Distanz von einer zu grossen Distanz nach $\bigwedge$ oder zu kleinen Distanz nach $\bigvee$ genommen wird; der zweite darauf, ob Versuche nach $\bigwedge$ denen nach $\bigvee$ oder umgekehrt vorausgehen.

β-Fehler. Camerer bezeichnet die Versuche, wo bei Bestimmung des Aequivalents von einer zu grossen *B*-Distanz, sei es *k* oder *l*, ausgegangen wird, mit $\bigwedge$, die, wo von einer zu kleinen Distanz ausgegangen wird, mit $\bigvee$. Bezeichnet man nun den Fehler, der begangen wird, wenn bei $\bigvee$ die veränderliche Distanz auf Kinn,

mithin $K = k$, $L = a_l$ ist, wobei zugleich der Hauptfehler $\frac{1}{p}$ ist, mit β, so hat man überhaupt:

1) β bei $\vee$, wenn $K = k$, mithin $L = a_l$ d. i. bei $\frac{1}{p}$

2) β - $\wedge$ - $L = l$ - $K = a_k$ - - - p

3) $\frac{1}{\beta}$ - $\wedge$ - $K = k$ - $L = a_l$ - - - $\frac{1}{p}$

4) $\frac{1}{\beta}$ - $\vee$ - $L = l$ - $K = a_k$ - - - p.

In der That haben $\vee$ und $\wedge$ einen entgegengesetzten Einfluss auf die B-Distanz, welche zur betreffenden A-Distanz gehört, hiemit auf x, wonach, wenn man von β bei 1) ausgeht, $\frac{1}{\beta}$ bei 3) daraus von selbst folgt. Andererseits sind 1) und 4) so wie 2) und 3) bei gleichem $\vee$ oder $\wedge$ entgegengesetzt in Bezug auf die B-Distanz und kehren sich daher in 1) und 4) so wie 2) und 3) die Verhältnisse bezüglich x um.

Auch bei meinem Verfahren kann es nützlich sein, diesen Fehler zu berücksichtigen; doch geht wenigstens voraussetzlich bei dem wiederholten Hin und Wieder vor der definitiven Einstellung die Beziehung auf den ersten Ausgang merklich verloren, und gestehe ich, daher auf diesen Fehler keine besondere Rücksicht genommen zu haben.

Der γ-Fehler. Je nachdem $\wedge$ oder $\vee$ folgt oder umgekehrt, kann der Fehler, den der vorige Einfluss äussert, sich vermehren oder vermindern, und man hätte daher in Versuchen, welche so zusammenhängen, dass die Folgerichtung zwischen $\wedge$ und $\vee$ einen Einfluss äussern kann, sowohl β als $\frac{1}{\beta}$ noch mit γ oder $\frac{1}{\gamma}$ zu multipliciren, je nachdem $\wedge$ oder $\vee$ vorangeht. Um aber nicht Darstellung und Rechnung zu sehr zu compliciren, kann man auch wohl die Umkehr der Folge von Versuch zu Versuch oder nach je zwei oder drei Versuchen vornehmen, und dann in Zusammennahme der gesammten Versuche die Elimination dieses Fehlers als von selbst vollzogen voraussetzen.

Hienach noch einige allgemeine Bemerkungen.

Ein System von Versuchen, in welchem nicht nur alle in Betracht kommenden Fehler eliminirt, sondern auch diese besonders bestimmt werden sollen, nimmt durch die Menge von Combinationen,

die dazu zuzuziehen sind, nothwendig einen grossen Umfang an, und schon, um das Hautorgan nicht zu sehr durch viele hinter einander angestellte Versuche zu reizen, wird es dann nöthig, die Versuche auf eine Reihe von Tagen systematisch zu vertheilen, so dass alle Tage und alle gegensätzlichen Combinationen mit einer gleichen Anzahl von Versuchen bedacht werden; und hiezu ist es zweckmässig, vor Beginn der Versuche einen Plan aufzuzeichnen, um sich nicht später zu verwirren.

Da indess für den Hauptzweck der Methode, d. i. die Reindarstellung des x, nur die Elimination, nicht die Bestimmung der constanten Fehler wesentlich ist, so ist die Bemerkung wichtig, dass man schon mit zwei gegensätzlichen Combinationen auskommen kann, da sie zur Elimination nach gegebenen Principien hinreichen, wobei man nur eben darauf verzichtet, die constanten Fehler selbst aus diesen Combinationen isoliren zu können, indem sich solchergestalt nur die ungetrennten Combinationen selbst bestimmen lassen. Inzwischen wird es immer nützlich sein, mehrere Paare gegensätzlicher Combinationen zu einer mehrfachen Bestimmung von x zuzuziehen, um zu sehen, wiefern die verschiedenen Bestimmungen desselben mit einander stimmen, und dadurch eine grössere Sicherheit dafür zu gewinnen.

In jedem Falle aber müssen alle constanten Fehler, die sachlich bei den Versuchen ins Spiel kommen, auch in den Versuchen durch gegensätzliches Vorkommen so berücksichtigt werden, dass sie, auch ohne besondere Rechnung desshalb, sich von selbst eliminiren, wenn man die gesammten Versuche der ganzen Reihe erforderlich dazu zusammennimmt.

Da durch eine längere Fortsetzung der Versuche das Aequivalenzverhältniss derselben sich ändern kann, so wird man Versuche mit entgegengesetzten Combinationen, die zur Elimination constanter Fehler zusammenzunehmen sind, nicht aus entlegenen Theilen der Versuchsreihe zusammenzunehmen zu haben, sofern das dabei als constant vorauszusetzende x sich geändert haben könnte, und wird überhaupt auf die Veränderlichkeit dieses Verhältnisses durch einen sog. Uebungseinfluss Rücksicht zu nehmen haben. Doch lassen die nachher anzuführenden Beispielsreihen schliessen, dass dieser anfangs sehr spürbare Einfluss im Fortschritt der Versuche einer Grenze entgegengeht.

Allgemein wird man sich nach jeder Reihe von Versuchen mit derselben A-Distanz auf einem gegebenen Theile, um die wechselnden B-Distanzen dazu zu gewinnen, zu überzeugen haben, dass die A-Distanz wirklich im Laufe der Versuche dieselbe verblieben ist, und nicht durch die Manipulation mit dem A-Zirkel eine Veränderung erlitten habe.

Von besonderer Wichtigkeit ist es, dass man, sei es bei den Versuchen selbst oder in der Bezeichnung derselben, nicht eine Combination mit der anderen verwechsele, was ein ganzes grosses Versuchssystem in Unordnung bringen oder unbrauchbar machen kann. Wonach es auch zweckmässig sein kann, sich bei Bezeichnung der Versuchsumstände nicht blos der obigen abstracten Zeichen zu bedienen, die sich doch für die Berechnung nicht entbehren lassen, sondern für jede Abtheilung der Versuche, in welchen besondere Umstände eingehalten werden, diese auch besonders mit Worten zu bezeichnen.

Noch will ich bemerken, dass zu meinen Versuchen nach der Methode der Aequivalente besonders dazu bestimmte gestielte und bei den Versuchen am Stiel gefasste Zirkel mit sehr langen Schenkeln gedient haben, um deren verschiedene Schiefe gegen die Haut bei den kleineren und grösseren Distanzen möglichst unschädlich zu machen. Die Stiele aber waren in der Besorgniss angebracht, dass das Fassen der Zirkel an den mehr oder weniger divergirenden Schenkeln bei Versuchen, die man an sich selbst anstellt, einen Einfluss auf das Urtheil über die Distanz haben könnte, was doch wahrscheinlich eine überflüssige Vorsicht ist, worüber sich durch vergleichende Versuche entscheiden lassen würde.

Ausser der Hauptaufgabe, der Bestimmung des reinen x, wird man sich noch verschiedene Nebenaufgaben, wie namentlich folgende stellen können:

1) Die Verhältnisse der constanten Fehler werden noch näher zu untersuchen sein, und namentlich bei verschiedenen Personen und unter verschiedenen Umständen zu ermitteln sein, inwiefern von den oben aufgezählten constanten Fehlern die einen oder anderen als merklich verschwindend ausser Acht gelassen werden können.

2) Da in den einzelnen Versuchen das gefundene Aequivalenz-

verhältniss durch Zufälligkeiten variirt, so werden die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von den mittleren Bestimmungen genommen werden können, um nach der Summe oder dem Mittel dieser Abweichungen (noch besser ihrer Quadrate) die grössere oder geringere Sicherheit der Aequivalenzbestimmung selbst beurtheilen zu können.

3) Es hat sich gezeigt, dass bei länger hinter einander fortgesetzten Versuchen an denselben Hauttheilen nicht nur das Aequivalenzverhältniss selbst, sondern auch der nach 2) zu erhaltende mittlere Aequivalenzfehler sich durch einen, folgends als Uebungseinfluss zu bezeichnenden, Einfluss der Wiederholung mehr oder weniger ändern kann. Die Verhältnisse dieser Aenderungen werden bei verschiedenen Personen und unter verschiedenen Umständen zu verfolgen sein.

Ausser diesen Puncten von mehr secundärem Interesse dürften aber noch zwei, bisher nicht erledigte, Puncte von fundamentalerem Interesse für die Beurtheilung der ganzen Methode durch Versuche folgender Art in Angriff zu nehmen sein.

4) Es wird der Versuch zwischen zwei Hauttheilen, wie K und L, nicht blos mit einer A-Distanz auf K und einer gleichen auf L, sondern mindestens mit zweien, die in einfachem Verhältniss, als etwa 1 : 2, stehen, durchzuführen sein, um zu sehen, ob die zugehörigen B-Distanzen auf denselben Hauttheilen bei der doppelten A-Distanz dasselbe Verhältniss einhalten. Wo nicht, so würde man so wenig als bei der Methode der r. u. f. F. das Empfindlichkeitsverhältniss zweier Hauttheile allgemein nach dem Verhältnisse, was für gewisse Distanzen auf ihnen besteht, beurtheilen können.

Freilich compliciren sich die hierauf zu richtenden Versuche durch folgenden Umstand. Sei a die einfache Distanz, so ist mit Verdoppelung derselben auf einem gegebenen Hauttheile zum ersten a ein zweites, der Grösse nach, aber fraglich ob auch der Empfindlichkeit nach gleiches, a in den Versuch getreten, da neue Hautstellen dadurch in Anspruch genommen werden; und sollen die Versuche in obiger Hinsicht entscheidend sein, so bedarf es noch besonderer Zusatzversuche, um sich von einer merklichen Gleichförmigkeit der Empfindlichkeit im Bereich der Distanzen, die man in Anspruch nehmen will, zu überzeugen oder eine etwa vorhandene Ungleichförmigkeit in Rechnung nehmen zu können.

5) Gesetzt, man hat für zwei Hauttheile, wie K und L, die Aequivalenz $\frac{K}{L}$ gefunden. Man stelle dazu Versuche mit einem dritten Hauttheile, heisse er M, an; so wird man diesen sowohl mit K als L vergleichen können, und dadurch die Aequivalenzen $\frac{K}{M}$ und $\frac{L}{M}$ erhalten. Hienach erhält man durch Division von $\frac{K}{M}$ mit $\frac{L}{M}$ ein Verhältniss, welches dem direct gefundenen $\frac{K}{L}$ gleich sein sollte; ja es erscheint diess mathematisch nothwendig, und würde es wirklich sein, wenn wir blos mit abstracten Zahlen auf dem Papier zu thun hätten. Aber jeder Vergleich zwischen neuen Hauttheilen führt neue psychophysische Verhältnisse ein, und es scheint mir nicht selbstverständlich, dass die hieraus hervorgehenden Gleichungen sich jenem abstract mathematischen Zusammenhange fügen; vielmehr wird es gelten, ausdrücklich Versuche darauf zu richten, und nur, sofern es zutrifft, würde man eine allgemeine Empfindlichkeitsscala nach der Methode der Aequivalente in der Art gewinnen können, dass die Empfindlichkeit jedes beliebigen Hauttheiles als Einheit zum Vergleich mit der Empfindlichkeit aller übrigen genommen werden könne. Wo nicht, so würden sich die Resultate der Methode eben so zwischen allen möglichen Combinationen der Hauttheile, als bei Nichterfüllung der Proportionalitätsbedingung unter 4) zwischen allen möglichen Distanzen zersplittern. Jedenfalls sieht man, wie wichtig es sein muss, ehe man sich auf ausgedehnte Versuche zum Gewinn einer Empfindlichkeitsscala der verschiedenen Hauttheile nach der Methode der Aequivalente einlässt, sich zu überzeugen, ob eine solche überhaupt in der erwünschten Einfachheit danach zu gewinnen ist. Sollte sich aber die Unmöglichkeit hievon herausstellen, so würde man zunächst die Erkenntniss des Sachverhältnisses in dieser Hinsicht selbst als Gewinn zu betrachten haben, hienach aber sich veranlasst finden können, Abhülfe gegen eine solche Zersplitterung zu suchen. Und zwar dürfte eine solche in Betreff des ersten Umstandes vielleicht in ähnlicher Weise zu finden sein, als sie betreffs der Methode Ri sich finden liess, dass wir nämlich die Empfindlichkeit der verschiedenen Hauttheile nach Aeq eben so wie nach Ri von zwei, für jeden Hauttheil charakteristischen, Constanten abhängig machen, deren eine mit der Grösse der Distanzen multiplicirt auftritt, indess die andere

unabhängig davon ist, und die wir nur für die verschiedenen Hauttheile durch Versuche zu bestimmen haben, um danach von den Aequivalenzen derselben bei irgend welchen Distanzen auf solche bei beliebigen anderen Distanzen schliessen zu können. Freilich würde die Bestimmung dieser Constanten, wie sich zum Voraus übersehen lässt, bei Aeq grösserer Umständlichkeit und Schwierigkeit unterliegen, als bei Ri; nämlich da für je zwei Hauttheile vier Constanten h_1, k_1, h_2, k_2 zu bestimmen wären, müsste die Aequivalenz mindestens bei vier Distanzen bestimmt werden, und eine gleichförmige Empfindlichkeit innerhalb derselben constatirt sein. Weitere Untersuchungen müssen über diese noch schwebenden Fragen entscheiden, und ich kann nur wünschen, dass sie einem so vorzüglichen Beobachter wie Camerer zufallen.

Versuchsreihe von Grabau an Kinn K und Oberlippe L.

Vom 21. Jan. bis 4. März 1860. Beobachter Hermann Grabau, damals Student, jetzt Oberlehrer an der Leipziger Realschule. K Kinn, L Oberlippe über dem rothen Mundtheile. A-Distanz sowohl auf Kinn als Lippe = 20 pariser Decimallinien*), in querer Richtung gegen die Längsaxe des Körpers. Im Ganzen 480 Aequivalenzversuche, vertheilt auf 24 Tage. Nach den verschiedenen Umständen acht Combinationen, respective von l und k mit p, λ, ξ, χ jede mit 60 Versuchen. p und χ blos im Zusammenhange als $p\chi$ wirksam und bestimmbar (s. S. 289).

Im Ganzen sechs, folgends nach der Zeitfolge mit römischen Ziffern unterschiedene, Versuchsabtheilungen, jede zu vier auf einander folgenden Versuchstagen. Zwischen diesen Abtheilungen der Aequivalenzversuche lagen aber eben so viel damit vergleichbar ausgeführte Versuchsabtheilungen zu vier Tagen nach der Methode der mittleren Fehler für K und L, auf die hier zunächst nicht Rücksicht zu nehmen.

An jedem Versuchstage 20 Versuche, wovon 10 für eine der 8 Combinationen, die folgenden 10 für die entgegengesetzte Combination. Die Zeitfolge beider Combinationen wechselte nach Tagen, so dass eben so oft die eine als die andere vorausging.

Die folgende Tabelle nun giebt die wesentlichen Resultate, auf

*) Eine Decimallinie = $\frac{1}{10}$ des in 10 Zoll getheilten Fusses, = 0,72 Duodecimallinie, = 1,624 Mill.

die es zur Bestimmung von x als reinem $\frac{K}{L}$, so wie zur Bestimmung der constanten Fehler, ankommt, für alle sechs Abtheilungen I, II u. s. w. besonders, in den Schlussmitteln aber für die Gesammtheit der ganzen Reihe. Jede Zahl l, k über den Schlussmitteln ist das Mittel aus 10, das Schlussmittel aus 60 Aequivalenzbestimmungen, respective von l und k, zugehörig zu a_k oder $a_l = 20$.

Da in jeder Abtheilung 4 Bestimmungen von l und eben so viel gegensätzliche von k durch je 10 Aequivalenzversuche erhalten wurden, so ist die Folge dieser Bestimmungen durch kleine deutsche Ziffern über den Werthen von l und k bezeichnet. Sie wechselt, wie man sieht, von Abtheilung zu Abtheilung. Die l und k sind, nach den eingehaltenen Umständen, mit den Combinationen constanter Fehler behaftet, welche ihnen in der Tabelle übergestellt sind, wobei zu bemerken, dass die Werthe $lp\chi$, $\frac{k}{p\chi}$ allen darunter stehenden Combinationen gemein sind, dass also z. B. $lp\chi$ sich mit $\lambda\xi$ zu $lp\chi\lambda\xi$, mit $\frac{\lambda}{\xi}$ zu $lp\chi\frac{\lambda}{\xi}$ zusammensetzt.

Wie der Werth Mittl. Abw. unter der Tabelle zu verstehen, wird später angegeben werden.

		l zu $a_k = 20$ — $lp\chi$				k zu $l_k = 20$ — $\frac{k}{p\chi}$			
		$\lambda\xi$	$\frac{\lambda}{\xi}$	$\frac{\xi}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda\xi}$	$\frac{1}{\lambda\xi}$	$\frac{\xi}{\lambda}$	$\frac{\lambda}{\xi}$	$\lambda\xi$
I	21—24. Jan.	[1] 18,94	[3] 19,17	[5] 19,92	[7] 18,76	[2] 20,59	[4] 21,36	[6] 22,20	[8] 22,09
II	29. J.—1. Febr.	[2] 18,80	[4] 19,47	[6] 18,94	[8] 18,12	[1] 21,76	[3] 22,36	[5] 22,03	[7] 21,60
III	6.—9. Febr.	[1] 19,47	[3] 18,57	[5] 18,75	[7] 18,46	[2] 21,91	[4] 21,98	[6] 22,60	[8] 22,00
IV	14.—17. Febr.	[2] 18,79	[4] 18,68	[6] 18,36	[8] 18,17	[1] 22,37	[3] 22,62	[5] 21,63	[7] 22,64
V	22.—25. Febr.	[1] 18,94	[3] 18,93	[5] 19,20	[7] 18,63	[2] 22,46	[4] 21,57	[6] 22,23	[8] 21,59
VI	1.—4. März	[2] 19,03	[4] 19,17	[6] 17,66	[8] 18,25	[1] 22,66	[3] 22,60	[5] 22,26	[7] 21,66
	Mittel.	18,995	18,998	18,805	18,398	21,958	22,082	22,158	21,930
	log.	1,27864	1,27871	1,27427	1,26477	1,34159	1,34404	1,34553	1,34104
	Mittl. Abw.	0,7437	0,6130	0,5893	0,5767	0,5927	0,5740	0,6557	0,6527

Um nun vorerst aus voriger Tabelle eine einzelne Bestimmung des reinen x zu gewinnen, combiniren wir beispielsweise in Abth. I

die für l geltende Combination $lp\chi\lambda\xi = 18{,}94$ mit der gegensätzlich für k bestimmten $\frac{k}{p\chi\lambda\xi} = 20{,}59$, indem wir nach der S. 283 gegebenen Regel die zweite durch die erste dividiren, und die Wurzel ausziehen. Diess giebt $x = \sqrt{\frac{20{,}59}{18{,}94}} = 1{,}0427$.

Da aber nicht nur die Abtheilung I, sondern jede andere der sechs Abtheilungen vier Paar gegensätzlicher Combinationen bezüglich l und k enthält, so giebt die vorliegende Versuchsreihe im Ganzen 24 Bestimmungen von x her, aus denen sich ein definitives Mittel ziehen lässt; aber wir werden die Rechnung abkürzen, indem wir uns an die untenstehenden Mittel halten, wodurch sich nach der Folge der Beobachtungen in jeder einzelnen Abtheilung folgende vier Bestimmungen von log x und hieraus von x ergeben:

	log x	x
1. 2.	0,03148	1,0752
3. 4.	03267	0781
5. 6.	03563	0855
7. 8.	03814	0918
Mittel	0,034480	1,08265
Zahl	1,08260	

Der mittlere Werth von x bestimmt sich hienach in doppelter Weise, als Verhältnissmittel = 1,08260, indem wir die Zahl zum arithmetischen Mittel der Logarithmen von x nehmen, und als arithmetisches Mittel = 1,08265, indem wir das arithmetische Mittel der Zahlen nehmen, welche zu den einzelnen log x gehören. Das Verhältnissmittel ist nur um eine Spur kleiner als das arithmetische Mittel (vergl. S. 285).

Die vorigen vier Werthe von x unterscheiden sich mehr, als auf Rechnung unausgeglichener Zufälligkeiten zu schreiben, und befolgen eine gewisse Ordnung in ihrem Gange, was sich daraus erklärt, dass sie aufeinander folgenden Uebungszeiten entsprechen, durch welche x allmälig gewachsen ist, wie sich um so bestimmter herausstellen wird, wenn wir uns entschliessen, alle 24 Werthe x nach der Tagesfolge in jeder Abtheilung, wie nach der Folge der sechs Abtheilungen von je vier Tagen gesondert aufzuführen. So

erhalten wir, wenn die Tagesfolge in jeder Abtheilung durch 1, 2, 3, 4, die Abtheilungsfolge durch I, II u. s. w. bezeichnet wird, folgende Bestimmungen:

Werthe von x nach zeitlichem Fortschritt.

	I	II	III	IV	V	VI	Mittel*)
1.	1,043	1,076	1,049	1,091	1,089	1,091	1,0732
2.	056	072	076	100	068	086	0764
3.	056	079	098	086	076	123	0863
4.	085	092	092	116	077	089	0918
Mittel	1,060	1,080	1,079	1,098	1,078	1,097	1,082

Man sieht, dass sowohl nach der Zeitfolge der Tage in jeder einzelnen Abtheilung, als nach der Zeitfolge der ganzen viertägigen Abtheilungen x mit der Zeit zunimmt; zugleich aber, dass der Fortschritt eine Grenze hat. So sehen wir in der Folge der Reihen nach den unten stehenden Mitteln den Fortschritt von der ersten zur zweiten Reihe sehr entschieden, von da an aber die Zahlen sehr unregelmässig wechselnd; und nehmen wir zur bessern Ausgleichung dieser Unregelmässigkeit die Mittel zwischen I und II, II und III u. s. f., so erhalten wir folgende Zahlenreihe:

1,070 , 1,080 , 1,089 , 1,088 , 1,088 ,

worin der anfängliche Fortschritt eben so entschieden, als (von der dritten Zahl an) der spätere Stillstand desselben sichtbar wird. Hiemit hängt dann auch zusammen, dass der Fortschritt durch die vier Tage jeder Abtheilung nur in den ersten drei Abtheilungen, am allerentschiedensten in der ersten sichtbar ist, in den folgenden aber einem ganz unregelmässigen Wechsel Platz macht.

Man hat bei vorstehenden Ergebnissen in Rücksicht zu ziehen, dass die sechs viertägigen Abtheilungen der Aequivalenzversuche bezüglich Kinn und Lippe durch Versuche von gleich viel Tagen nach der Methode der mittleren Fehler auf denselben Hauttheilen (mit

*) Diese vier Mittel sollten eigentlich mit den S. 298 gegebenen stimmen, weichen aber in den letzten Decimalen etwas davon ab, weil sie aus Einzelwerthen gezogen sind, in denen nur drei Decimalen berücksichtigt sind, indess jenen Werthe mit vier Decimalen unterliegen.

20 Mill. Normaldistanz) unterbrochen waren; und wahrscheinlich wäre der Uebungseinfluss noch eher zur Grenze gekommen, wenn die Aequivalenzversuche continuirlich durch die Versuchstage fortgegangen wären; wogegen nach der hier getroffenen Einrichtung in den Zwischenperioden ein theilweiser Rückgang des Uebungseinflusses stattfinden konnte. Doch ist auch nicht unwahrscheinlich, dass die eingeschobenen Versuche nach der Methode der mittleren Fehler selbst im Sinne des Uebungseinflusses betreffs der Aequivalenz fortwirkten.

Wie dem auch sei, so sieht man, indem man die erste Zahl 1,043 der vorigen Tabelle mit der letzten 1,089 vergleicht, dass der Uebungseinfluss nicht unbeträchtlich gewesen ist, und dass sich Kinn und Lippe durch denselben allmälig von einander entfernt haben, sofern sich x von 1 weiter entfernt hat. Es kann aber, nach meinen Erfahrungen an anderen Hauttheilen, durch den Uebungseinfluss statt einer Entfernung auch eine Näherung der Hauttheile an einander eintreten.

Was die constanten Verhältnissfehler anlangt, so übersieht sich von vornherein, dass sie nur gering sein, d. h. wenig von 1 abweichen können. In der That, nach der Regel S. 284 ist ein constanter Fehler oder eine Combination constanter Fehler C allgemein:

$$C = \frac{a}{\sqrt{kl}}.$$

Alle mit constanten Fehlern behafteten k und l aber, welche in der obigen Tabelle S. 297 vorkommen, weichen wenig von a, und hiemit C wenig von 1 ab; was hienach auch von allen Elementen der Combination gelten muss, weil sonst wenigstens gewisse Combinationen stark von 1 abweichen müssten. Halten wir uns nun in Betreff der Bestimmung der constanten Fehler gleich an die untenstehenden Mittel, so haben wir zur Bestimmung beispielsweise von $p\chi\lambda\xi$ das Product aus dem, mit dieser Combination behafteten, l in das, mit der entgegengesetzten Combination behaftete k zu nehmen, und a mit der Wurzel aus diesem Product zu dividiren. Das giebt:

$$\frac{20}{\sqrt{18,995 \cdot 21,958}};$$

hievon ist der Logarithmus = 0,99773 — 1, und die betreffende Combination die Zahl dazu, d. i.:

$$p\chi\lambda\xi = 0,9947.$$

Und so erhalten wir überhaupt nach entsprechender Bestimmung:

(1)	(2)	(3)	(4)
$\log p\chi\lambda\xi$	$\log p\chi\frac{\lambda}{\xi}$	$\log p\chi\frac{\xi}{\lambda}$	$\log\frac{p\chi}{\xi\lambda}$
0,99773 — 1	0,99965 — 1	0,99112 — 1	0,00315

Sollen nun hieraus die einzelnen Elemente isolirt werden, so combinire man zum Gewinn von $p\chi$, was sich nur ungetrennt erhalten lässt, (1) und (4), so wie (2) und (3), was zwei Bestimmungen von $\log p\chi = 0,0004$ und 0,99538 — 1, im Mittel 0,99582 — 1 giebt, wozu als Zahl gehört $p\chi = 0,9942$.

Entsprechend gewinnen wir zwei Bestimmungen von $\log \xi = 0,99904 - 1$ aus (1) und (2), und = 0,99399 — 1 aus (3) und (4), dessgleichen zwei Bestimmungen von $\log \lambda$, aus (1) und (3), und (2) und (4), beziehentlich = 0,00331 und 0,99825 — 1; wozu natürlich Zahlen gehören, die auch nur sehr wenig von 1 abweichen.

Fassen wir nun auch die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ von ihren Mittelwerthen k und l ins Auge. Nun ist in jeder der sechs Abtheilungen das k und l jeder Combination aus je zehn Versuchen bestimmt, und aus den zehn Abweichungen der Einzelbestimmungen von ihrem Mittel, respective k oder l, das Mittel gezogen, endlich aus den sechs Mitteln, die sich für die Gesammtheit der sechs Abtheilungen ergeben, ein definitives Mittel gezogen, welches als »mittl. Abw.« unter der Tabelle S. 297 steht. Im Durchschnitt der Combinationen jeder Seite ist es bezüglich l etwas grösser als bezüglich k, dort nämlich = 0,6331, hier = 0,6188. Zu bemerken ist, dass, um bei verschiedenen Versuchsreihen die mittlere Abweichung vergleichbar zu erhalten, die ursprüngliche Mittelbestimmung von k und l immer aus derselben Zahl von Einzelbestimmungen geschehen muss, da nach bekannten Principien die mittlere Abweichung mit der Zahl der Werthe, aus welcher die ursprüngliche Mittelbestimmung geschieht, etwas wächst.

Fasst man die drei ersten und drei folgenden Abtheilungen als zwei Hauptabtheilungen der ganzen Reihe besonders zusammen, so zeigt sich in allen acht Combinationen derselben, ausser zweien, ein

sehr starker Uebungsfortschritt von der ersten zur zweiten Hauptabtheilung durch Verkleinerung der mittleren Abweichungen, nur bei $\frac{\lambda}{p\chi\xi}$ findet umgekehrt eine starke Vergrösserung statt, und bei $\frac{p\chi}{\lambda\xi}$ beträgt die Verkleinerung nur wenig. Ich habe diese Verhältnisse auch ins Einzelne verfolgt, übergehe aber die Specialresultate, als von keinem allgemeineren Interesse.

Um endlich noch etwas über die eingeschalteten Versuche nach der Methode der mittleren Fehler zu sagen, so wurden sie so angestellt, dass auf Kinn wie Lippe mit dem sog. Normalzirkel (welcher den A-Zirkel bei Aeq vertritt) eine Distanz $= 20$ abgegrenzt ward und mit dem Fehlzirkel auf demselben Hauttheil (statt auf einem anderen, wie es bei Aeq der Fall ist) nach dem Gefühl die gleiche Distanz herzustellen versucht ward, wobei die Abweichungen zwischen Normaldistanz und Fehldistanz zunächst die sog. rohen Fehler geben, indess die Abweichungen der einzelnen Fehldistanzen von ihrem Mittel die reinen Fehler geben. Die mit der Zahl der Abweichungen dividirte Differenz zwischen der Summe der positiven und nach absolutem Werthe gerechneten negativen rohen Fehler aber (erstere minus letztere) giebt den constanten Fehler. Diese Versuche wurden in ganz vergleichbarer Weise mit den Aequivalenzversuchen angestellt, und beide, wie angegeben, in Abtheilungen von je vier zu vier Tagen zwischen einander eingeschaltet, wobei die Abtheilung der mittleren Fehler den Anfang machte. Dabei wurde zur Elimination der, auch hier vorkommenden, constanten Fehler eben so oft das u-Verfahren (Vorausgehen der Normaldistanz) als v-Verfahren (Vorausgehen der Fehldistanz) angewandt, eben so oft der Normalzirkel mit der Linken, als Rechten applicirt, und eine gleiche Anzahl Versuche $= 240$ für K als L angestellt. Die mittleren Abweichungen aber sind auch hier zunächst aus Fractionen à $m = 10$ bestimmt, und aus diesen Mitteln zuletzt das definitive Mittel gezogen, wie es sich folgends angegeben findet. Hienach wurden überhaupt folgende Resultate erhalten.

Definitive mittlere Werthe der reinen Fehler aus je 240 Bestimmungen für K und L:

für $K = 0{,}5223$ | für $L = 0{,}4582$,

also etwas grösser für K als L, beide etwas kleiner als die ent-

sprechenden mittleren Abweichungen 0,6331 und 0,6188 bezüglich der Methode der Aequivalente.

Nach der Folge der sechs Abtheilungen besonders bestimmt fanden sich die reinen mittleren Abweichungen so:

	I	II	III	IV	V	VI
für K	0,6715	0,5325	0,5815	0,4615	0,5710	0,5105
für L	0,5280	0,5570	0,3510	0,5160	0,5220	0,4040

Die Reihe dieser Werthe ist sehr unregelmässig, und eine bestimmte Abhängigkeit von der Zeit der Versuche geht daraus nicht hervor.

Als definitive mittlere constante Fehler ergaben sich:

$$\text{für } K + 0{,}260 \ ; \qquad \text{für } L + 0{,}283 \ .$$

Versuchsreihe von Koch an Kinn K und Oberlippe L.

Vom 24. April bis 1. Mai 1859. Beobachter R. O. G. Koch, Stud. math. Wesentlich dieselben Verhältnisse als bei der Grabau-schen Reihe, so namentlich, dass sowohl a_k als $a_l = 20$ pariser Decimallinien betrug, dass an jedem Versuchstage 20 Aequivalenzversuche hinter einander, je 10 mit gegensätzlicher Combination constanter Fehler, angestellt wurden, und dass zwischen die Aequivalenzversuche Versuche nach der Methode der mittleren Fehler an Kinn und Lippe eingeschaltet wurden; doch folgende Puncte anders: blos u-Versuche im Sinne von S. 288, wonach die Combination $p\chi\xi$ nur ungetrennt bestimmbar war. Bezeichnen wir sie also einfachheitshalber mit $\mathfrak{p}$. Der Wechsel zwischen Aequivalenzversuchen und Versuchen nach der Methode der mittleren Fehler nicht nach je vier Tagen, sondern nach je zwei Tagen. Von einem Versuchstage zum anderen wechselte die Folge, in der die gegensätzlichen Combinationen angewandt wurden, so, dass, wenn am ersten Tage sich $\mathfrak{p}\lambda$ und $\frac{1}{\mathfrak{p}\lambda}$ (mit je 10 Versuchen) folgten, am zweiten sich umgekehrt $\frac{\mathfrak{p}}{\lambda}$ und $\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}$ folgten; nach Zwischeneinschiebung von je zwei Versuchstagen mittlerer Fehler aber die Folge wie bei den ersten zwei Tagen wiederkehrte. In Summa 800 Versuche, vertheilt auf 40 Tage. Nur vier Combinationen überhaupt, $\mathfrak{p}\lambda$, $\frac{1}{\mathfrak{p}\lambda}$, $\frac{\mathfrak{p}}{\lambda}$ und $\frac{\lambda}{\mathfrak{p}}$, jede mit 200 Versuchen.

Halten wir uns nun zunächst zur Bestimmung von x als reinem $\frac{K}{L}$ an die definitiven Mittel der Gesammtreihe, so haben wir:

	Mittel l zu $a_k = 20$		Mittel k zu $a_l = 20$	
	(1) $l\mathfrak{p}\lambda$	(2) $l\frac{\mathfrak{p}}{\lambda}$	(3) $\frac{k}{\mathfrak{p}\lambda}$	(4) $\frac{k\lambda}{\mathfrak{p}}$
Mittel	16,539	17,225	28,381	29,805
log	1,21851	1,23646	1,45303	1,47429

Nach entsprechender Behandlung als bei der Grabau'schen Reihe erhalten wir hienach:

	x
nach (1) und (3)	1,3100
nach (2) und (4)	1,3154

also beide Bestimmungen sehr schön übereinstimmend, aber erheblich grösser als Grabau's 1,0826.

Die Reihe der x nach der Zeitfolge der zehn Reihen I, II . . ., und der Zeitfolge der Tage 1, 2 in jeder einzelnen Reihe war diese:

Werthe von x nach zeitlichem Fortschritt.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1,120	1,589	1,616	1,634	1,570	1,739	1,870	2,198	2,170	1,945
2	1,460	1,539	1,615	1,562	1,840	1,606	1,839	2,213	1,774	1,919

Hier wie bei Grabau starker Fortschritt durch die Reihen, der erst bei der VIII. Reihe seine Grenze hat, um von da einem unregelmässigen Wechsel Platz zu machen, indess ein Fortschritt nach den Tagen nur bei der Reihe I sichtbar ist.

Was die constanten Fehler anlangt, so haben wir auf Grund der Formel $C = \frac{a}{\sqrt{kl}}$

nach (1) und (3) $\log \mathfrak{p}\lambda = 0,96526 - 1$

nach (2) und (4) $\log \frac{\mathfrak{p}}{\lambda} = 0,94580 - 1$.

Hienach:

$\log \mathfrak{p} = 0{,}95553 - 1$	$\log \lambda = 0{,}00973$
$\mathfrak{p} = 0{,}90267$	$\lambda = 1{,}0266$

also die constanten Fehler erheblicher als bei Grabau.

Auch die Abweichungen der einzelnen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{l}$ von k und l fanden sich, so weit ich sie untersucht habe, erheblich grösser bei Koch als Grabau; doch habe ich ihre Berechnung nicht durchgeführt, und die Berechnung der mittleren Fehler, da sie schon nach Grabau zu keinem besonders interessirenden Resultate führte, überhaupt nicht vorgenommen.

XXI. Resumé.

1) Es handelt sich in dieser Abhandlung um Massbestimmungen über die Feinheit des Raumsinnes oder der sog. extensiven Empfindlichkeit der Haut nach der sog. Methode der richtigen und falschen Fälle, worüber einleitend im I. Abschnitte gesprochen ist.

2) Schon früher sind zahlreiche Versuche in dieser Beziehung von Vierordt in Tübingen, Volkmann in Halle und Camerer in Riedlingen theils veranstaltet, theils selbst angestellt worden, deren historische Verhältnisse in allgemeinerer Weise im III. Abschnitte, specieller bezüglich der Camerer'schen und Volkmann'schen Versuche in den Abschnitten VIII und X besprochen sind.

3) Es liessen aber diese früheren Versuche theils hinsichtlich der Anstellungsweise Manches zu wünschen übrig, theils blieben danach manche theoretisch und praktisch wichtige Fragen bezüglich der Methode noch ungelöst, welche im II. Abschnitt S. 114 aufgeführt sind; daher Camerer eine neue Versuchsreihe zur Erledigung derselben angestellt hat (VIII), mit deren Bearbeitung sich diese Abhandlung hauptsächlich beschäftigt hat, und woraus unter thunlicher Mitrücksicht auf die früheren Versuche folgende Resultate fliessen.

4) Gemeinhin hat man geglaubt, die Versuche unwissentlich (resp. halbwissentlich) mit Einschaltung von Vexirversuchen, zur Vermeidung eines Einflusses der Kenntniss der Verhältnisse auf das Urtheil der Empfindung anstellen zu müssen; sowohl nach allgemeineren Gründen als dem Ausfall der neuen vergleichenden Versuche Camerer's ist jedoch das wissentliche Verfahren im Ganzen vorzuziehen, und die Einschaltung von Vexirversuchen als von nachweislich stören-

dem Einflusse zu verwerfen, wenn man nicht die Versuche sich so langsam folgen lässt, dass ein Contrasteinfluss der früheren auf die späteren ausgeschlossen ist (V und XVI).

5) Der Contrast zwischen grösseren und kleineren Distanzen spielt überhaupt bei unserer Methode eine sehr beachtungswerthe Rolle, und die Verhältnisse der Vexirfehler und Unterschiede zwischen den Resultaten, je nach Aufsteigen und Absteigen mit den Distanzen, hängen wesentlich davon ab (VI).

6) Die Entstehung der Vexirfehler an sich selbst aber scheint in der Hauptsache eine Sache der Einbildung zu sein, wenn schon die Mitwirkung anderer Momente dabei nicht ausgeschlossen ist (VI).

7) Insofern zwischen streng richtigen Fällen, wo eine Distanz zwischen zwei getrennten Spitzen entschieden als solche erscheint, und streng falschen Fällen, wo die Berührung durch zwei getrennte Spitzen entschieden einfach erscheint, noch Uebergangs- oder Zwischenfälle vorkommen, sind doch für die praktische Verwerthung und Rechnung die Fälle stets auf zweierlei zu reduciren, indem man die Zwischenfälle entweder (nach Reductionsweise α) ganz zu den falschen oder (nach β) ganz zu den richtigen zählt, oder (nach γ) gleich zwischen beide theilt (VII). Hievon hat sich die dritte Methode (γ) im Ganzen als die beste erwiesen (XVI).

8) Nach dem allgemeinen Massbegriffe der Empfindlichkeit lässt sich die Feinheit des Raumsinnes oder die extensive Empfindlichkeit der Haut reciprok setzen den Distanzen D auf derselben, die (nach einem kurzen Ausdruck) für die Empfindung äquivalent erscheinen, d. i. die bei vergleichbar gehaltener Ausführung des Verfahrens ein gleiches (reducirtes) $\frac{r}{n}$ oder, procental gesprochen, ein gleiches r-$\frac{0}{0}$ geben. Müller theilt zwar diese Auffassung des Empfindlichkeitsmasses durch unsere Methode nicht, doch kann ich nach der, im XVI. Abschnitt geführten, Discussion nicht anders als darauf bestehen.

9) In jedem Falle kann man nach einer Regel oder Formel fragen, welche gestattet, nach Beobachtungen bei einer beschränkten Zahl von D auf zwei Hauttheilen A, B das Verhältniss der für sie geltenden äquivalenten Distanzen a, b, hiemit das, nach unserer Auffassung damit reciproke, Verhältniss ihrer Empfindlichkeiten allgemein zu bestimmen.

10) Vierordt hat diess auf Grund sehr zahlreicher, in seinem Institute angestellter, Versuche, welche sich über alle Theile der Hautoberfläche erstrecken, durch eine danach construirte Tabelle (S. 177), welche den Rückgang auf eine Formel erspart, zu leisten versucht; so sinnreich aber seine Methode ist, und so geeignet, für nicht zu kleine Distanzen angenähert zutreffende Resultate zu geben, genügt sie doch (nach S. 179 f.) der Aufgabe nicht erschöpfend.

11) Hienach haben sowohl G. E. Müller als ich selbst Formeln (respective M und F) aufgestellt, welche der Aufgabe dadurch zu entsprechen suchen, dass sie gewisse, für die Empfindlichkeit jedes Hauttheils charakteristische, Werthe h, k enthalten, die, aus den Beobachtungen bei einer beschränkten Zahl von D's auf einem gegebenen Hauttheile abgeleitet, hienach für alle andere D's auf demselben Hauttheile gültig bleiben, so lange dessen allgemeiner Empfindlichkeitszustand sich nicht ändert; und wennschon Müller's Formel wesentlich auf einen anderen Zweck geht, als äquivalente Distanzen zu bestimmen, theilt sie doch mit meiner Formel das Princip dazu.

12) Des Näheren enthalten beide Formeln eine Beziehung zwischen $r\%$ einerseits, und D, h, k andererseits, welche durch das Gauss'sche Integral der Fehlerwahrscheinlichkeit vermittelt wird (S. 196 und 197). Da aber dieses Integral keiner allgemeinen Darstellung in endlicher Form fähig ist, so lässt sich von der Grundformel selbst keine praktische Anwendung machen, wohl aber durch Uebersetzung derselben in eine sog. Fundamentaltafel, wie sie für beide Formeln (für die Müller'sche nur auszugsweise) S. 206 ff. gegeben ist. Danach findet man zu jedem irgendwie reducirten $r\%$, was auf einem gegebenen Hauttheil gefunden wird, in der Tabelle einen Werth t (nach Müller τ). Diesen setzt man:

$$t = hD \pm k ,$$

wo das obere Vorzeichen für die Anwendung von meiner, das untere für die Anwendung von Müller's Formel gilt; und von dieser sog. secundären Formel ist für die Bestimmung der Empfindlichkeitsverhältnisse verschiedener Hauttheile in folgender Weise Gebrauch zu machen.

13) Nachdem man die t's für eine Anzahl (mindestens zwei) D's auf einer gegebenen Hautstelle nach den darauf gefundenen $r\%$'s

mittelst der Fundamentaltafel bestimmt, und, kurz gesagt, für diese $r\frac{\vartheta}{0}$'s eingesetzt hat, leitet man daraus die Constanten h, k der secundären Formel sei es nach einer einfachen, aber minder scharfen Methode, Summationsmethode (Summ.), sei es nach der schärfsten Methode, d. i. der kleinsten Quadrate (Qu.) ab, wozu die Regeln im XIV. Abschnitt gegeben sind.

14) Werden nun auf zwei Hauttheilen A, B äquivalente Distanzen a, b gesucht, so substituire man die nach 13) für A und B gefundenen Constanten h_a, k_a und h_b, k_b in die secundären Formeln für diese Hauttheile, wodurch man hat:

$$t_a = h_a \cdot a \pm k_a$$
$$t_b = h_b \cdot b \pm k_b \ .$$

Da nun im Fall der Aequivalenz die Werthe $r\frac{\vartheta}{0}$ und mithin t auf beiden Hauttheilen gleich sind, so ist $t_a = t_b$ zu setzen, mithin:

$$h_a \cdot a \pm k_a = h_b \cdot b \pm k_b \ ,$$

woraus sich (nach S. 184) als Verhältniss der äquivalenten Distanzen a, b ableitet:

$$\frac{b}{a} = \frac{h_a}{h_b} \pm \frac{k_a - k_b}{h_b \cdot a} .$$

15) Eine Hauptfolgerung letzterer Formel ist, dass das Verhältniss der äquivalenten Distanzen $\frac{b}{a}$ sich mit ihrer absoluten Grösse ändert, für grössere a's aber nahe auf $\frac{h_a}{h_b}$ zurückkommt (S. 184 f.).

16) Wenn aus den Versuchen einer Mehrheit von Beobachtern Mittelbestimmungen für die, einem gegebenen Hauttheile zukommenden, h, k zu ziehen sind, so kann diess nach zweierlei Methoden geschehen, die ich als Methode der mittleren t und mittleren r oder kurz als ***T*** und ***R*** unterscheide, worüber Abschnitt XV Näheres enthält.

17) Während nach den von no. 11 bis 16 entwickelten Beziehungen die Formeln M und F gleichen Gesichtspuncten unterliegen, gleich zu behandeln sind und gleichen Anspruch machen, zur Bestimmung von Distanzen, die in Betreff des $r\frac{\vartheta}{0}$-Werthes äquivalent sind, dienen zu können, unterscheiden sie sich an sich und nach ihren Resultaten theils durch die verschiedene Weise, wie das Gauss'sche Integral in die Grundformeln eingeht, und die demge-

mässe Verschiedenheit der zugehörigen Fundamentaltafel, theils das entgegengesetzte Vorzeichen von k in den secundären Formeln, theils die verschiedene Deutung, welche den Constanten h und k selbst beizulegen ist.

18) Letzteres anlangend, so werden von mir die Constanten h, k blos nach ihrer Leistung für Berechnung äquivalenter Distanzen und nach ihren Abhängigkeitsverhältnissen charakterisirt; Müller aber legt denselben bestimmtere Bedeutungen bei. Seine secundäre Formel lautet nämlich ursprünglich so:

$$t = h(D - S) = hD - hS = hD - k \;,$$

wonach sein, nur im Rechnungsinteressse von ihm als einfach eingeführtes k im Grunde eine Zusammensetzung zweier Constanten h und S ist. Darin bedeutet S die von Müller als zufällig variabel angenommene mittlere Raumschwelle, h das Präcisionsmass ihrer Variationen nach Gauss'schem Gesetze. Indem nun Müller nach dem beschränkten Massbegriffe, den er von der Empfindlichkeit überhaupt hegt (S. 190), dieselbe blos der Schwelle reciprok setzt, verliert h, trotzdem dass $r\frac{0}{0}$ mit h wächst, für ihn eine Bedeutung für die durchschnittliche Grösse der Empfindlichkeit während der Versuchszeit und behält solche blos für die Variationsweite der Schwelle, hiemit die Durchschnittsgrösse der Veränderungen, welche die Empfindlichkeit während der Versuchszeit erleidet.

18) Nun ist im XII. Abschnitt S. 187ff. auseinander gesetzt, wie grossen Schwierigkeiten diese Auffassung der Constanten in Müller's Formel unterliegt, was jedoch an sich nicht hindern würde, dass sie als empirische Formel mit irgend welcher anderen Deutung der Constanten bestände, so dass die definitive Entscheidung darauf zu fussen hat, welche von beiden Formeln besser zu den Erfahrungen stimmt.

20) Untersucht man nun diese Frage nach den Tübinger oder älteren Camerer'schen Versuchsreihen, so bleibt die Frage unentschieden, oder kann selbst die Müller'sche Formel als die zulänglichere erscheinen (S. 119, 249, 271); eine nähere Untersuchung aber führt zu dem Schlusse, dass sie nur einer gewissen Unvollkommenheit dieser älteren Versuche besser entspricht als die meinige, wogegen die von dieser Unvollkommenheit freien neuen Camerer'schen Versuche

den empirischen Vortheil entschieden auf die Seite meiner Formel fallen lassen (XVI).

21) Aus der Gesammtheit der vorstehenden Untersuchung gehen für eine etwaige Wiederaufnahme von Versuchen in unserem Felde gewisse Bedingungen hervor, nach denen das bisher gemeinhin eingeschlagene Verfahren abzuändern, welche S. 272 kurz resumirt sind.

22) Die Resultate der Methode der r. u. f. F. sind mit denen der Methode der Aequivalente nicht schlechthin vergleichbar, da nach beiden die extensive Empfindlichkeit der Haut in verschiedener Weise in Anspruch genommen wird. Die äquivalenten Distanzen nach der ersten Methode stehen, so weit sich nach den bisher vorliegenden Versuchen schliessen lässt, auf denselben Hauttheilen in viel weiterem Verhältnisse auseinander, als nach der letzten (XX). Es ist aber noch eine weitere Ausdehnung der darüber geführten Untersuchung zu wünschen.

23) Der XX. Abschnitt enthält in Anschluss an die Besprechung des vorigen Verhältnisses eine weitere Auseinandersetzung der Methode der Aequivalente nach ihren Hauptpuncten.

Inhalt.

		Seite
I.	Eingang	111
II.	Allgemeine Sachlage und specielle Aufgaben der folgenden Untersuchung	113
III.	Uebersicht der bisherigen Untersuchungen	115
IV.	Unterscheidung und Bezeichnung der verschiedenen Fälle	120
V.	Unwissentliches, halbwissentliches und wissentliches Verfahren	125
VI.	Vexirversuche und Vexirfehler. Aufsteigende und absteigende Versuche. Contrastverhältnisse	129
VII.	Beziehung des allgemeinen Massprincipes der Empfindlichkeit auf unsere Versuche, und Reduction der Fälle, um sie der Anwendung des Principes zugänglich zu machen	141
VIII.	Die Camerer'schen Versuchsreihen insbesondere	149
IX.	Tabellen der neuen Camerer'schen Versuche und ihrer Resultate	163
X.	Die Volkmann'schen Versuchsreihen insbesondere	170
XI.	Vierordt's Massbestimmung der extensiven Empfindlichkeit ohne Formeln	174
XII.	Massbestimmung durch Formeln. Müller's Formel (M) und meine Formel (F). Einige fundamentale Discussionen mit Müller	180
XIII.	Die Fundamentaltafeln	204
XIV.	Berechnungsweise der Constanten *h*, *k*	213
XV.	Mittelbestimmungen der Constanten *h*, *k* aus den Beobachtungsreihen verschiedener Beobachter	230
XVI.	Erfahrungsmässige Beantwortung der drei ersten Hauptfragen dieser Untersuchung (S. 113, 114)	237
XVII.	Abhängigkeitsverhältnisse der Constanten *h*, *k*	257
XVIII.	Frage nach Verschiedenheiten der extensiven Empfindlichkeit zwischen centralen und seitlichen Theilen der Haut	260

Seite

XIX. Tabellen und Resultate aus den älteren Camerer'schen Versuchsreihen (No. 1). Allgemeiner Rückblick auf die früheren Versuche 266

XX. Beziehung der Methode der richtigen und falschen Fälle zur Methode der Aequivalente. Weitere Ausführungen über letztere Methode . . 273

XXI. Resumé . 305

Inhalt . 311

Nachträgliche Berichtigungen zu der Abhandlung »Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes u. s. w.«

S. 12 Z. 7 v. u. statt $\sqrt{\frac{t_o}{t}}$ lies $\sqrt{\frac{t_o}{t_u}}$.

S. 85 Z. 6 v. u. statt Verhältnissschwellen lies Unterschiedsschwellen.

S. 86 Z. 2 v. o. statt $(\sqrt{v_o v_u - 1})^2$ lies $(\sqrt{v_o v_u} - 1)^2$.

DIE BEI DER

UNTERSUCHUNG VON GELENKBEWEGUNGEN ANZUWENDENDE METHODE,

ERLÄUTERT AM

GELENKMECHANISMUS DES VORDERARMS BEIM MENSCHEN

VON

WILHELM BRAUNE,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN,

IN VERBINDUNG MIT

OTTO FISCHER.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N^0^ III.

MIT VIER TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1885.

Vom Verfasser übergeben den 5. Mai 1885.
Der Abdruck vollendet den 2. Juni 1885.

DIE BEI DER

UNTERSUCHUNG VON GELENKBEWEGUNGEN ANZUWENDENDE METHODE,

ERLÄUTERT AM

GELENKMECHANISMUS DES VORDERARMS BEIM MENSCHEN.

VON

WILHELM BRAUNE UND OTTO FISCHER.

Die Bewegung der Vorderarmknochen des Menschen bei der Pronation und Supination, die man nach einer langen Reihe eingehender und wiederholter Untersuchungen vollständig zu kennen meinte, ist durch eine Arbeit Lecomte's[1]), der die allgemein angenommene Lehre hierüber wieder in Frage stellte, neuerdings Gegenstand einer lebhaften Discussion geworden. Sie führte dazu, diesen Gegenstand bei dem medizinischen internationalen Congress zu Kopenhagen im vergangenen Herbst auf die Tagesordnung zu setzen. Die Verhandlungen, welche an die Arbeiten von Welcker, Lecomte, Braune und Flügel, Koster, Einthoven, Heiberg, Morris u. A. anknüpften, führten zu keinem abschliessenden Resultate, und konnten auch nicht zu einem solchen führen, weil die Autoren verschiedene Untersuchungsmethoden angewendet hatten und keine derselben Anspruch auf Exactheit erheben konnte.

Es erscheint daher geboten, den Gegenstand neu aufzunehmen, und zwar mit mathematischem Apparat, um die kinematischen Grundsätze, die allein bei derartigen Untersuchungen sichere Resultate versprechen, anwenden zu können.

Das Bedürfniss exacter Untersuchung auf dem Gebiete der Gelenklehre hat auch Einthoven schon empfunden und ausdrücklich ausgesprochen (Archives Néerlandaises des sciences etc. Harlem, T. XVII. 3. liv. p. 392. Anmerkung). Bei dieser unserer Arbeit, welche durch Vorversuche mit Herrn stud. math. Fiedler aus Zürich vorbereitet wurde, soll ausdrücklich von einer eingehenden Berücksichtigung der Literatur abgesehen werden, sowohl deshalb, weil sich sehr schwer namentlich aus den Citaten der Lehrbücher das Ver-

[1]) Le coude et la rotation de la main. Archives générales de médecine août 1874 et mai et juin 1877.

dienst des einzelnen Autors feststellen lässt, als auch aus dem Grunde, weil Heiberg fast das ganze literarische Material in seinem Buche über die Drehungen der Hand (Wien und Leipzig, 1884) niedergelegt hat. Auch könnten sehr leicht neuere Publicationen in fremden Sprachen übersehen werden. Auf das in Kopenhagen Vorgetragene und auf die früher mit Herrn Flügel angestellten Versuche wird hier nicht zurückgegriffen noch Bezug genommen werden, um die Arbeit möglichst frei von allen historischen Rückblicken und persönlichen Beziehungen zu halten. Es wird dadurch wohl am besten jeder Prioritätsstreit ausgeschlossen. Es geschah nur aus Unkenntniss, dass bei der früheren Arbeit die Koster'sche Arbeit (Weekblad van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde 1880. p. 213) nicht angeführt wurde.

Ferner soll gleich anfangs erklärt werden, dass die Arbeit wieder aufgenommen werden wird. Das Folgende hat die Bedeutung einer principiellen Feststellung der Methode, wie man bei einer exacten Untersuchung der hier einschlägigen Fragen zu verfahren hat.

Die Beobachtungen, die hier zu Grunde gelegt sind, haben den Zweck, die Methode und deren Anwendbarkeit überhaupt zu zeigen, ohne den Anspruch zu machen, endgültige Resultate zu liefern. Denn es ist selbstverständlich, dass eine exacte Untersuchung auch die individuellen Erscheinungen zu Tage fördert, die nur durch eine grosse Zahl von Beobachtungen eliminirt werden können. — Die Arbeiten von Lecomte und Heiberg gingen darauf hinaus, die Bewegungen der Vorderarmknochen am lebenden Körper zu untersuchen. Namentlich betonte Lecomte, dass die Versuche am Cadaver nicht der Wirklichkeit entsprächen. Darauf hin soll nochmals ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Messungen Lecomte's und Heiberg's, die am Lebenden gemacht wurden, keine brauchbaren Resultate lieferten. Und zwar liegt dies nicht nur in den von beiden Untersuchern angewendeten Methoden, die jeder Genauigkeit entbehrten (siehe Heiberg's Pinselkurven a. a. O. p. 64, 65, 72, 73, 76), sondern überhaupt in der Unmöglichkeit, am Lebenden einzelne Knochenpunkte genügend zu fixiren.

Eine genaue Untersuchung am freigelegten Gelenk des Cadavers muss die Grundlage bilden, damit man zunächst die Construction des Skeletmechanismus an sich erfasst. Erst dann können die be-

wegenden Muskeln und überhaupt die Art der Functionirung des lebenden Organismus ins Auge gefasst werden, um die Erscheinung in ihrer Totalität zu erkennen.

Schon Cartesius hat in seinem Discours de la méthode es ausgesprochen, dass man jede complicirte Erscheinung zum Zwecke der Untersuchung in ihre einzelnen Theile zerlegen müsse.

Zur genauen Kenntniss der Bewegungen des Knochensystems ist vorerst nöthig, dass man die relative Bewegung eines jeden Knochens zu dem nächsten Skelettheil untersucht, der mit ihm durch ein Gelenk beweglich verbunden ist.

Wenn es sich um die Bewegung des Knochens als Ganzes handelt, so ist derselbe als starres Massensystem aufzufassen. Und dabei ist vornehmlich zu fragen, wie viel Bedingungen vorhanden sind, die das starre Massensystem an der freien Bewegung im Raume hindern. Durch 6 »Bedingungen« wird das System festgelegt. Je nachdem nun 1, 2, 3, 4, 5, 6 Bedingungen der Bewegung auferlegt werden, unterscheidet man in der Kinematik 1, 2, 3, 4, 5, 6 Grade des Zwanges, resp. 5, 4, 3, 2, 1, 0 Grade der Freiheit der Bewegung. In diesem Sinne besitzt z. B. ein mit Nussgelenk am Nebenknochen befestigter Knochen gegen jenen 3 Grade der Freiheit, während ein im Charniergelenk drehbarer Knochen im Allgemeinen nur 1 Grad der Freiheit in seiner relativen Bewegung zu seinem Nachbarknochen hat.

Für eine ideale Gestaltung der Gelenke der oberen Extremität beim Menschen d. h. für den Fall, dass je 2 zu einander gehörende Gelenkflächen ganz genau in einander passten und kein Schlottern der Knochen im Gelenke gestatteten, würden sich folgende Verhältnisse herausstellen. Der Humerus hat in Folge des Nussgelenkes relativ zur Scapula eine Beweglichkeit von 3 Graden der Freiheit. Jeder Punkt desselben ist auf eine bestimmte Fläche, welche in diesem Falle annähernd eine Kugelfläche ist, gezwungen. Auf dieser kann derselbe dann innerhalb gewisser Grenzen jeden beliebigen Ort einnehmen. Das würde nun an sich 2 Grade der Freiheit bedingen, wenn eine Festlegung des Knochens dadurch möglich wäre, dass man einen beliebigen seiner Punkte an einer bestimmten Stelle seiner Fläche festhält. Da man jedoch dann immer noch um eine durch diesen Punkt und den Humeruskopf hindurchgehende Axe

den Knochen rotiren kann, so kommt noch 1 Grad der Freiheit hinzu.

Die Ulna hat in ihrer Bewegung gegen den Humerus 1 Grad der Freiheit, wenn man vom Schlottern im Gelenk absieht, was in gewissem Sinne 2 Grade der Freiheit hervorruft. Unter »Schlottern« soll eine Beweglichkeit verstanden werden, etwa ähnlich dem Wackeln eines durch Ausnutzung nicht mehr genau functionirenden Maschinentheils. Es wird später darauf zurückgekommen werden.

Der Radius hat in seiner Bewegung gegen die Ulna nur 1 Grad der Freiheit. Ein Punkt der Ulna, oder was kinematisch dasselbe ist, ein starr mit der Ulna verbundener Punkt besitzt gegenüber der Scapula 4 Grade, ein Punkt des Radius somit gegenüber der Scapula 5 Grade der Freiheit.

Während man jeden Punkt des Humerus bei feststehender Scapula nur an eine beliebige Stelle einer bestimmten Fläche bringen kann, ist es möglich, jeden Punkt der Ulna an eine beliebige Stelle des Raumes bei feststehender Scapula zu versetzen. Dies ist selbstverständlich auch nur innerhalb gewisser durch die Dimensionen der Knochen gesetzter Grenzen möglich. Was für die Ulna gilt, gilt natürlich um so mehr vom Radius und den Handknochen.

Bei der exacten Untersuchung der Bewegung eines im Nussgelenk spielenden Knochens erstreckt sich das Hauptinteresse auf die Flächen, innerhalb deren die einzelnen Punkte des Knochens sich bewegen können. Bei der Bewegung mit 1 Grade der Freiheit hat man für jeden einzelnen Punkt des Knochens nur eine bestimmte, im Allgemeinen doppelt gekrümmte Curve, auf die er gezwungen ist.

Deshalb wird z. B. die Untersuchung der Bewegung des Radius gegen die Ulna und, wenn man von den Schlotterbewegungen absieht, der Bewegung der Ulna gegen den Humerus sich zunächst damit zu beschäftigen haben, auf welche Curven die verschiedensten Punkte des betreffenden Knochens bei der Bewegung gezwungen sind. Da ein Körper festgelegt ist, wenn man 3 nicht in gerader Linie liegende Punkte von ihm festhält, so müssen sich die sämmtlichen Curven aus denen zu 3 nicht in gerader Linie befindlichen, sonst aber beliebigen Punkten gehörenden ableiten lassen. Man braucht zu diesem Zwecke nur die 3 Abstände des betreffenden

Knochenpunktes, dessen Curve man construiren will, von den 3 Punkten, deren Curve man schon construirt hat, zu messen.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten der letzten 3 Punkte in irgend einer Lage des Knochens mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; und x_3, y_3, z_3, und die Abstände des ersteren Punktes von diesen 3 mit d_1, d_2, d_3, dann läuft die Aufgabe, die zugehörigen Coordinaten dieses Punktes zu finden, auf die elementare aber etwas unbequeme Aufgabe hinaus, die Coordinaten eines der beiden in diesem Falle reellen Schnittpunkte der 3 Kugeln:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = d_1^2$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = d_2^2$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = d_3^2$$

zu bestimmen. Es ergeben sich dann 3 Ausdrücke der Form:

$$x' = \varphi\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, d_1, d_2, d_3)$$
$$y' = \psi\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, d_1, d_2, d_3)$$
$$z' = \chi\,(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, d_1, d_2, d_3),$$

was nur bezeichnen soll, dass die 3 Coordinaten Functionen der in Klammer stehenden Grössen sind. Die wahren Functionswerthe sind wegen ihrer ausgedehnten Form nicht explicit hergeschrieben. Es kam überdies nur darauf an, zu zeigen, nach welchem Princip man bei der Aufstellung der Bahncurven der einzelnen Punkte zu verfahren hat.

Die wichtigste Frage aber bei der Bewegung eines starren Massensystems ist die Analyse der Bewegung des ganzen Systems überhaupt. Ein starres Massensystem kann, wie in der Kinematik bewiesen wird, aus einer Lage in eine von ihr verschiedene durch eine Schraubenbewegung versetzt werden. Untersucht man daher bei der Bewegung eines Knochens die jedesmalige Lage desselben nach successiven endlichen Verrückungen, so kann man für jede dieser Verrückungen eine Axe construiren, um welche der Knochen aus der ersten Lage in die folgende geschraubt werden kann. Demnach kann man die ganze Bewegung mit gewisser Annäherung durch eine Folge von Schraubenbewegungen ersetzen. Hat man bei dieser Construction die verschiedenen Lagen in grossen Entfernungen von einander genommen, so wird die Folge der Schraubenaxenbewegungen mit der wirklichen Bewegung des Knochens nur die mar-

kirten Lagen gemeinsam haben, sonst aber im Allgemeinen von ihr abweichen. Schaltet man aber zwischen je 2 auf einander folgende dieser Lagen andere Lagen des Knochens ein, und construirt dann die zu jeder Verrückung aus der einen Lage in die folgende gehörende Schraubenaxe, so wird man mit der jetzt resultirenden Schraubenaxenbewegung der wirklichen Bewegung schon viel näher kommen. Setzt man den Prozess der Einschaltung neuer Lagen und der Construction der zugehörigen Schraubenaxen fort, so werden die auf einander folgenden Schraubenaxen immer näher aneinander rücken, und die Folge von Schraubenbewegungen wird in immer grösserer Annäherung die wirkliche Bewegung des Knochens realisiren, bis man zuletzt bei Fortgang durch unendlich kleine Verrückungen des starren Massensystems nicht mehr discrete Schraubenaxen, sondern eine stetige durch die Schraubenaxen gebildete, im Allgemeinen windschiefe Fläche erhält. Mit der continuirlichen Folge verschwindend kleiner Schraubenbewegungen um die Erzeugungslinien dieser Fläche ist dann die wirkliche Bewegung geradezu äquivalent.

Nach dem Vorausgegangenen wird man bei der Analyse der gegebenen Bewegung eines Knochens daher sein Augenmerk auf die zu discreten Lagen gehörenden Schraubenaxen zu richten haben und sich fragen, wie gross die Abweichung der wirklichen Bewegung des Knochens von dieser construirten Folge von Schraubenbewegungen ist. Es ist dabei vorausgesetzt, dass die wirkliche Bewegung des Knochens bekannt ist. Dies ist natürlich der Fall, sobald man die Bewegung von 3 nicht in gerader Linie liegenden Punkten, die sich entweder direct auf dem Knochen selbst befinden, oder starr mit ihm verbunden sind, construirt hat.

Sobald man einmal sorgfältig die Bewegung dreier solcher Punkte experimentell festgestellt hat, kann man ohne jeden weiteren Versuch am Knochen selbst die ganze Bewegung in ihren einzelnsten Theilen, also z. B. die Bahncurven der verschiedenen Punkte des Knochens, die Schraubenaxen, die zu aufeinander folgenden Lagen gehören, u. s. w. auf dem Wege der Construction oder der Rechnung finden.

Im Interesse einer genauen Bestimmung der Bahncurven von 3 nicht in gerader Linie befindlichen mit dem Knochen fest ver-

bundenen Punkten liegt es, diese Punkte möglichst fern von der voraussichtlichen ungefähren Lage der Axen anzubringen.

Aus diesem Grunde haben wir bei allen unseren Versuchen 3 leichte aber fest in den Knochen eingesetzte oben fein zugespitzte Holznadeln von 25—50 cm Länge zu den Messungen benutzt. Die feine Spitze der Nadeln gestattete dann eine sehr genaue Messung. Die äusserste Spitze an jeder der Nadeln gab einen starr mit dem Knochen verbundenen Punkt ab, dessen Curve im Raume bei der Bewegung des Knochens experimentell bestimmt wurde. Die Pinselversuche, die eine sorgfältigere Ausführung wohl zuliessen als es bei Heiberg der Fall ist, sind deshalb überhaupt unzulässig, weil die hier in Betracht kommenden Curven im Allgemeinen doppelt gekrümmt sind, also nicht in einer Ebene liegen. Zur Messung einer Raumcurve braucht man bekanntlich 3 Coordinaten. Es ist dabei ganz gleichgültig, wie das einmal für Messungen festgelegte Coordinatensystem im Raume liegt. Aus praktischen Rücksichten haben wir die eine Coordinatenebene horizontal gelegt, und zwar durch eine genau durch Wasserwage horizontal orientirte starke Glasplatte gebildet. Darüber wurde Millimeterpapier gespannt, welches eine bequeme und doch hinreichend genaue Ablesung zweier Coordinaten gestattete. Die Raumcurve wurde auf diese Ebene durch ein Senkel mit fein auslaufender Spitze projicirt und die dritte Coordinate direct gemessen durch Bestimmung des Verticalabstandes der Nadelspitze von ihrer Projection auf die Horizontalebene, mittels eines genauen halbe Millimeter anzeigenden Maassstabes.

Auf diese Weise wurde mehrere Male die relative Bewegung des Radius zur Ulna und die der Ulna zum Humerus gemessen. Im ersten Falle wurde sowohl der Humerus als auch die Ulna durch starke Schrauben unverrückbar fest fixirt; im letzten Falle nur der Humerus. Die Gelenke waren frisch und soweit frei präparirt, dass die Gelenkbewegung ungehindert von Statten gehen konnte, aber die Gelenkkapsel völlig intact und stellenweise noch von einer dünnen Muskelschicht bedeckt gelassen. Durch Anfeuchten mit Glycerin und Alkohol wurde das Austrocknen verhindert.

Die Bewegung der Knochen wurde durch Fäden, an denen Gewichte hingen, hervorgebracht, in der Richtung der Resultante der Faserzüge der bewegenden Muskeln, und ihrer Antagonisten, so dass

jede Ruhelage des Knochens während der Messung durch zwei entgegengesetzt ziehende Fäden gesichert wurde. Die Gewichte wurden möglichst schwach genommen, um jede Beleidigung des Gelenkapparates auszuschliessen.

Es wurden mehrere Versuchsreihen durchgeführt und die zugehörigen Curven construirt. Und zwar wurden die ersten Versuchsreihen nur als vorbereitende Messungen behandelt, bis der Apparat so weit vervollkommnet wurde, dass er leicht und sicher spielte. Nur die letzte Versuchsreihe soll hier in extenso mitgetheilt werden, da nur diese einer etwas eingehenderen Interpretation unterzogen wurde.

Wie schon oben erwähnt, sind noch weitere Versuche, die vorbehalten bleiben, nothwendig, um die individuellen Erscheinungen zu eliminiren.

Die erste Aufzeichnung der Curven, welche 3 mit dem Radius fest verbundene Punkte im Raume beschreiben, liess schon erkennen, dass jede dieser 3 Curven nahezu in einer Ebene lag. Als Projection dieser 3 Curven in diese Ebene ergab sich eine vom Kreise nur sehr wenig abweichende Curve, so dass man schon hieraus schliessen kann, was später noch genauer untersucht wurde, dass die Bewegung des Radius sich nahezu aus Rotationen zusammensetzt, deren Axen nur wenig in ihrer Lage und Richtung von einander verschieden sind. Genaueres darüber folgt weiter unten.

Nachdem so die Bewegung des Radius bei fester Ulna in erster Linie untersucht war, wurde die Ulna losgeschraubt und jetzt von Neuem der Radius schrittweise aus der Supinationsstellung in die Pronationsstellung übergeführt.

Hierbei wurden nicht nur mit Hilfe dreier Nadeln die Curven am Radius construirt, sondern auch durch drei in der Ulna angebrachte Nadeln die Bewegung der Ulna registrirt. Dabei stellte sich heraus, dass die Projection der drei Ulnacurven nahezu auf einen Punkt fiel, d. h. dass die Ulna bei dem successiven Fortrücken des Radius nahezu ihre Stellung unverrückt beibehalten hatte.

Diese geringe Ausdehnung der Ulnacurven braucht nicht unbedingt als Beweis für die absolute Ruhe der Ulna angesehen zu werden, sondern es war ja immerhin möglich, dass die Ulna bei der

Bewegung des Radius gewisse Curven beschrieb und nur während des Festhaltens der einzelnen Stellungen des Radius wieder in ihre Lage zurückfederte. Es war deshalb nöthig, auf eine Methode zu sinnen, um dies sichtbar zu machen. Die Pinselversuche liessen sich auch hier nicht verwerthen, weil die geringen Verrückungen des Radius bei der geringen Dimension und der Undeutlichkeit der Pinselcurven kein deutliches Resultat würden erkennen lassen.

Um die Ulnabewegungen recht deutlich zu machen, wurde in das Capitulum Ulnae ein kleiner Spiegel eingeschraubt und dadurch das Bild eines hellen leuchtenden Punktes in dem sonst dunklen Zimmer an eine Wand geworfen, die ziemlich weit entfernt war, um die Ausschläge möglichst zu vergrössern.

Mit Hilfe dieses Versuches zeigte es sich in der That, wie wir vermutheten, dass die Ulna gewisse Curven bei der Supination und Pronation beschrieb und dann wieder zurückfederte, diese Curven aber durchaus kein constantes Element enthielten. Hierbei wurden die Bewegungen des Radius durch die Hand des Untersuchers erzeugt, ohne Hilfe von Fäden und Gewichten. Die an der Wand sich zeigenden Curven änderten fortwährend ihre Gestalt, je nachdem man verschiedenen Druck zur Erzeugung der Pronation und Supination anwandte, und sich bemühte, verschiedene Axen festzuhalten.

Aus diesem Allen geht hervor, dass man unmöglich von einer bestimmten Bewegung der Ulna reden kann, und es zwecklos ist, für einzelne Theile der Ulna bestimmte Curven construiren zu wollen; vergl. Einthoven, a. a. O. p. 292, Zeile 5 u. ff. von oben.

Der Ulna steht innerhalb gewisser, später noch näher zu bestimmender Grenzen jede beliebige Bewegung frei, was wir in der That dadurch sichtbar gemacht haben, dass wir auf die Knochen einen solchen Druck ausübten, dass das Spiegelbild an der Wand eine vorher beliebig vorgezeichnete Curve beschrieb. Es hängt immer davon ab, welchen Bedingungen die betreffende Bewegung der Ulna unterliegt.

Wenn Heiberg a. a. O. p. 74 nach Fixirung des Humerus und des Radius noch im Stande ist, eine Ulnabewegung auszuführen, was er selbst als Schlussstein seiner Arbeit bezeichnet, so zeigt dies

eben, dass die Ulna im Cubitalgelenke in gewissen Grenzen alle möglichen Bewegungen machen kann.

Ein weiterer Beweis dafür ist der Versuch mit dem eng anschliessenden Lecomte'schen Ringe. Wenn man das Handgelenk in einen Lecomte'schen Ring einspannt, so muss natürlich das Capitulum Ulnae einen Kreis beschreiben; denn wenn man in dem Ringe den Radius bewegen will, so ist dies nur dadurch möglich, dass er das Capitulum Ulnae am Innenrande des festgehaltenen Ringes fortschiebt. Bei festgehaltener Ulna würde sich der Radius überhaupt nicht in dem fest umspannenden Ringe bewegen lassen. Nimmt man einen nicht genau kreisförmigen Ring, sondern einen dem Handgelenk angepassten länglichen (Heiberg, l. c. p. 63 Zeile 6 v. o.), so muss natürlich auch die Curve des Capitulum Ulnae länglich werden (ebenda p. 63 Zeile 24 v. o.).

Es folgt jetzt die Beschreibung unserer letzten Beobachtung der Radius- und Ulnacurven an einem und demselben Präparate, das von einem normalen kräftigen Manne (Selbstmörder) stammte. Es war der linke Arm.

Zuerst sollen die Resultate mitgetheilt werden der Beobachtung von der relativen Bewegung der Ulna zum Humerus. Es zeigt sich zwar, dass jeder Punkt der Ulna innerhalb eines gewissen Flächenstreifens sich bewegen kann, aber die Ulna macht von dieser Beweglichkeit nur dann Gebrauch, wenn man einen seitlichen Druck auf sie ausübt. Wenn man die Ulna ohne jeglichen seitlichen Druck gegen den Humerus bewegt, so wird jeder Punkt von ihr immer eine bestimmte der Art der Gelenkflächen entsprechende Curve beschreiben. Um diese Curve wird es sich jetzt handeln.

Tabelle I.

Die Coordinaten der Punkte der Curve, welche die Spitze der Nadel 1 beschrieb, sind mit x_1, y_1, z_1, die Coordinaten für die Nadel 2 sind mit x_2, y_2, z_2, die für die Nadel 3 mit x_3, y_3, z_3 bezeichnet.

Um die Lage dieser Nadeln, die in die Ulna fest und unverrückbar eingebohrt waren, zur Ulna zu bestimmen, wurden auf der

Ulna drei möglichst weit von einander entfernte Punkte markirt. Der erste derselben, der Punkt α, lag auf der unteren Seite der Ulna, 2 cm oberhalb (proximal) des processus stiloideus. Der zweite Punkt, β, lag in der Mitte der crista interossea, etwas mehr als ein Drittel der Ulnalänge vom unteren Ende entfernt, der dritte Punkt, γ, auf dem processus cubitalis, nahe am Ende der linea obliqua ulnae.

Die Entfernung der Nadel 1 vom Punkte α ist mit α_1 bezeichnet,
vom Punkte β mit β_1,
von γ mit γ_1.

Die Entfernung der Nadel 2 von α ist α_2,
von β ist β_2,
von γ ist γ_2.

Die Entfernung der Nadel 3 von α ist α_3,
von β ist β_3,
von γ ist γ_3.

Diese Grössen hatten folgende Werthe:

$\alpha_1 = 371$ mm, $\beta_1 = 354$ mm, $\gamma_1 = 340$ mm
$\alpha_2 = 236{,}5$ mm, $\beta_2 = 262$ mm, $\gamma_2 = 298{,}5$ mm
$\alpha_3 = 446{,}5$ mm, $\beta_3 = 386$ mm, $\gamma_3 = 339$ mm.

Es wurden im Ganzen 31 Stellungen des Knochens beobachtet. Die in folgender Tabelle in einer Reihe stehenden Zahlen drücken in Millimetern die Coordinaten für ein und dieselbe Stellung aus. Die Stellungen beginnen von der äussersten gezwungenen Extensionsstellung der Ulna und gehen bis zur weitesten Beugung. Sie tragen fortlaufende Nummern von 1 an.

Tabelle I.

	Nadel I.			Nadel II.			Nadel III.		
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3
1	227	289	38	573	172	—3	787	520	55
2	228	282,5	41,5	574	160	10	791	510	53
3	227,5	277	47	576	138	29	795	494,5	52
4	228	270	53	572	131	49	797	478	51
5	226	265	60	566	121,5	70	800	462	51,5
6	226	260	67	563	112,5	89	802,5	448	52,5
7	225	255	74	559	104	110,5	805	431,5	55
8	225	251,5	79,5	556	98,5	125	806	421,5	57
9	222	248,5	86,5	552	95	143	808	407	60
10	221	244	94,5	548	89	163,5	809	396	64
11	220	242	102	545	86	184	811	382,5	69
12	220	240	110,5	538	85	206	810	369,5	78
13	219	236	119	536	84	228	811	357	82,5
14	217	235,5	127	531	85	249	811	345	90
15	215	234	135,5	525	88	270	812,5	333,5	98,5
16	212,5	234	145	520	92	292,5	812	321,5	108,5
17	210	233,5	155,5	512	98	317,5	811	308	120,5
18	206	235	165,5	506	106	341	810	296	132,5
19	204	236	174	501	114,5	360	807	286,5	144
20	202	239,5	183	494	124,5	381	808	277,5	156
21	199	243	192,5	485	137	401	804	267	170,5
22	196	247,5	201,5	477	151,5	421,5	801,5	259	185,5
23	193	251	208	470	164	435,5	800	255	198
24	190,5	258	217	462	182	455	796	247,5	216
25	186	268	226	452	208	475	791	239,5	237
26	181	277,5	233	443	227,5	489	788	236	254
27	177	285	239	436	248	502	782	231,5	271
28	175	292	242	431	262	509	778	230	284
29	174,5	298	245,5	426	278	515	774	230	295,5
30	171	309	250	417	305	525	767	229	315,5
31	166	318	252	412	326	529,5	762,5	229,5	330

Hierzu Tafel I und Tafel II. (Die ausgezogenen Curven.)
Die Zahlen geben Centimeter an.

Tafel I ist die Projection der Curven auf die xy-Ebene; Tafel II die Projection der Curven auf die xz-Ebene. Diese beiden Projectionen reichen aus, um alles Uebrige daraus ableiten zu können. Aus den drei Curven gewinnt man die Coordinaten $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$; $x_\beta, y_\beta, z_\beta$; $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ für die Curven der drei Punkte α, β, γ mit Hilfe obiger Formeln, die sich hier in folgender Weise schematisch schreiben lassen:

$$\begin{aligned}
x_\alpha &= \varphi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\\
y_\alpha &= \psi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\\
z_\alpha &= \chi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\\
x_\beta &= \varphi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\\
y_\beta &= \psi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\\
z_\beta &= \chi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\\
x_\gamma &= \varphi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\\
y_\gamma &= \psi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\\
z_\gamma &= \chi\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).
\end{aligned}$$

Will man die Coordinaten x_p, y_p, z_p der Curve irgend eines anderen Punktes p der Ulna bestimmen, so wird man jetzt, nachdem man die Coordinaten der Punkte α, β, γ berechnet hat, diese Coordinaten und die Abstände $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ des Punktes p von den drei Punkten α, β, γ benutzen. Es stellen sich dann, wie ohne Weiteres ersichtlich, folgende Formeln heraus:

$$\begin{aligned}
x_p &= \varphi\ (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, x_\beta, y_\beta, z_\beta, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, p_\alpha, p_\beta, p_\gamma)\\
y_p &= \psi\ (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, x_\beta, y_\beta, z_\beta, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, p_\alpha, p_\beta, p_\gamma)\\
z_p &= \chi\ (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, x_\beta, y_\beta, z_\beta, x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma, p_\alpha, p_\beta, p_\gamma).
\end{aligned}$$

Damit ist die Möglichkeit gezeigt, aus den experimentell gefundenen Curven die Curven irgend eines Punktes auf der Ulna abzuleiten. Kommt es von vornherein darauf an, die Curve nur e i n e s ganz bestimmten Punktes des Knochens zu finden, so kann man sich natürlich die complicirte Rechnung dadurch ersparen, dass man die Nadeln in geeigneter Weise anbringt. Z. B. würde diese Aufgabe sich sehr einfach lösen lassen, wenn man zwei Nadeln mit ihren Spitzen so stellt, dass die Spitzen mit dem betreffenden Punkte auf dem Knochen in gerader Linie liegen und der Knochenpunkt von

der näheren Nadelspitze dieselbe Entfernung hat, wie diese von der entfernteren Spitze (Angabe des Herrn Fiedler). Im Allgemeinen wird man aber den Versuch nicht nach einer bestimmten Richtung hin gemacht haben, und dann muss man obige Formeln anwenden.

Wenn man nun an die Construction der Schraubenaxen herangeht, so drängen sich a priori zwei Gesichtspunkte auf, welche die im Allgemeinen etwas complicirte Construction der Schraubenaxen für diese Bewegung wesentlich vereinfachen.

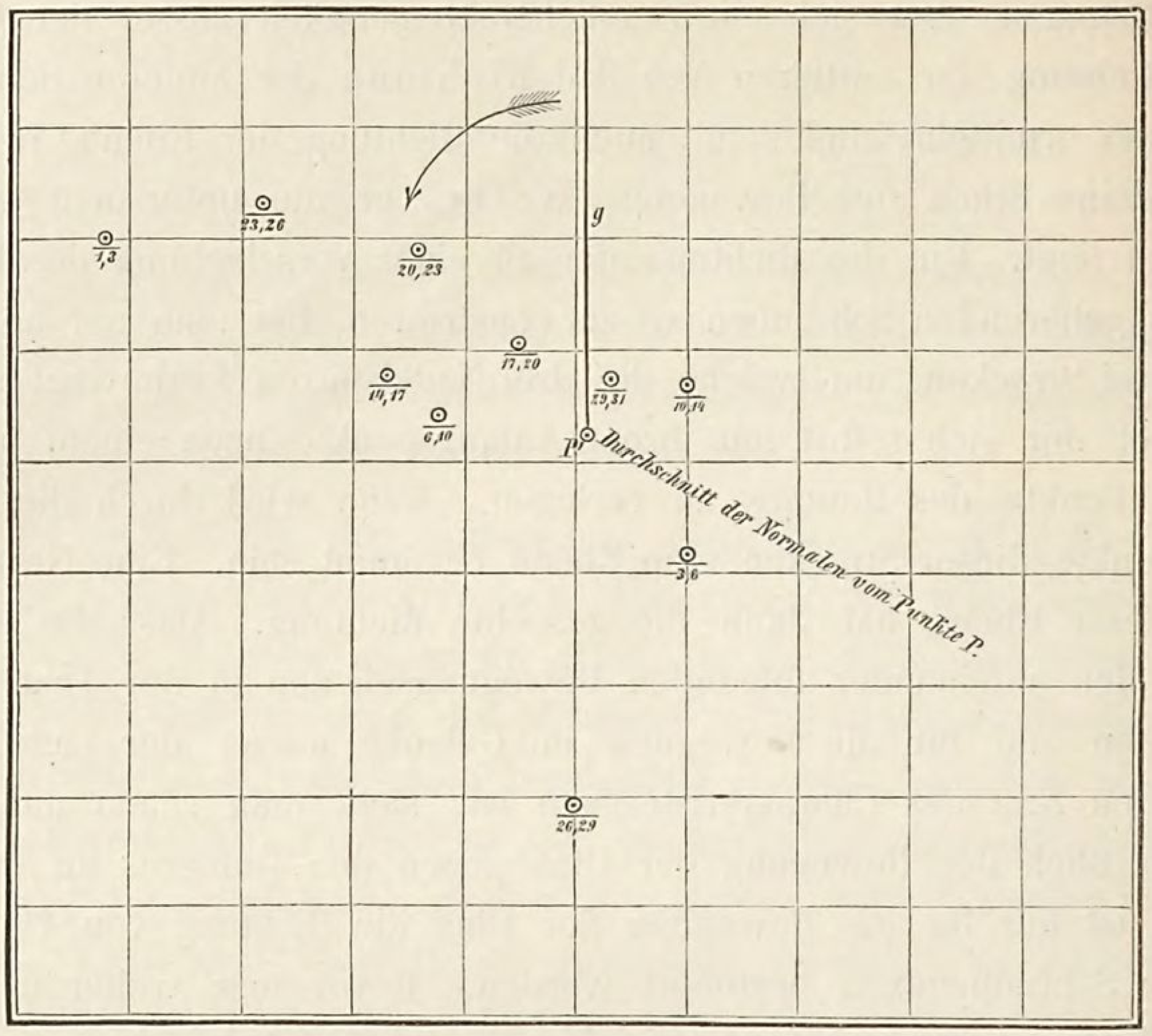
Erstens kann man annehmen, dass die Bewegung auf den einzeln herausgegriffenen Strecken nur sehr wenig von einer reinen Rotation abweicht, dass also die Höhe des Schraubenganges für jede einzelne der discreten Schraubenbewegungen verschwindend klein oder doch wenigstens so klein ist, dass man bei den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtung einerseits und der Construction andererseits ihre wahre Grösse nicht ermitteln kann. Dies hat sich auch in der That bei einem Versuche, die Höhen der Schraubengänge zu construiren, herausgestellt, indem dieselbe eine Grösse von 0,3 Millimeter nicht überstieg. Obgleich wir mit der peinlichsten Genauigkeit die Versuche angestellt haben, so sind doch für die so kleine Grösse die Fehlerquellen beträchtlich genug, um dieselbe als Resultat illusorisch zu machen.

Zweitens werden die einzelnen aufeinander folgenden Schraubenaxen so nahe an einander zu liegen kommen, dass man auch von der genauen Ermittelung der Lage der aufeinander folgenden Schraubenaxen zu einander absehen muss und sich darauf zu beschränken hat, die genaue Lage einer in gewissem Sinne mittleren Schraubenaxe zu construiren. In deren unmittelbaren Nähe werden sich dann alle anderen Schraubenaxen vorfinden. Ueberdies sind die individuellen Verschiedenheiten der Gelenke so gross, dass auch, wenn man in der Lage wäre, bei beiden erwähnten Punkten ganz exacte Bestimmungen zu treffen, doch das Resultat sich bei jedem einzelnen Gelenke ganz verschieden stellen würde. Damit soll jedoch nicht gesagt sein, dass es überhaupt am menschlichen Körper keine Gelenkbewegungen von 1 Grade der Freiheit giebt, für die sich die wahre Lage der Schraubenaxen construiren lässt. Es gilt dies nur für die hier betrachteten Gelenke.

Dagegen lässt sich mit ziemlicher Genauigkeit ausser der Lage und Richtung der mittleren Axe die Richtung der anderen Schraubenaxen ermitteln, und somit auch die Richtung der Ebene, in der das kleine Stück der Bewegung, welches gerade untersucht wird, nahezu liegt. Um die Richtung der zu einer Verschiebung des Knochens gehörenden Schraubenaxe zu construiren, hat man nur nöthig, die drei Strecken, um welche die drei Nadelspitzen fortbewegt sind, parallel mit sich selbst mit ihrem Anfangspunkte nach einem beliebigen Punkte des Raumes zu verlegen. Dann wird durch die drei Endpunkte dieser Strecken eine Ebene bestimmt sein. Eine Normale zu dieser Ebene hat dann die gesuchte Richtung. Dass die Richtung der aufeinander folgenden Bewegungsebenen in der That verschieden und für die Bewegung im Gelenke ausser der Lage der mittleren Axe das Charakteristischste ist, sieht man schon auf den ersten Blick der Bewegung der Ulna gegen den Humerus an. Vorläufig ist nur für die Bewegung der Ulna die Richtung von 10 discreten Schraubenaxen bestimmt worden. Bevor man weiter in der Einschaltung neuer Lagen bei der Construction der Axen gehen wollte, um die noch näher an einander liegenden Axen aufzusuchen, muss man erst einmal genauer untersuchen, ob auch bei anderen Präparaten die Verhältnisse nahezu dieselben sind, oder ob nicht etwa schon an dieser Stelle eine genauere Untersuchung sich als zwecklos herausstellen würde. Von einer Construction der zur Bewegung gehörigen Schraubenaxenfläche kann natürlich hier gar keine Rede sein.

Zur Construction der 10 discreten Axen wurden die in obiger Tabelle mit 1, 3, 6, 10, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 31 bezeichneten Lagen benutzt, und somit die Verrückungen (1,3), (3,6), (6,10), (10,14), (14,17), (17,20), (20,23), (23,26), (26,29), (29,31) untersucht.

Um die gewonnenen Resultate in möglichst übersichtlicher Form darzustellen, wurden die 10 Schraubenaxen und die mittlere Axe, die durch die Längsaxe der Trochlea des Humerus gegeben ist, nach einem bestimmten Punkte P parallel mit sich selbst verlegt. In der Entfernung von 20 cm medianwärts wurde dann die zur mittleren Axe normale Ebene construirt und die Durchschnittspunkte der 10 Axen mit dieser Ebene gesucht. Die Durchschnittspunkte gruppirten sich dann in folgender Weise:



Legt man durch die mittlere Axe und eine im Durchschnittspunkt P' der mittleren Axe vertical nach oben verlaufende, in der Ebene gelegene Gerade g (siehe Fig.) eine Ebene, so bilden die durch die mittlere Axe und die einzelnen Schraubenaxen gelegten Ebenen mit jener folgende Winkel in der in der Figur angezeigten Richtung:

(1,3)	(3,6)	(6,10)	(10,14)	(14,17)	(17,20)	(20,23)	(23,26)	(26,29)	(29,31)
68° 52′	219° 17′	81° 15′	288° 25′	75° 10′	32° 1′	43° 9′	56° 5′	178° 22′	333° 26′

Die einzelnen Axen bilden mit der mittleren Axe die Winkel:

(1,3)	(3,6)	(6,10)	(10,14)	(14,17)	(17,20)	(20,23)	(23,26)	(26,29)	(29,31)
13° 13′	4° 9′	3° 43′	2° 43′	5°	3° 45′	6° 17′	9° 56′	9° 31′	1° 17′

Beweglichkeit der Ulna.

Wie oben erwähnt wurde, steht jedem Punkte der Ulna innerhalb eines gewissen Flächenstreifens jede Bewegung zu, woraus sich die zwei Grade der Freiheit erklären; denn wenn man einen Punkt an einer bestimmten Stelle seiner Fläche festhält, so ist der ganze Knochen dadurch festgelegt. Der zu einem bestimmten Punkte der Ulna gehörige Flächenstreifen lässt sich natürlich wieder aus den zu drei Punkten gehörenden Flächenstreifen ableiten, auf die oben angegebene Weise. Um sichtbar zu machen, wie die schon gezeichneten Curven der drei Nadelspitzen auf ihrer Fläche verlaufen, construirten wir wieder zu den schon früher benutzten Nadelspitzen die Flächen. Und zwar wurden die seitlichen Verschiebungen der Ulna durch einen seitlichen Zug mittels je eines Gewichts von 1 Kilo hervorgebracht. Diese Flächenstreifen wurden vorläufig einer genaueren Untersuchung nicht unterzogen.

Es wurden dabei folgende Werthe gewonnen:

Tabelle II.

a) Medianwärts.

	Nadel I.			Nadel II.			Nadel III.		
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	224	299	36	565	164	2,5	795	500	55,5
2	223	291	44	561	141	31	801	473	54
3	220,5	284	54,5	549	120	67	803	441	55
4	218	276	64	543	101	100	808	417	58
5	215	268	80	532	91	142	810	387	66
6	213	260	90	527	84	177,5	812,5	365	78
7	210	256	103	517	82	219,5	813,5	340	93,5
8	208	252,5	115,5	505	85	260,5	814	317,5	113
9	207	249	128	499	92	295	813	301,5	129
10	204	248	140	488	101	328,5	811	288	148,5
11	202	247	151	482	112	354,5	810	278	164
12	197	252	168	465	136,5	398,5	806	259	195
13	192	257	185	452	166	435	798	248	226
14	185	267	198,5	438	198	464,5	792	240	253
15	180	280	214	425	233	491	783	234	280,5
16	173	299	224,5	408	280	512	771	232	315,5
17	164	325	236	392	340	529	756	233	354,5

b) Lateralwärts.

	Nadel I.			Nadel II.			Nadel III.		
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	233,5	280	35	586	173,5	0	786	527	56,5
2	236	268	41	586	154	24	793	509	54
3	235	253	56	583,5	130	62	798	481	51,5
4	234	243	69,5	578	114	96	802	457	53
5	232	234	87,5	573	100	137	808	428	58
6	230	226,5	102,5	569	92	173,5	810	406	63,5
7	226	222	122	558	87	216,5	813	378,5	73
8	223	219	140	550	89	258,5	814	355	87,5
9	219	219,5	158	541	94	294,5	814	335	99,5
10	214	222	174,5	530	103	329	814	315	115,5
11	211	225	187	519	115	359,5	812	299	132,5
12	204	234,5	203,5	503	136	399	808	278	158,5
13	195	250	231	490	168	443	801	257	186
14	189	265	241	471	201	474	795	243	219
15	180	284	252	454	240	501	786	233	253
16	173	309	260,5	436	287,5	522	774	226	291,5
17	163	339	264,5	416	350	539	759	229	340

Siehe hierbei Tafel I und Tafel II. Die stark und schwach punktirten Curven.

Relative Bewegung des Radius zur Ulna.

Zur Bestimmung der Bewegung des Radius zur Ulna benutzten wir drei Nadeln, No. I, II, III, welche bezüglich von drei, gleich noch näher zu bezeichnenden Punkten a, b, c auf dem Radius die Abstände hatten:

$$a_1 = 514 \text{ mm}, \quad b_1 = 493{,}5 \text{ mm}, \quad c_1 = 478 \text{ mm}$$
$$a_2 = 303 \text{ mm}, \quad b_2 = 361 \text{ mm}, \quad c_2 = 434 \text{ mm}$$
$$a_3 = 270 \text{ mm}, \quad b_3 = 232 \text{ mm}, \quad c_3 = 225 \text{ mm}.$$

Der Punkt a lag an der Aussenseite des Radius 2 cm über dem proc. styloideus, der Punkt b auf der crista interossea direct gegenüber dem Punkte β der Ulna, der Punkt c auf dem collum radii auf der unteren Seite bei extremer Supinationsstellung.

Die drei Punkte α, β, γ auf der jetzt festgeschraubten Ulna, die

schon oben pag. 325 benutzt wurden, besassen dabei bezüglich die rechtwinkligen Coordinaten:

$$x_\alpha = 538 \text{ mm}, \quad y_\alpha = 200 \text{ mm}, \quad z_\alpha = 207 \text{ mm}$$
$$x_\beta = 531 \text{ mm}, \quad y_\beta = 291 \text{ mm}, \quad z_\beta = 212 \text{ mm}$$
$$x_\gamma = 512 \text{ mm}, \quad y_\gamma = 386 \text{ mm}, \quad z_\gamma = 192 \text{ mm}.$$

Es sind im Ganzen 22 Stellungen, von der äussersten Supination ausgehend, bis zur äussersten Pronation beobachtet worden, deren Coordinaten in folgender, nach den obigen Tabellen unmittelbar verständlichen Tabelle niedergelegt sind.

Tabelle III.

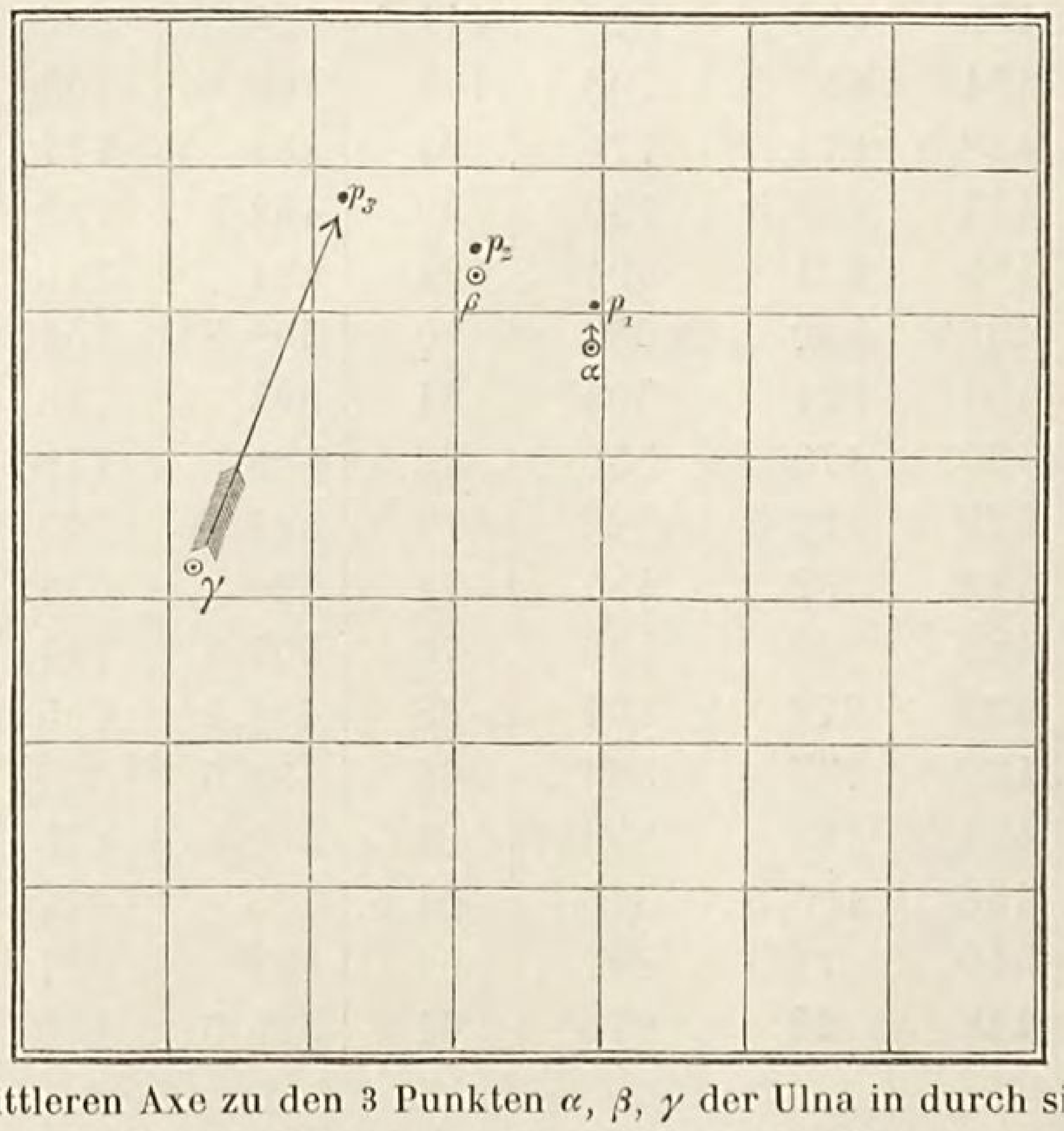
	Nadel I.			Nadel II.			Nadel III.		
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
1	724	474	635,5	869	122	240,5	599	352	3
2	701	473	649	864	120	262,5	614	352	9
3	629	464	671,5	854,5	117	309,5	644	354	24
4	584	461	681,5	842	115	338	661	357	36,5
5	554	458	683	833	114	357,5	674	357	46
6	517	455	685	822	111,5	378,5	685	356	57
7	467	451	683	798	108	409	703	357	76
8	420	448,5	674	776	104	434	717	356	95
9	360	444	655,5	739	99	464,5	732	356	123,5
10	285	439	621	694	94	494	745	355	159,5
11	238	436	590	659	90	508,5	751	355	185,5
12	168	431	521	593	84	525	753	353	232,5
13	134	430	479	556	79,5	528	748	352	259
14	110	429	442,5	526	77,5	527	743	351	280
15	85	428	392	487	74	522	734	349	306
16	64	429	320	436	70	507,5	717	346	340
17	55	430	272	407	68	494,5	705	344	356,5
18	53	432	233	383	66	480,5	692	342	371,5
19	55	434,5	183	353	64	460,5	675	339	388,5
20	66	438	105,5	316	61,5	425	644	336	411
21	77	440	72,5	297	61	403	627	334	420,5
22	98	442	25	276	61	375,5	606	332	429

Hierzu Tafel III und Tafel IV.

Tafel III ist wieder die Projection der Curven auf die xy-Ebene, Tafel IV die Projection auf die xz-Ebene.

Um die Curve eines Punktes auf dem Knochen aus den drei construirten Curven abzuleiten, braucht man nur die oben über die Ulna vorgeführten Betrachtungen zu übertragen. In den Formeln hat man dann die drei Buchstaben α, β, γ mit den jetzt beim Radius verwandten Buchstaben a, b, c zu vertauschen, um dann die Formeln, die ja ohnedies nur symbolisch angegeben waren, zu erhalten.

Ferner gilt das, was oben über die Construction der Schraubenaxen gesagt wurde, in noch viel stärkerem Masse hier; denn es stellte sich heraus, dass die Curve eines Punktes des Radius noch viel geringere Ausweichungen vom Kreise zeigte, als irgend eine Curve bei der Ulna. Aus dem Grunde kann man sich hier erst recht auf die Construction einer mittleren Axe und die Construction der Richtungen einiger discreter Schraubenaxen beschränken. Wenn man bei der Bewegung der Ulna zum Humerus über die annähernde Lage der mittleren Axe nicht im Zweifel sein konnte, so ist die Lage der mittleren Axe für die Bewegung des Radius zur Ulna nicht genau von vornherein einzusehen. Wenn man in den drei Punkten α, β, γ der jetzt festgeschraubten Ulna auf der Längsrichtung der Ulna normale Ebenen legt, so zeigt sich, dass die

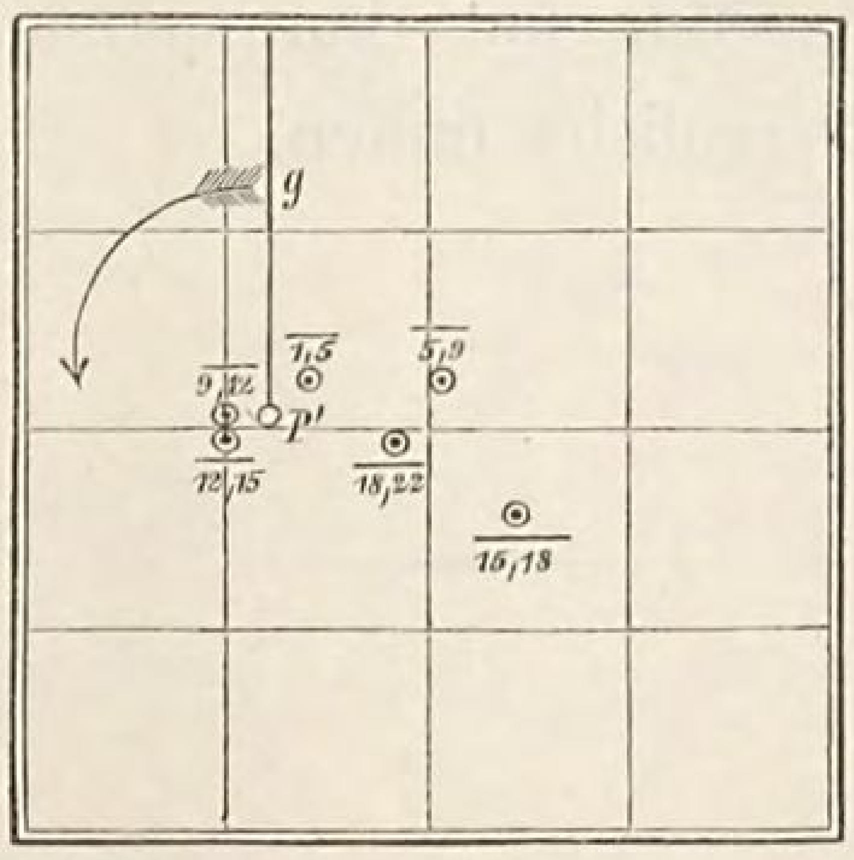


Lage der mittleren Axe zu den 3 Punkten α, β, γ der Ulna in durch sie gehenden Normalebenen zur Längsrichtung der Ulna.

mittlere Axe für die Bewegung des Radius diese drei Ebenen in drei Punkten p_1, p_2, p_3 durchschneidet, welche die in der Figur an-

gegebene Lage zu den drei Punkten α, β, γ besitzen. Der Einfachheit der Darstellung halber sind diese drei in drei verschiedenen parallelen Ebenen befindlichen Punkte so gezeichnet, als ob sie in einer Ebene lägen. Die mittlere Axe ist auch auf Tafel III und IV aufgezeichnet.

Da wie schon bemerkt, und wie sich durch Projection der experimentell gefundenen Curven auf die zur mittleren Axe normale Ebene erwies, die Curve eines Punktes des Radius nur sehr wenig vom Kreise abweicht, so kann man sich in diesem Falle auf die Construction einer sehr geringen Anzahl von Schraubenaxen beschränken. Damit wird man mit hinreichender Genauigkeit für unseren Zweck die Bewegung des Radius analysirt haben. Zur Construction der Schraubenaxen wurden die in der Tabelle mit 1, 5, 9, 12, 15, 18, 22 bezeichneten Lagen benutzt. Dadurch wurden sechs Schraubenaxen gewonnen, die wir analog der früheren Bezeichnungsweise mit (1,5), (5,9), (9,12), (12,15), (15,18), (18,22) bezeichnen. Zur übersichtlichen Darstellung der verschiedenen Richtungen der Schraubenaxen wurden dieselben wieder nach einem Punkte P im Raume verlegt, und ihre Durchschnitte mit der Ebene gesucht, welche um 20 cm nach dem Humerus zu von dem Punkte entfernt lag und senkrecht auf der Richtung der mittleren Axe stand. Es ergab sich dann folgende Figur, in der der Durchschnitt der mittleren Axe mit P' bezeichnet ist.



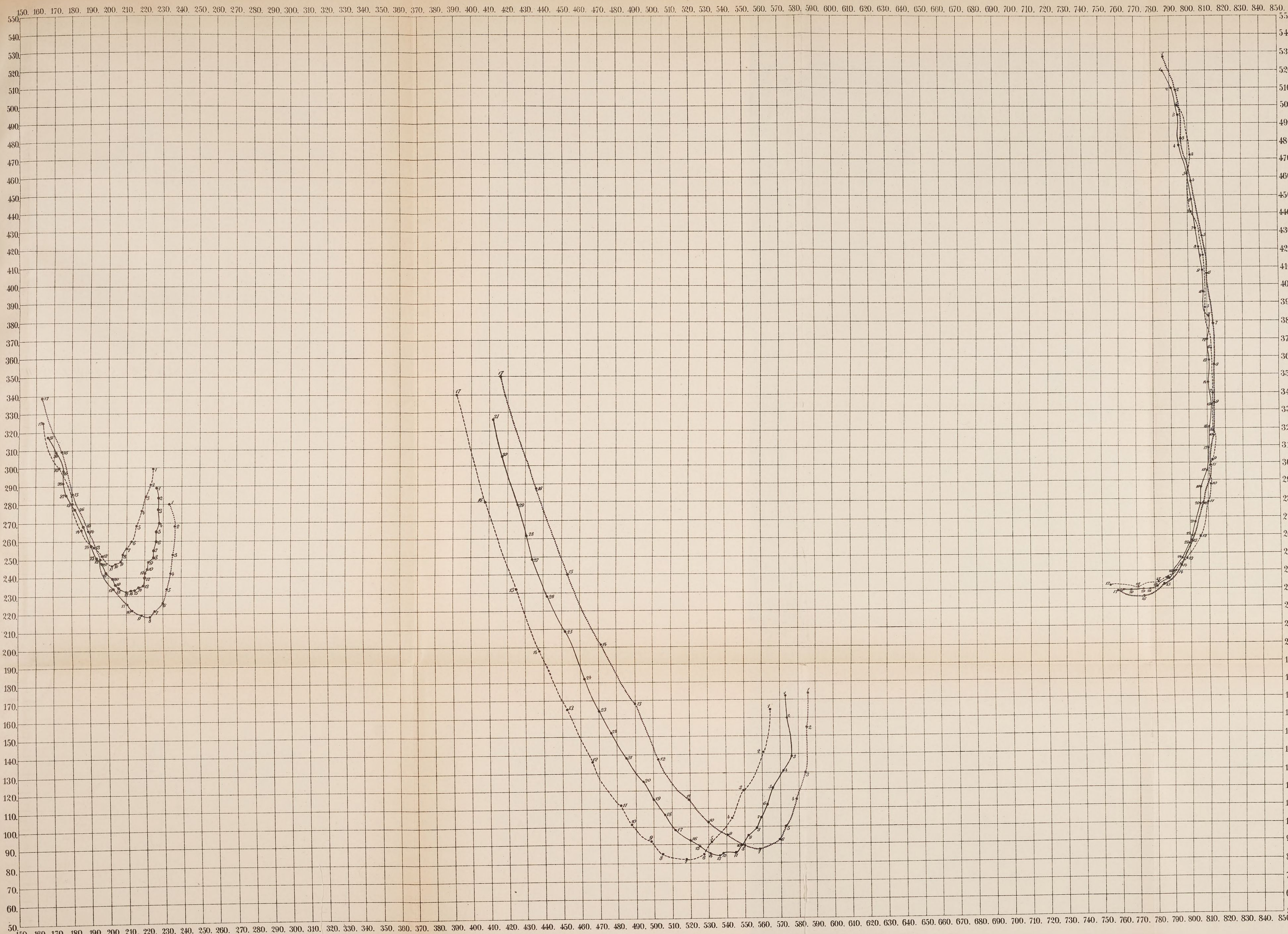
Legt man wieder durch die mittlere Axe eine verticale Ebene, so bilden mit dem oberen Theile derselben die Ebenen, welche durch die mittlere Axe einerseits und die einzelnen Schraubenaxen andererseits hindurchlaufen, folgende Winkel in der in der Figur angezeigten Richtung:

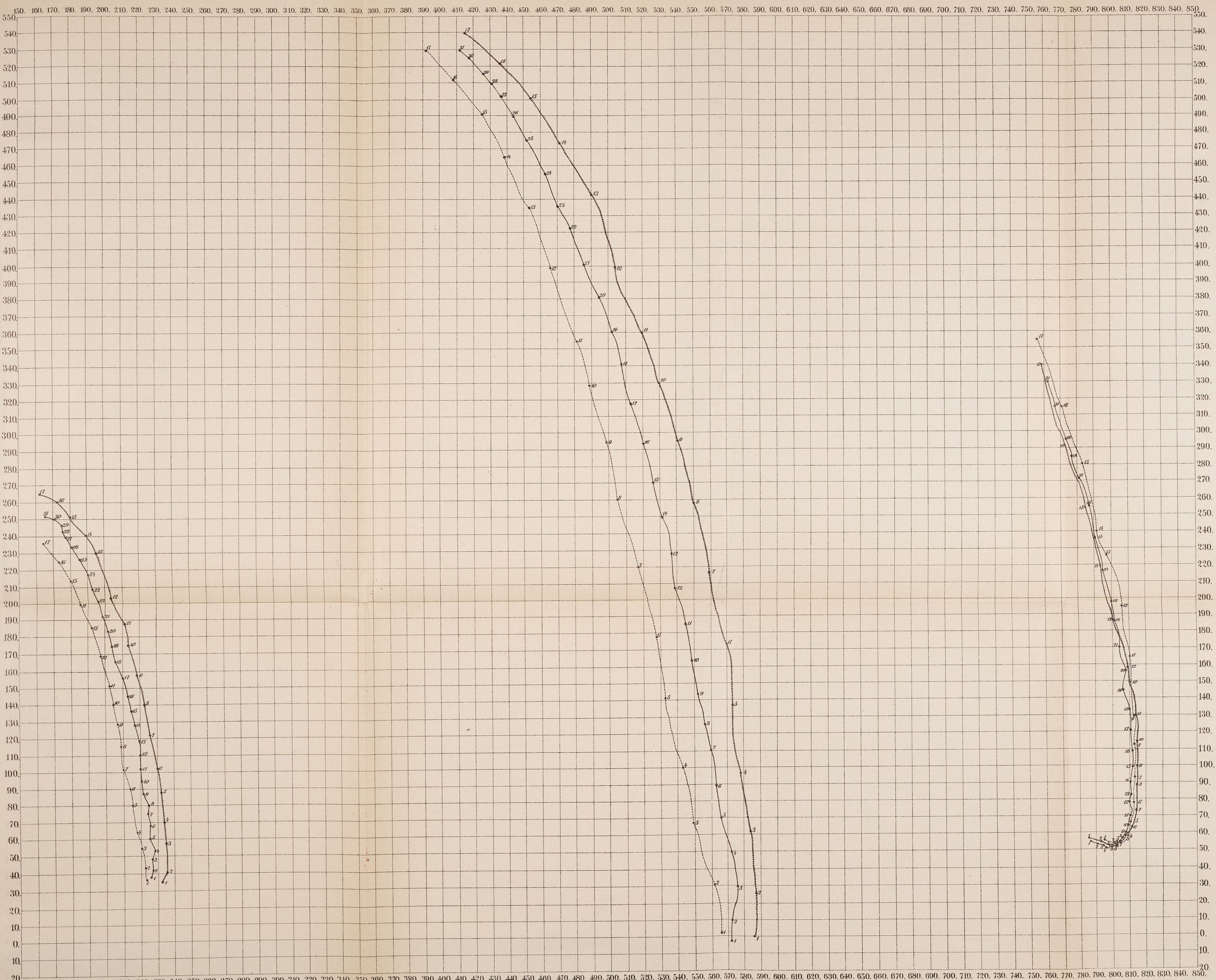
(1,5)	(5,9)	(9,12)	(12,15)	(15,18)	(18,22)
323° 8′	281° 53′	90°	111° 48′	251° 49′	255° 58′


Die einzelnen Axen bilden mit der mittleren Axe den Winkel:

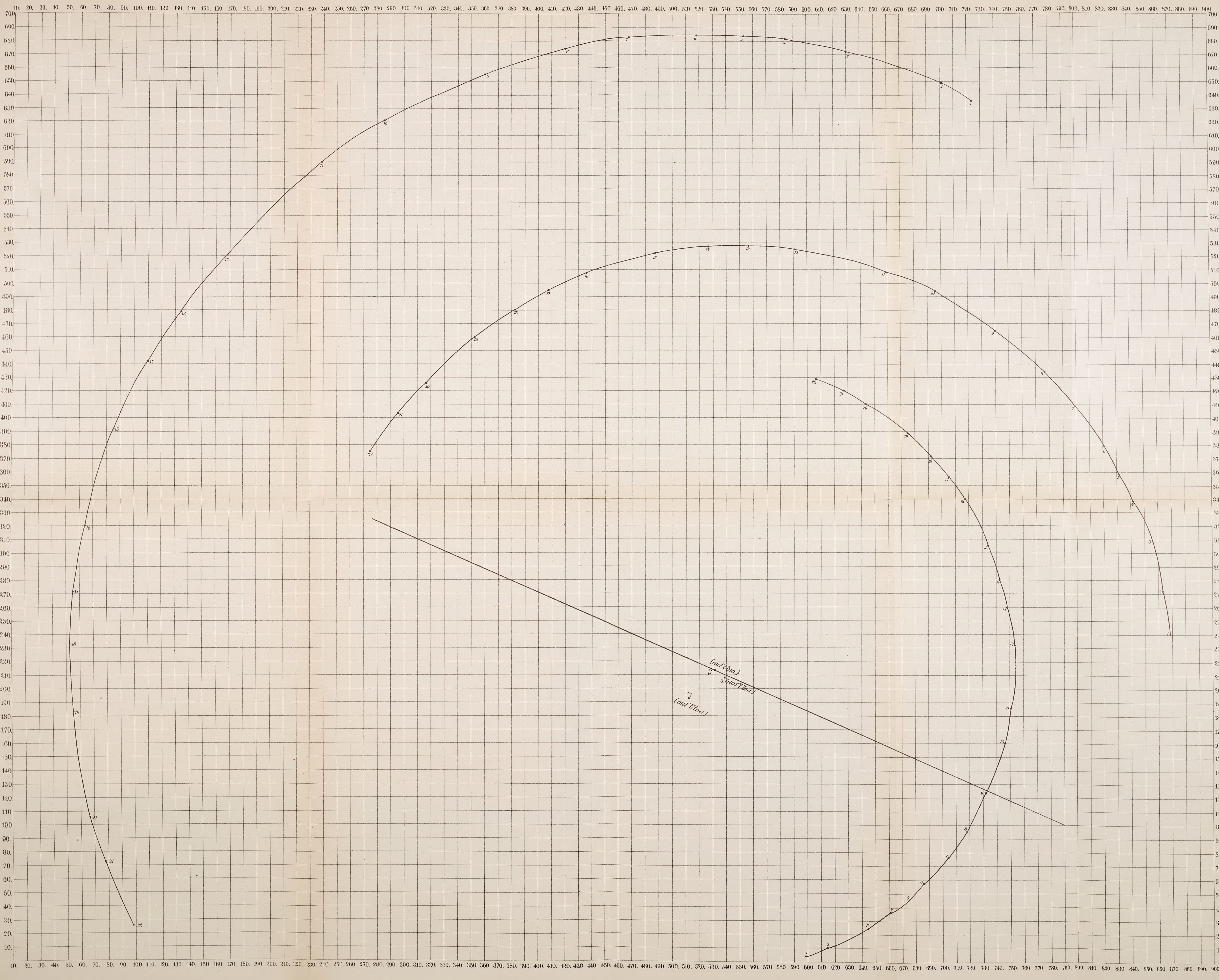
(1,5)	(5,9)	(9,12)	(12,15)	(15,18)	(18,22)
44′	2° 26′	43′	45′	3° 35′	1° 52′

Durch diese Darlegung unserer Versuche ist der Beweis erbracht, dass die kinematische Methode sich auf die Untersuchung des menschlichen Gelenkmechanismus anwenden lässt; hierauf kam es zunächst nur an. Ob die Handhabung der Methode einer Vervollkommnung fähig ist, ob sich zum Beispiel das mühsame Ablesen der Coordinaten durch eine optische Selbstregistrirung ersetzen lässt u. s. w., muss die Zeit lehren. Bei einer ausgedehnten Anwendung mathematischer Methoden auf dem Gebiete der menschlichen nicht nur, sondern der Anatomie überhaupt wird es nicht ausbleiben, dass ebenso wie die Anatomie auch die Kinematik selbst ihrerseits an Resultaten bereichert werden wird. Sicher finden sich in den Organismen kinematische Probleme schon gelöst, welche die Kinematik nur mit grossen Schwierigkeiten lösen kann. Namentlich ist sicher zu erwarten, dass in der Natur mit den sparsamsten Mitteln gewisse Grade der Freiheit sich realisirt finden.




150. 160. 170. 180. 190. 200. 210. 220. 230. 240. 250. 260. 270. 280. 290. 300. 310. 320. 330. 340. 350. 360. 370. 380. 390. 400. 410. 420. 430. 440. 450. 460. 470. 480. 490. 500. 510. 520. 530. 540. 550. 560. 570. 580. 590. 600. 610. 620. 630. 640. 650. 660. 670. 680. 690. 700. 710. 720. 730. 740. 750. 760. 770. 780. 790. 800. 810. 820. 830. 840. 850.
550. 540. 530. 520. 510. 500. 490. 480. 470. 460. 450. 440. 430. 420. 410. 400. 390. 380. 370. 360. 350. 340. 330. 320. 310. 300. 290. 280. 270. 260. 250. 240. 230. 220. 210. 200. 190. 180. 170. 160. 150. 140. 130. 120. 110. 100. 90. 80. 70. 60. 50. 40. 30. 20. 10. 0. 10. 20.


γ (auf Ulna)
β (auf Ulna)
α (auf Ulna)


β (auf Ulna)
α (auf Ulna)
γ (auf Ulna)

ÜBER DIE

ELLIPTISCHEN NORMALCURVEN

DER

N^{ten} ORDNUNG

UND

ZUGEHÖRIGE MODULFUNCTIONEN DER N^{ten} STUFE

VON

F. KLEIN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1885.

Vom Verfasser übergeben den 5. Mai 1885.
Der Abdruck vollendet den 15. Juni 1885.

ÜBER DIE

ELLIPTISCHEN NORMALCURVEN DER N^{ten} ORDNUNG

UND

ZUGEHÖRIGE MODULFUNCTIONEN DER N^{ten} STUFE

VON

F. KLEIN.

Unter elliptischen Normalcurven der n^{ten} Ordnung sollen im Folgenden diejenigen Curven n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins verstanden sein, die im Raume von $(n-1)$ Dimensionen gelegen sind, die also, unter $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ homogene Coordinaten verstanden, mit Benutzung n-gliedriger, linear unabhängiger σ-Producte folgendermassen definirt werden können:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho x_0 = A \cdot \prod_1^n \sigma(u-a_i), \\ \varrho x_1 = B \cdot \prod_1^n \sigma(u-b_i), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot, \\ \varrho x_{n-1} = N \cdot \prod_1^n \sigma(u-n_i), \end{cases}$$

wo $\Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots = \Sigma n_i$ zu nehmen ist*). Ich werde zunächst untersuchen, wie sich diese Curven unter Zugrundelegung verschiedener ausgezeichneter Coordinatensysteme algebraisch darstellen, sodann den Übergang erforschen, der von der einen Darstellungsweise zur anderen hinüberführt und endlich die solchergestalt gewonnenen Resultate für die Theorie der Moduln n^{ter} Stufe verwerthen. Dabei beschränke ich mich, wie gleich hier bemerkt sei, durchweg auf den Fall eines ungeraden n, was aber keineswegs durch die Methode der Untersuchung verlangt wird, sondern nur durch Rücksichten praktischer Natur geboten schien. Die Untersuchungen über Theilwerthe der σ-Function, welche ich im ersten Abschnitte

*) Was die geometrische Theorie dieser Curven angeht, so vergleiche man namentlich auch: Clifford, *on the Classification of Loci*, Philosophical Transactions, London 1878.

zusammenstelle, wolle man als eine Art von Einleitung betrachten; ich musste sie gesondert voraufschicken, um bei der Betrachtung der Normalcurven nicht immer wieder durch die Ableitung von Hülfsformeln unterbrochen zu werden.

Die Ideen, welche hiernach im Zusammenhange entwickelt werden sollen, sind dieselben, welche ich vor nun fünf Jahren in einer der Münchener Akademie vorgelegten Note skizzirt habe*) und die dann für $n = 3$ und $n = 5$ von Herrn Bianchi in einer wichtigen Arbeit, die ich noch oft zu nennen haben werde, weiter ausgeführt worden sind**). Eben diese Ideen liegen meiner weiteren Note: *über gewisse Theilwerthe der ϑ-Function****) zu Grunde, in der man u. a. bereits den grösseren Theil der Resultate, welche nun für Moduln n^{ter} Stufe in systematischer Weise abgeleitet werden sollen, in knapper Form zusammengestellt finden wird. Ich bin damals durch äussere Verhältnisse von der ausführlichen Darlegung der betreffenden Überlegungen abgehalten worden†), und nun erst im vergangenen Herbst zu demselben wieder zurückgekehrt, wo ich dann zunächst in den Berichten der königl. Sächsischen Gesellschaft eine vorläufige Note publicirte††), um jetzt eine zusammenhängende Entwickelung folgen zu lassen. Vergleicht man den Inhalt der letztgenannten Note oder auch die folgende Darstellung mit den vorgenannten früheren Arbeiten, so wird man bemerken, dass ich mich jetzt mehr von den directen Methoden der analytischen Geometrie entfernt und der eigentlichen Theorie der doppeltperiodischen

*) Sitzungsberichte der Münchener Akademie vom Juli 1880: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (vergl. auch Math. Annalen Bd. 17 p. 133 ff., wo die Note wieder abgedruckt ist).

**) *Über die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung,* Bd. 17 der Math. Annalen, p. 234 ff.

***) Bd. 17 der Math. Annalen, p. 565 ff.

†) In der Zwischenzeit hat Herr Lange den Fall $n = 4$ in seiner Dissertation bearbeitet (Leipzig 1881): *Über die 16 Wendeberührungspuncte der Raumcurve vierter Ordnung erster Species* (abgedruckt im 28. Bande von Schlömilch's Zeitschrift).

††) Sitzung vom 14. November 1884: *Zur Theorie der elliptischen Functionen n^{ter} Stufe.* Anschliessend an diese Note habe ich im Wintersemester 1884/85 in meinem Seminare zahlreiche Vorträge über denselben Gegenstand gehalten.

Functionen zugewandt habe. Ich hätte vielleicht ganz die geometrische Ausdrucksweise vermeiden und nur von n-gliedrigen σ-Producten und den zwischen ihnen bestehenden algebraischen Relationen sprechen sollen: es würde sich dann in der vorliegenden Abhandlung um solche Entwickelungen handeln, die man *der Lehre von der Transformation und Theilung der elliptischen Functionen* zuweisen kann. Wenn ich trotzdem die geometrische Redeweise nicht habe fallen lassen, so geschah dies einmal, um die Geometer (im engeren Sinne des Wortes) für die hier vorliegenden Fragen zu interessiren, dann aber namentlich auch, weil ich gerne an dem Grundsatze festhalte, dass auch in Fragen der reinen Analysis die analytisch-geometrische Darstellung sehr wesentlich zur klaren Erfassung der Aufgabe und überhaupt zur Formulirung zweckmässiger Fragestellungen beiträgt.

Was die Bezeichnungen, die ich verwende, angeht, so bemerke ich gleich hier das Folgende.

Zunächst, was die Formeln betrifft, so schliesse ich mich theils an Jacobi, theils auch, wo es wesentlich ist, an Herrn Weierstrass an, wobei ich freilich (wie dies bereits Herr Bianchi gethan) insofern wieder abweiche, als ich die Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung nicht 2ω, $2\omega'$, bez. 2η, $2\eta'$, sondern ω_1, ω_2, resp. η_1, η_2 nenne. Der imaginäre Theil von $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ kann bekanntlich nach Belieben positiv oder negativ genommen werden, es muss nur an der einmal getroffenen Verabredung festgehalten werden. Indem ich ihn als positiv voraussetze*), nimmt die Legendre'sche Relation, die späterhin bei fast allen Zwischenrechnungen zu benutzen sein wird, die folgende Gestalt an:

$$(2)\qquad \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = 2i\pi.$$

Ich schreibe dann:

$$(3)\qquad e^{i\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}} = q, \quad e^{-i\pi\frac{\omega_1}{\omega_2}} = r, \quad g_2^3 - 27g_3^2 = \Delta.$$

*) Auch hierin mit Bianchi übereinstimmend, aber entgegen meinen früheren Arbeiten in den Bänden XIV, XV, XVII der Mathematischen Annalen, wo $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ gesetzt ist.

Sei ferner, was die Ausdrucksweise angeht, der folgende Punct hervorgehoben. Alle solche linearen Transformationen von ω_1, ω_2:

$$\begin{matrix} \omega'_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \omega'_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{matrix} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

welche den Bedingungen genügen:

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } n),$$

nenne ich, wie früher bereits geschah, *modulo n zur Identität congruent*, und rechne nun jede irgendwie gegebene elliptische Function (mag dieselbe das u enthalten oder nicht) *zur n^{ten} Stufe*, wenn sie bei sämmtlichen in Rede stehenden linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert bleibt, — es sei denn, dass die Unveränderlichkeit schon bei einer Zahl $m < n$ eintritt, worauf die vorgelegte Function der m^{ten} Stufe zuzuweisen sein wird. Die hiermit gegebene Definition umfasst ohne weiteres auch den Fall eines elliptischen Integrals erster Gattung und weicht daher von derjenigen ab, die ich betreffs des Integrals in meiner vorgenannten Münchener Note verwandt habe. Wenn wir ein elliptisches Integral erster Gattung, wie damals geschah und in der Folge wieder in Betracht kommen soll, an einer der elliptischen Normalcurven n^{ter} Ordnung hin erstrecken, so ist es darum noch nicht im Sinne der jetzigen Ausdrucksweise von der n^{ten} Stufe. Es hat nur insofern Beziehung zur n^{ten} Stufe, als man die genannte Curve mit besonderer Leichtigkeit auf ein Coordinatensystem beziehen kann, bei dem das Integral von der n^{ten} Stufe wird. Eben dieses war nun freilich der Kern meiner damaligen Entwickelung, so dass die abweichende Ausdrucksweise, die ich übrigens ausdrücklich zurücknehme, mit der hier zu gebrauchenden nicht in directem Widerspruche steht.

Ich erinnere hier noch an einige Formeln, welche fernerhin fortwährend zu Hülfe zu nehmen sind. Vor Allem haben wir die Fundamentaleigenschaft der σ-Function festzuhalten:

$$(4) \qquad \sigma(u + m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$$
$$= (-1)^{m_1 m_2 + m_1 + m_2} \cdot e^{(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)\left(u + \frac{m_1\omega_1 + m_2\omega_2}{2}\right)} \cdot \sigma(u),$$

sodann ihre Beziehung zur ϑ-Function:

$$(5)\qquad \sigma(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1}, q\right)$$

$$= e^{\frac{3i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{\sqrt[8]{\Delta}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, r\right).$$

Hier ist ϑ_1 in bekannter Weise:

$$(6)\qquad \vartheta_1(x, q) = \frac{1}{i}\sum_0^\infty (-1)^h q^{\frac{(2h+1)^2}{4}} \left\{e^{(2h+1)ix} - e^{-(2h+1)ix}\right\},$$

während $\sqrt[8]{\Delta}$ durch folgende Formeln definirt sein mag, welche $\sqrt[24]{\Delta}$ darstellen:

$$(7)\qquad \sqrt[24]{\Delta} = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot q^{\frac{1}{12}} \cdot \prod_1^\infty (1 - q^{2h})$$

$$= e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot r^{\frac{1}{12}} \cdot \prod_1^\infty (1 - r^{2h}).$$

Wir schreiben jetzt ausführlicher $\sigma(u, \omega_1, \omega_2)$ für $\sigma(u)$, $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ für Δ und lassen Transformation n^{ter} Ordnung eintreten, indem wir setzen:

$$(8)\qquad \bar\omega_1 = \frac{\omega_1}{n}, \quad \bar\omega_2 = \omega_2.$$

Es ist dann der Legendre'schen Relation zufolge:

$$(9)\qquad \frac{\bar\eta_1}{2\bar\omega_1} - \frac{n\eta_1}{2\omega_1} = \frac{\bar\eta_2}{2\bar\omega_2} - \frac{n\eta_2}{2\omega_2}.$$

Den gemeinsamen Werth dieser Ausdrücke bezeichne ich, wie dies auch sonst üblich ist, mit G_1 (siehe z. B. Felix Müller, *de transformatione functionum ellipticarum*, Berlin 1867). Der folgende Quotient:

$$(10)\qquad e^{-G_1 u^2} \cdot \frac{\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n}$$

stellt dann diejenige doppeltperiodische Function von u (mit den Perioden ω_1, ω_2) vor, welche bei allen Untersuchungen über Transformation n^{ter} Ordnung zu Grunde zu legen ist. Wir werden dieselbe in der Folge noch so modificiren, dass wir sie mit $\sqrt[8]{\bar\Delta : \Delta^n}$ multipliciren, wo Δ den ursprünglichen Werth der Discriminante,

$\bar{\varDelta}$ aber den transformirten Werth bedeutet:

$$(11)\qquad \bar{\varDelta} = \varDelta\left(\frac{\omega_1}{n},\ \omega_2\right).$$

Sie verwandelt sich dadurch in einen einfachen ϑ-Quotienten, den wir in der doppelten Form schreiben können:

$$(12)\qquad \sqrt{n}\cdot\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{nu\pi}{\omega_1},\ q^n\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\ q\right)^n} = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2},\ r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2},\ r\right)^n}.$$

Erster Abschnitt.

Über die Theilwerthe der σ-Function.

§. 1. *Definition der Theilwerthe.*

Die Lehre von der Theilung der elliptischen Functionen wird gewöhnlich in der Weise vorgetragen, dass nur von doppeltperiodischen Functionen im engeren Sinne, also (sofern wir uns an Weierstrass' Bezeichnung anschliessen wollen) von $p(u)$ und $p'(u)$ darin die Rede ist. Inzwischen zeigt eine aufmerksame Betrachtung der von verschiedenen Seiten entwickelten Formeln, dass es zweckmässig ist, auch Theilwerthe der σ-Function selbst in geeigneter Weise in Betracht zu ziehen. In der That treten solche Theilwerthe auch bisher fortwährend in den Zwischenrechnungen auf, nur dass man dieselben noch nicht einzeln derart in absoluter Weise fixirt hat, dass jeder von ihnen eine algebraische Function der Invarianten g_2, g_3 vorstellt*). Ich wünsche im gegenwärtigen Abschnitte den hiermit bezeichneten Gedanken auszuführen und die Beziehung der

*) Man sehe hier und im Folgenden die Arbeiten von Kiepert in den Bänden 76, 87, 88 des Journals für Mathematik. Was ältere Untersuchungen angeht, so will ich insbesondere auf die Habilitationsschrift von Herrn Schröter (Breslau 1855) verweisen, in welcher die Theilwerthe der ϑ-Function in einer meinen eigenen Tendenzen nahe verwandten Weise eingeführt werden, aber doch immer nur, da die Kenntniss der σ-Function fehlt, bis auf einen allen gemeinsamen Factor definirt erscheinen.

neuen Theilgrössen zu den früheren [den Theilwerthen von $p(u)$ und $p'(u)$] festzustellen.

Ich setze allgemein:

$$(13)\quad \sigma_{x,y}(u,\omega_1,\omega_2)=e^{(x\eta_1+y\eta_2)\left(u+\frac{x\omega_1+y\omega_2}{2}\right)}.\sigma(u-x\omega_1-y\omega_2,\omega_1,\omega_2),$$

insbesondere auch für den Nullwerth kurzweg:

$$(14)\qquad \sigma_{x,y}(0,\omega_1,\omega_2)=\sigma_{x,y}(\omega_1,\omega_2).$$

Bei der Theilung durch n oder der Transformation n^{ter} Ordnung sollen von diesen Functionen insbesondere diejenigen in Betracht kommen, bei denen x, y rationale Zahlen mit dem Nenner n sind. Sei dementsprechend

$$(15)\qquad x=\frac{\lambda}{n},\quad y=\frac{\mu}{n}.$$

Ich werde dann zumeist, insofern kein Missverständniss zu befürchten ist, den Nenner n einfach unterdrücken, und also die in Betracht kommenden Functionen folgendermassen schreiben:

$$(16)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u,\omega_1,\omega_2),\quad \sigma_{\lambda,\mu}(\omega_1,\omega_2),$$

oder auch kurzweg, wenn ω_1, ω_2 als selbstverständliche Argumente gelten:

$$(16^b)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u),\quad \sigma_{\lambda,\mu}.$$

Die Nullwerthe $\sigma_{\lambda,\mu}$ und die Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u):\sigma(u)$ sind algebraische Functionen von g_2, g_3.

Um dies zu zeigen, bedürfen wir einmal der Sätze, welche im folgenden Paragraphen über das Verhalten unserer Functionen bei linearer Transformation der Perioden aufgestellt werden sollen, und die darauf hinauslaufen, dass unsere Functionen bei genannter Transformation nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe annehmen. Wir bedürfen andererseits der Reihenentwickelungen unserer Grössen noch Potenzen von q, die wir finden, indem wir auf den Zusammenhang der σ-Function mit der ϑ-Function zurückgehen. Wir haben nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(17)\quad \frac{\sigma_{x,y}(u)}{\sigma(u)}=e^{\frac{-2i\pi y}{\omega_1}\left(u-\frac{x\omega_1+y\omega_2}{2}\right)}.\frac{\vartheta_1\left((u-x\omega_1-y\omega_2)\frac{\pi}{\omega_1},\ q\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1},\ q\right)}.$$

Der Factor, mit welchem hier rechter Hand der ϑ-Quotient multiplicirt ist, lässt sich in folgende Form setzen:

$$e^{i\pi xy}\cdot q^{y^2}\cdot e^{\frac{-2i\pi yu}{\omega_1}}.$$

Unser Satz beruht wesentlich darauf, dass hier q mit einem Exponenten verbunden erscheint, der unter der Voraussetzung (15) eine rationale Zahl wird. Denn dies besagt vermöge einer Schlussweise, die in meinen früheren Arbeiten über elliptische Modulfunctionen vorgebildet ist, dass die endlich-werthige Function von g_2, g_3, mit der wir es zu thun haben, in Bezug auf g_2, g_3 nirgendwo eine wesentliche Singularität besitzt. Ich darf mich hier um so mehr mit dieser Andeutung begnügen, als wir ohnehin demnächst zur Werthbestimmung unseres Quotienten (17), bez. des Nullwerthes $\sigma_{\lambda,\mu}$ explicite Formeln aufstellen werden.

Möge folgende beiläufige Bemerkung zur allgemeinen Systematik der elliptischen Functionen gleich hier eine Stelle finden. So wie die Function ϑ_1, der Formel (5) entsprechend, von $\sigma(u)$ $[= \sigma_{0,0}(u)]$ nur um einen Factor abweicht, so stimmen die drei anderen ϑ-Functionen:

$$(18)\qquad \vartheta(x, q),\quad \vartheta_2(x, q),\quad \vartheta_3(x, q),$$

welche man im Anschlusse an Jacobi und Hermite mit ϑ_1 zusammen zu betrachten und der Theorie der elliptischen Functionen gleichförmig zu Grunde zu legen pflegt, in der Hauptsache mit denjenigen $\sigma_{x,y}(u)$ überein, die

$$x = \tfrac{1}{2},\ y = 0;\quad x = 0,\ y = \tfrac{1}{2};\quad x = \tfrac{1}{2},\ y = \tfrac{1}{2}$$

entsprechen*). *Es bietet sich hier der Gedanke, die Jacobi-Hermite'sche Theorie so zu generalisiren, dass man für beliebig anzunehmendes n die n^2 Grössen*

$$(19)\qquad \sigma_{\frac{\lambda}{n},\frac{\mu}{n}}(u)\qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \ldots (n-1))$$

*) In Weierstrass' Vorlesungen werden die drei ϑ-Functionen (18) bekanntlich durch $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ ersetzt; es sind dies unsere drei σ-Functionen

$$\sigma_{\frac{1}{2},0}(u),\quad \sigma_{0,\frac{1}{2}}(u),\quad \sigma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(u),$$

jede dividirt durch ihren Nullwerth (so dass $\sigma_1(0)$, $\sigma_2(0)$, $\sigma_3(0)$ bei Weierstrass übereinstimmend gleich 1 sind).

simultan betrachtet. Dieser Gedanke ist gewissermassen in der Theorie der Normalcurven von der Ordnung n^2 enthalten, wie ich indess nicht ausführen will*). Es ist derselbe Gedanke, dessen Durchführung neuerdings von den Herren Prym und Krazer in Angriff genommen worden ist**). Indem die genannten Autoren von der ϑ-Reihe ausgehen und diese gleich für p Veränderliche in Betracht ziehen, erhalten sie eine ϑ-Relation von ausserordentlicher Allgemeinheit. Ich werde im Folgenden der so gewonnenen Thetarelation noch zu gedenken haben. Indem ich mich durchaus auf den Fall $p = 1$ beschränke, notire ich hier als Unterschied, dass die genannten Forscher nicht von $\vartheta_1(x, q)$ ausgehen, wie dies durch (17) indicirt wird, sondern von $\vartheta(x, q)$. Für die Technik der ϑ-Relationen kommt dieser Unterschied, wie selbstverständlich, nur unwesentlich in Betracht. Wenn aber die auftretenden Formeln, was in der Folge bei uns geschehen muss, auf ihr Verhalten bei linearer Transformation der Perioden untersucht werden sollen, so ist es durchaus nöthig, an dem ϑ_1 als der richtigen Fundamentalfunction festzuhalten, und es dürfte sich dann überhaupt empfehlen, mit den Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, wie wir sie vorstehend definirten, zu operiren, insofern dann alle störenden Exponentialfactoren, die sonst immer wieder in Betracht gezogen werden müssen, mit einem Schlage wegfallen.

Die allgemeinen Functionen $\sigma_{x,y}(u)$, die wir in (13) definirten, treten in natürlich anderer Bezeichnung ebenfalls verschiedentlich in der Literatur auf. Ich will diesbezüglich hier nur hervorheben, dass die »analytische Invariante Λ«, welche Herr Kronecker in seinen neuesten Untersuchungen zur Theorie der elliptischen Functionen einführt***), in unserer Bezeichnung $\log \left| \sqrt[12]{\Delta} \,.\, \sigma_{x,y} \right|$ ist, (wo $\left| \sqrt[12]{\Delta} \,.\, \sigma_{x,y} \right|$ den absoluten Betrag von $\sqrt[12]{\Delta} \,.\, \sigma_{x,y}$ bedeuten soll).

*) Vergl. für $n = 4$ die schon genannte Dissertation von Lange.

**) Acta Mathematica, Bd. 3: *Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel*; vergl. auch den vorausgehenden Aufsatz von Krazer im 20. Bande der Mathematischen Annalen: *Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind.* Herr Krazer hat dort allein den Fall $p = 1$ in Betracht gezogen und übrigens seine Formeln mit den bereits genannten auf $n = 3$ bezüglichen Untersuchungen von Herrn Bianchi in Verbindung gesetzt.

***) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1883; siehe insbesondere p. 497—506, 525—530 daselbst.

§. 2. *Verhalten der Theilwerthe bei linearer Veränderung der Argumente.*

Wir haben unsere $\sigma_{\lambda,\mu}$ soeben [Formel (19)] der Einschränkung $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots (n-1)$ unterworfen. Diese Einschränkung ist selbstverständlich unwesentlich. Vermehrt man nämlich λ und μ um irgendwelche ganzzahlige Multipla von n, so erhält man folgende Formel:

$$(20)\qquad \sigma_{\lambda+ln,\,\mu+mn}(u) = (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{\frac{-i\pi}{n}(\lambda m - \mu l)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u).$$

Es ist also $\sigma_{\lambda+ln,\,\mu+mn}(u)$ von $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ nur um einen constanten Factor verschieden. Die Zahl der linear unabhängigen Nullwerthe der $\sigma_{\lambda,\mu}$ reducirt sich noch weiter. Einmal nämlich ist $\sigma_{0,0} = \sigma(0) = 0$, andererseits aber findet man:

$$(21)\qquad e^{(\lambda-\mu)\frac{i\pi}{n}} \cdot \sigma_{\lambda,\mu} = \sigma_{n-\lambda,\,n-\mu},$$

so dass beispielsweise bei ungeradem n nur $\frac{n^2-1}{2}$ Grössen $\sigma_{\lambda,\mu}$ zu unterscheiden sind.

Ich stelle nunmehr einige Formeln zusammen, welche sich auf das Verhalten unserer Theilwerthe einerseits bei *Vermehrung des u um Multipla der Perioden*, andererseits bei *linearer Transformation der Perioden* beziehen.

In ersterer Hinsicht berechnen wir sofort:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{\lambda,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2) \\ &= e^{\frac{2i\pi(m\lambda - l\mu)}{n}} \cdot (-1)^{lm+l+m} \cdot e^{(l\eta_1 + m\eta_2)\left(u + \frac{l\omega_1 + m\omega_2}{n}\right)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u), \end{aligned}$$

woraus für den Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ das nachstehende Verhalten folgt:

$$(23)\qquad \frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u + l\omega_1 + m\omega_2)}{\sigma(u + l\omega_1 + m\omega_2)} = e^{\frac{2i\pi(m\lambda - l\mu)}{n}} \cdot \frac{\sigma_{\lambda,\mu}(u)}{\sigma(u)}.$$

Der Quotient $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ hat also die Eigenschaft, bei Vermehrung des u um Multipla der Perioden bis auf eine bestimmte als Factor vortretende n^{te} Einheitswurzel ungeändert zu bleiben).*

*) Man vergl. Kiepert im 76. Bande des Journals für Mathematik (p. 28 ff.), oder auch Jacobi's alte Abhandlung: *De functionibus ellipticis commentatio prima* [Ges. Werke, Bd. I], wo unter anderer Bezeichnung dasselbe Theorem bereits

Wir notiren noch folgende Formel

$$(24)\qquad \sigma_{\lambda,\mu}(-u) = -\sigma_{-\lambda,\,-\mu}(u)$$

(die der Formel (22) gewissermassen coordinirt ist) und wenden uns zur linearen Transformation der Perioden. Ich will mich dabei der Einfachheit halber auf solche Transformationen beschränken, die modulo n zur Identität congruent sind, die also folgendermassen geschrieben werden können:

$$(25)\qquad \begin{aligned} \omega'_1 &= (an+1)\omega_1 + bn\,.\,\omega_2\,, \\ \omega'_2 &= cn\,.\,\omega_1 + (dn+1)\omega_2\,, \end{aligned}$$

wo

$$(25^{\text{b}})\qquad (ad-bc)n + (a+d) = 0\,.$$

Berücksichtigen wir, dass den Substitutionen (25) entsprechend für die η_1, η_2 durchaus ähnliche Formeln bestehen:

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= (an+1)\eta_1 + bn\,.\,\eta_2\,, \\ \eta'_2 &= cn\,.\,\eta_1 + (dn+1)\eta_2\,, \end{aligned}$$

so finden wir nach kurzer Rechnung:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{\lambda,\mu}(u,\,\omega'_1,\,\omega'_2) \\ &= (-1)^{\lambda^2(ab+a+b)+\lambda\mu(ad+bc)+\mu^2(cd+c+d)}\,.\,e^{\frac{i\pi}{n}(-b\lambda^2+(a-d)\lambda\mu+c\mu^2)}\,.\,\sigma_{\lambda,\mu}(u,\omega_1,\omega_2).^{*)} \end{aligned}$$

Diese Formel ist gewissermassen der eben abgeleiteten (23) analog. *Die Functionen $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$, oder ihre Nullwerthe $\sigma_{\lambda,\mu}$, erscheinen, als Modulfunctionen aufgefasst, nicht etwa direct als Functionen n^{ter} Stufe. Vielmehr gehören sie zu denjenigen Functionen, welche man der n^{ten} Stufe adjungirt nennen könnte, insofern sie sich bei linearen Substitutionen, die modulo n zur Identität congruent sind, nur um eine als Factor vortretende Einheitswurzel ändern.* Solche Functionen benutzt man

vorkommt. Ich möchte gleich hier bei der ersten sich darbietenden Gelegenheit generell auf jene Arbeiten verweisen, die Jacobi bald nach Publication der Fundamenta folgen liess, indem ich wesentlich dort die Rechnungsmethoden gefunden habe, deren ich mich weiterhin für meine Zwecke bediene, was durch besondere Citate nachzuweisen zu weitläufig sein würde.

*) Übrigens hat man, wie ebenfalls angeführt sei, bei beliebiger linearer Transformation der ω_1, ω_2:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \alpha\omega_1 + \beta\omega_2\,, \\ \omega'_2 &= \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{aligned}$$

die folgende Formel:

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u,\,\omega',\,\omega'_2) = \sigma_{\alpha\lambda+\gamma\mu,\;\beta\lambda+\delta\mu}(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,.$$

mit Vortheil, um aus ihnen als Factoren Moduln der n^{ten} Stufe zusammenzusetzen, wozu wir im Folgenden vielfache Beispiele kennen lernen werden.

Was den in (26) auftretenden Factor angeht, so erscheint derselbe zunächst als eine $2n^{\text{te}}$ Einheitswurzel. Indess ist leicht zu sehen, dass sich derselbe bei ungeradem n (dem einzigen Falle, den wir fernerhin behandeln) zu einer n^{ten} Einheitswurzel zusammenzieht. Aus (25^b) folgt nämlich, dass für ungerade n immer folgende Relationen Statt haben:

$$ab + a \equiv cd + d \equiv 0, \quad ad + bc \equiv a - d \pmod{2}.$$

Wir können daher (26), indem wir für (-1) die Grösse $e^{i\pi}$ einführen und übrigens, wie immer im Folgenden, ε für $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ schreiben, folgendermassen umgestalten:

$$(26^b) \qquad \sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega'_1, \omega'_2) = \varepsilon^{\frac{n-1}{2}(b\lambda^2 - (a-d)\lambda\mu - c\mu^2)} \cdot \sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist. *Die n^{te} Potenz*

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2)^n$$

erweist sich jetzt als Modulfunction der n^{ten} Stufe. — Übrigens sieht man leicht, dass der in (26^b) auftretende Exponentialfactor für sämmtliche $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ gleichzeitig nur dann in Wegfall kommt, wenn b, c und $(a-d)$, und also, wegen (25^b), auch a und d einzeln durch n theilbar sind. *In diesem Sinne gehört das System der $\sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2)$ bei ungeradem n zur Stufe n^2.*

§. 3. *Herstellung anderer Grössen aus den Theilwerthen.*

Wir gedachten bereits der Möglichkeit, aus den Quotienten $\sigma_{\lambda,\mu}(u) : \sigma(u)$ (oder auch aus den Nullwerthen $\sigma_{\lambda,\mu}$) solche Modulfunctionen zusammenzusetzen, welche der n^{ten} Stufe angehören; Formel (23) bietet die Möglichkeit, die Formeln zugleich so einzurichten, dass die entstehende Function in u um ω_1, ω_2 doppeltperiodisch ist. Ich wünsche hier hervorzuheben, dass sämmtliche Hauptfunctionen der Theilungs- oder Transformationstheorie auf solche Weise entstehen.

Erinnern wir uns zunächst der Fundamentalformeln:

$$(27) \qquad p(u) - p(v) = -\frac{\sigma(u+v) \cdot \sigma(u-v)}{\sigma(u)^2 \cdot \sigma(v)^2}, \quad p'(u) = -\frac{\sigma(2u)}{\sigma(u)^4}.$$

Wir schliessen aus ihnen:

$$(28)\qquad p\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)-p\left(\frac{\lambda'\omega_1+\mu'\omega_2}{n}\right)$$
$$=-\frac{\sigma_{\lambda+\lambda',\,\mu+\mu'}(u)\cdot\sigma_{\lambda-\lambda',\,\mu-\mu'}(u)}{\sigma_{\lambda,\mu}(u)^2\cdot\sigma_{\lambda',\mu'}^2},$$

$$(29)\qquad p'\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)=-\frac{\sigma_{2\lambda,\,2\mu}(u)}{\sigma_{\lambda,\mu}(u)^4}.$$

Setzen wir hier $u=0$, so erfahren wir ohne weiteres die Theilgrössen $p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ als Functionen der $\sigma_{\lambda,\mu}$. Aber auch die $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ werden wir als solche berechnen, wenn wir noch hinzunehmen, dass die Summe $\sum\left(p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)\right)$, ausgedehnt über alle $\frac{n^2-1}{2}$ unterschiedenen Theilgrössen, bekanntermassen gleich 0 ist.

Was Transformationstheorie betrifft, so gedenken wir der drei Fundamentalfunctionen, die wir unter (10) — (12) einführten. Wir haben zunächst in bekannter Weise:

$$(30)\qquad e^{-G_1u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u,\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)}{\sigma(u,\omega_1,\omega_2)^n}=\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left(p(u)-p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)\right).$$

Greifen wir hier auf (28) zurück, so kommt:

$$(31)\qquad e^{-G_1u^2}\cdot\sigma\left(u,\frac{\omega_1}{n},\omega_2\right)=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sigma_{\lambda,0}(u)}{\left(\prod\limits_1^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{\lambda,0}\right)^2}.$$

Wir behandeln ferner den Quotienten

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$$

mit der Productentwickelung (7). Herr Kiepert hat bereits bemerkt, dass man das entstehende Product nach Abtrennung eines Exponentialfactors als Aggregat von $\frac{n-1}{2}$ Factoren $\sigma\left(\frac{\lambda\omega_1}{n},\omega_1,\omega_2\right)$ darstellen kann (cf. Journal für Mathematik, Bd. 87, p. 203). Führen wir die Bezeichnung $\sigma_{\lambda,\mu}$ ein, so fallen aus seiner Formel alle Ex-

ponentialgrössen fort und wir haben einfach:

$$(32)\qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}\,.$$

Wir combiniren endlich (31), (32) in geeigneter Weise. So kommt, der Formel (12) entsprechend:

$$(33)\qquad \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot \frac{e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n} = \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0} \cdot \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}(u)\,,$$

womit in der That in allen Fällen die gewollte Darstellung geleistet ist.

§. 4. *Beziehung unserer Theilwerthe auf die $p_{\lambda,\mu}$, $p'_{\lambda,\mu}$.*

Es ist ein Hauptsatz in der Theorie der Modulfunctionen n^{ter} Stufe, dass alle zu ihnen gehörigen, von g_2, g_3 algebraisch abhängenden Functionen in den $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ rational sind. Man wird verlangen, alle solche Verbindungen der $\sigma_{\lambda,\mu}(u)$ oder der $\sigma_{\lambda,\mu}$, welche der Formel (26) nach unter die Bedingungen des Satzes fallen, explicit als rationale Functionen der $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ darzustellen.

Ich will dies hier nur für zweierlei Combinationen des $\sigma_{\lambda,\mu}$ durchführen, nämlich erstens (unter der immer festgehaltenen Annahme, dass n ungerade sei) für die n^{ten} Potenzen der $\sigma_{0,\mu}$, zweitens aber für $\sqrt[8]{\Delta : \Delta^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} (\sigma_{\lambda,0})^3$ oder auch, unter der Annahme, dass $n \gtrless 0$ (mod. 3), für $\sqrt[24]{\Delta : \Delta^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}$ (wobei die Einschränkung, der wir das n unterwerfen, in dem Umstande seine Erklärung findet, dass für $n \equiv 0$ (mod. 3), eben in Folge von (26), $\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}$ gar keine Modulfunction der n^{ten} Stufe ist).

1) Was die in Rede stehende n^{te} Potenz von $\sigma_{0,\mu}$ angeht, so gewinnen wir dieselbe am einfachsten, indem wir zunächst durch

geeignete Ausmultiplication aus (28) die Formel ableiten:

$$(35)\qquad \left(\frac{\sigma_{0,\mu}(u)}{\sigma(u)}\right)^n = (-1)^\mu \cdot \frac{\prod_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(p(u)-p\left(\frac{\varrho\,\omega_2}{n}\right)\right)}{\prod_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(p\left(u-\frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)-p\left(\frac{\varrho\,\omega_2}{n}\right)\right)},$$

dann mit $\sigma(u)^n$ heraufmultipliciren und $u = 0$ setzen. Solcherweise kommt:

$$(36)\qquad (\sigma_{0,\mu})^n = \frac{(-1)^{\mu+1}}{p'\left(\frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)\cdot \prod_{\varrho=1}^{\frac{n-1}{2}}{}'\left(p\left(\frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)-p\left(\frac{\varrho\,\omega_2}{n}\right)\right)},$$

wo der dem Productzeichen beigefügte Accent bedeuten soll, dass der dem Werthe $\varrho = \mu$ entsprechende Factor auszulassen ist.

2) Den Werth von $\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}{}^3$ finden wir sofort aus (29). Das Resultat ist:

$$(37)\qquad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}{}^3 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = \frac{1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\,\omega_1}{n}\right)}.$$

Sei nun, für $n \gtrless 0 \pmod{3}$, $n = 6g \pm 1$. Für diesen Fall gibt bereits Herr Kiepert im 87. Bande des Journals für Mathematik (p. 202 daselbst) eine Formel an, deren Beweis aus (28) fliesst, und die in unserer Bezeichnung folgendermassen lautet:

$$(38)\qquad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}{}^2 = \sqrt[12]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} = \frac{\pm 1}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left(p\left(\frac{2\lambda\,\omega_1}{n}\right)-p\left(\frac{\lambda\,\omega_1}{n}\right)\right)}.$$

Wir erhalten $\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$, indem wir (37) durch (38) beiderseitig dividiren.

Zweiter Abschnitt.

Die Normalcurven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen und ihre zwiefache algebraische Darstellung.

§. 5. *Grundlegende Sätze.*

Die Definition der Normalcurven n^{ter} Ordnung, die wir in Formel (1) voranstellten und an die wir jetzt anzuknüpfen haben, kann unbeschadet der Allgemeingültigkeit noch etwas particulärer gefasst werden. Wir verlangten bei (1), dass die Residuensummen Σa_i etc. einander gleich sein sollten. Wir wollen fortan voraussetzen, dass folgende Gleichungen statthaben:

$$(39) \qquad \Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots = \Sigma n_i = 0\,.$$

Die hierin liegende Umänderung ist durchaus unwesentlich, insofern sie nur eine Vermehrung des ursprünglich eingeführten Parameters u um eine geeignete Constante bedeutet; sie erleichtert aber die Ausdrucksweise.

Wir vermehren jetzt u in (1) um Multipla von Perioden. Die Rechnung gibt, dass die Verhältnisse der x bei dieser Umänderung völlig ungeändert bleiben. *Es genügt also, dass der Parameter u das durch ω_1, ω_2 fixirte Periodenparallelogramm überstreicht, damit der Punct $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ jede Stelle der Normalcurve erreiche.*

Wir erinnern ferner, dass die σ-Producte, welche in (1) auftreten, linear-unabhängig sein sollten. Dies heisst geometrisch, *dass unsere Curve dem Raume von $(n-1)$ Dimensionen eigentlich angehört und nicht etwa schon in einen linearen Raum von einer geringeren Dimensionenzahl eingeschlossen ist.*

Wir ziehen endlich, als hauptsächliches Hülfsmittel für alles Folgende, den sogenannten Hermite'schen Satz heran*). Demselben zufolge verschwindet eine homogene ganze Function m^{ten} Grades der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, aufgefasst als Function von u, an mn Stellen des Periodenparallelogramms der u-Ebene und zwar an solchen mn Stellen,

*) Hermite, *Lettre à Mr. Jacobi* (vom August 1844). Siehe Crelle's Journal, Bd. XXXII oder Jacobi's gesammelte Werke, Bd. II (insbesondere p. 102).

deren Argumente $u_1, u_2, \ldots$ der folgenden Bedingung genügen, bei welcher λ, μ ganze Zahlen bedeuten:

$$(40) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{mn} = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2\,;$$

umgekehrt aber, wenn die Bedingung (40) statt hat, so ist das Product:

$$(41) \qquad e^{(\lambda\eta_1 + \mu\eta_2)\left(u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{2}\right)} \cdot \prod_1^{mn} \sigma(u - u_i)$$

als ganze homogene Function m^{ten} Grades der $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ darstellbar.

Sei hier erstlich $m = 1$. So haben wir, dass jede lineare Verbindung der x n-mal auf unserer Normalcurve verschwindet, *dass also unsere Normalcurve in der That von der n^{ten} Ordnung ist.* Wir wollen jetzt neben $x_0, \ldots, x_{n-1}$ andere n Grössen $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ betrachten, welche ebenfalls zu linear-unabhängigen n-gliedrigen σ-Producten von der Residuensumme Null proportional sein sollen. Der Hermite'sche Satz besagt, dass sich die x' in den x und die x in den x' homogen linear darstellen lassen. *Je zwei Normalcurven n^{ter} Ordnung sind also collinear verwandt*, oder auch, anders ausgedrückt: *es gibt für die projective Auffassung nur eine Normalcurve n^{ter} Ordnung.* Bei Formulirung dieses Satzes werden natürlich die Perioden ω_1, ω_2 als constante Grössen betrachtet. — Wir wollen uns ferner die n Grössen x' so eingerichtet denken, dass $x'_0, x'_1, \ldots, x'_{n-2}$ gemeinsam für $u = u_0$ verschwinden (dass also der Punct

$$x'_0 = x'_1 = \ldots = x'_{n-2} = 0$$

unserer Curve angehört). Lassen wir dann x'_{n-1} bei Seite und deuten $x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_{n-2}$ im Raume von $(n-2)$ Dimensionen, so haben wir in diesem, da $\sigma(u - u_0)$ aus jedem der n-gliedrigen σ-Producte als gemeinsamer Factor herausfällt, eine Normalcurve von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. *Die Normalcurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung kann also aus der Normalcurve n^{ter} Ordnung durch Projection von einem beliebigen ihrer Puncte aus gewonnen werden.* Wir wollen jetzt den niedersten Fall $n = 2$ ausser Betracht lassen, der überhaupt als Grenzfall zu erachten ist*). Für $n = 3$ haben wir in der Ebene eine eigent-

*) Vergl. hier überall meine Erläuterungen in der vorgenannten, der Münchener Akademie vorgelegten Note.

liche Curve dritter Ordnung ohne Doppelpunct. Von hier steigen wir zur Normalcurve vierter, fünfter Ordnung etc. auf, indem wir immer die niedere Normalcurve als die Projection der nächstfolgenden betrachten. Wir schliessen dann, *dass auch für* $n > 3$ *die Normalcurve* n^{ter} *Ordnung keinerlei vielfache Puncte oder mehrfach zählende Curvenzüge besitzen kann*, dass also nur solche Parameterwerthe u', u, welche bis auf Multipla der Perioden übereinstimmen, dieselben Verhältnisse der $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ ergeben können. *Die Normalcurve und das Periodenparallelogramm der u-Ebene sind demnach Punct für Punct eindeutig auf einander bezogen.*

Sei ferner $m > 1$. Eine Gleichung m^{ten} Grades zwischen n homogenen Veränderlichen enthält

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - 1$$

willkürliche Constanten, während nach (40), (41) von den mn Schnittpuncten unserer Normalcurve mit einer Fläche m^{ter} Ordnung genau $(mn - 1)$ willkürlich sind. *Daher gehen*

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{(n-1)!} - mn$$

linear unabhängige Flächen m^{ter} *Ordnung durch unsere Normalcurve hindurch*, beispielsweise $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige Flächen zweiter Ordnung.

Wir betrachten endlich die *eindeutigen Transformationen der Normalcurve in sich.* Es gilt, den Parameter u eines ersten Punctes mit dem Parameter u' eines zweiten Punctes der Normalcurve derart zu verbinden, dass eine Vermehrung von u um Perioden eine ebensolche Vermehrung von u' nach sich zieht und umgekehrt. Von den besonderen Fällen, in denen g_2 oder g_3 oder gar Δ verschwindet, will ich hier absehen. Dann wird die allgemeinste Lösung der gestellten Aufgabe bekanntlich durch die Formel geliefert:

$$u' = \pm u + C, \tag{42}$$

wo nach Belieben das + oder das — Zeichen zu nehmen und C durchaus willkürlich ist, übrigens eine Vermehrung des C um Multipla der Perioden geometrisch keine Bedeutung hat.

Wir fragen, wie sich diese eindeutigen Transformationen bei Benutzung der Coordinaten $x_0, \ldots, x_{n-1}$ algebraisch darstellen.

Um die Coordinaten $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ des transformirten Punctes zu erhalten, werden wir $\pm u + C$ für u in (1) eintragen, also schreiben

$$\varrho x'_0 = A \prod_1^n \sigma(\pm u + C - a_i) \text{ etc.}$$

Da $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ und $\Sigma a_i = \Sigma b_i = \ldots = 0$, so ist die Residuensumme der n hier entstehenden σ-Producte je $\mp nC$. Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden, je nachdem nC modulo der Perioden ω_1, ω_2 zu Null congruent ist, oder nicht.

Ersterer Fall tritt nur für diejenigen Werthe von C ein, welche die Form haben: $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$, wo die ganzen Zahlen λ, μ noch je auf das Intervall von 0 bis $(n-1)$ eingeschränkt werden können, so dass hier im Ganzen n^2 verschiedene Werthe von C in Betracht kommen. Die neuen Coordinaten $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ sind dann, dem Hermite'schen Satze zufolge, mit *linearen* Verbindungen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional. *Die Normalcurve geht also, den $2n^2$ Substitutionen*

$$(43) \qquad u' = \pm u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$$

entsprechend, durch $2n^2$ Collineationen des Raumes in sich über.

Im zweiten Falle können wir die n-gliedrigen σ-Producte $x'_0, \ldots, x'_{n-1}$ nur so mit möglichst niedrigen ganzen Functionen der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional setzen, dass wir sie vorab durch gemeinsame Zufügung irgend eines neuen n-gliedrigen σ-Products

$$\prod_1^n \sigma(u - s_i),$$

dessen Residuensumme $= \mp nC + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ ist, zu $2n$-gliedrigen σ-Producten ergänzen, deren Residuensumme $(= \lambda\omega_1 + \mu\omega_2)$ unter die Bedingungen des Hermite'schen Satzes fällt. Die so modificirten x' werden dann zu ganzen Functionen zweiten Grades der $x_0, \ldots, x_{n-1}$ proportional (allgemeines »Additionstheorem« der x, ein Gegenstand, den ich nicht weiter verfolge).

§. 6. *Von der algebraischen Darstellung der Normalcurven.*

Was die algebraische Darstellung der Normalcurven, d. h. die Darstellung durch algebraische zwischen den $x_0, \ldots, x_{n-1}$ bestehende Gleichungen angeht, so ist diese in allgemeinster Form nur

für die kleinsten n, bei $n = 2, 3, 4$ bekannt: bei $n = 2$ haben wir überhaupt keine Gleichung, bei $n = 3$ eine einzelne Gleichung dritten Grades, bei $n = 4$ irgend zwei Gleichungen zweiten Grades zur Definition der Curve anzuschreiben. Ich werde später zeigen, was Herr Bianchi speciell bei $n = 5$ nachwies, dass nämlich für grössere Werthe von n unsere Normalcurve immer als Schnitt der bereits genannten $\frac{n(n-3)}{2}$ Flächen zweiter Ordnung, welche durch sie hindurchgehen, definirt werden kann. Aber diese Flächen zweiter Ordnung sind keineswegs von einander unabhängig und es ist eine durchaus offene Frage, wie man in allgemeinster Weise $\frac{n(n-3)}{2}$ Gleichungen zweiten Grades zwischen n homogenen Veränderlichen hinzuschreiben hat, damit die entsprechenden Flächen zweiten Grades eine Normalcurve der n^{ten} Ordnung gemein haben. Handelt es sich um Definition der Normalcurven n^{ter} Ordnung durch algebraische Gleichungen, so wird man hiernach bis auf Weiteres *besondere Coordinatensysteme* zu Grunde zu legen haben. Eben hierdurch gewinnen dann unsere Betrachtungen Bedeutung für die Theorie der elliptischen Modulfunctionen im engeren Sinne.

Ich werde den bezeichneten Gedanken, der sehr verschiedener Modificationen fähig ist, des Weiteren in doppelter Weise ausführen. Die zu benutzenden Coordinatensysteme sollen beide in engster Beziehung zu denjenigen n^2 Puncten der Normalcurve stehen, welche ich die *singulären* nenne. *Es sind dies diejenigen n^2 Puncte, deren Parameter u in der Form enthalten sind:*

$$u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}. \tag{44}$$

Die geometrische Eigenthümlichkeit dieser Puncte liegt ohne Weiteres zu Tage, indem für jeden derselben

$$nu \equiv o \pmod{\omega_1, \omega_2}$$

ist, der einzelne Punct also, n-fach gezählt, den vollen Schnitt der Normalcurve mit einer zutretenden Ebene vorstellt; es sind, um einen Ausdruck der analytischen Geometrie des Raumes von 3 Dimensionen zu entnehmen, die *Hyperosculationspuncte* der Raumcurve. — Beispiel, $n = 3$ entsprechend: die 9 Wendepuncte der ebenen Curve dritter Ordnung.

Eben das Beispiel der ebenen Curve dritter Ordnung mag nun dazu dienen, um die beiden Coordinatensysteme, welche fortan benutzt werden sollen, und von denen ich das eine das *kanonische*, das andere das *singuläre* System nenne, nach ihren Haupteigenschaften zu charakterisiren.

A. *Das kanonische Coordinatensystem der C_3.*

Es seien $p(u)$, $p'(u)$ die Weierstrass'schen Functionen, zwischen denen die Relation statthat:

$$(45) \qquad p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3 .$$

Ich setze nun einfach:

$$(46) \qquad p' = \frac{x_2}{x_0}, \quad p = \frac{x_1}{x_0},$$

und betrachte die $x_0 : x_1 : x_2$ als Coordinaten eines Punctes der Ebene. Aus (45) erhalten wir

$$(47) \qquad x_0 x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_0^2 x_1 - g_3 x_0^3,$$

der Punct durchläuft also eine Curve dritter Ordnung. Die einfache Gestalt, welche die Gleichung dieser Curve darbietet, ist eben diejenige, die ich die *kanonische* nenne.

Bemerken wir vor Allem, dass die durch (46) gegebene Einführung der $x_0 : x_1 : x_2$ als specieller Fall unter den Formeln (1) inbegriffen ist. Sei nämlich der Kürze halber geschrieben:

$$(48) \qquad p(u) = \frac{\Sigma(u)}{\sigma(u)^2}, \quad p'(u) = -2\frac{T(u)}{\sigma(u)^3},$$

wo $\Sigma(u)$, $T(u)$ zwei wohlbekannte, aus 2 bez. 3 Factoren bestehende σ-Producte vorstellen. Wir können dann (46) sofort durch folgende Formeln ersetzen:

$$(49) \qquad \varrho x_0 = \sigma(u)^3, \quad \varrho x_1 = \sigma(u) \,.\, \Sigma(u), \quad \varrho x_2 = -2T(u),$$

die sich auch formal unter die allgemeine Definition (1) subsumiren.

Suchen wir ferner das Coordinatensystem, welches bei (47) zu Grunde liegt, geometrisch zu verstehen. Wir erkennen sofort, dass $x_0 = x_1 = 0$ einen der neun Wendepuncte unserer Curve, $x_0 = 0$ die zugehörige Wendetangente, $x_2 = 0$ die harmonische Polare vorstellt. Die geometrische Definition von $x_1 = 0$ ist ein wenig complicirter. Die Linie $x_1 = 0$ ist unter den Geraden des Büschels $x_0 + \lambda x_1$ diejenige, welche der Wendetangente $x_0 = 0$ als erste

Polare in Bezug auf die drei weiteren vom Wendepuncte ($x_0 = x_1 = 0$) an die Curve laufenden Tangenten correspondirt. — Den 18 Collineationen entsprechend, welche die C_3 in sich überführen, kann man bei gegebener C_3 die Gleichungsform (47) auf 18 Weisen herstellen. Ein jeder der 9 Wendepuncte gibt allerdings nur zu einem kanonischen Coordinatendreiecke Anlass, aber zu jedem Dreiecke gehören zwei kanonische Darstellungen, indem (47) ungeändert bleibt, wenn wir x_2 im Vorzeichen ändern, was eine der 18 in Aussicht genommenen Collineationen ist.

Wir besprechen noch die in (44) auftretenden Coëfficienten. Dieselben sind, als Modulfunctionen betrachtet, von der ersten Stufe, wie a priori nothwendig, wenn man bemerkt, dass $p(u)$ und $p'(u)$ selbst, — oder auch $\sigma(u)$, $\Sigma(u)$, $T(u)$ — der ersten Stufe angehören. Dem entspricht, was ich hier ohne Beweis anführe, dass die in (47) auftretenden g_2, g_3 von den rationalen Invarianten vierten und sechsten Grades, welche die durch (47) dargestellte Curve dritter Ordnung im Sinne der Aronhold'schen Theorie besitzt, nur durch Zahlenfactoren verschieden sind. *Trotzdem also eine beliebig gegebene Curve dritter Ordnung auf 18 Weisen in die Gleichungsform (47) gesetzt werden kann, sind die in dieser Gleichungsform auftretenden Coëfficienten von vorneherein rational bekannt.* Der Grund hierfür liegt in der schon hervorgehobenen Thatsache, dass sämmtliche 18 kanonische Darstellungen einer Curve dritter Ordnung aus einer derselben vermöge derjenigen Collineationen hervorgehen, welche, anders aufgefasst, die Curve dritter Ordnung in sich selbst überführen *).

*) Ich habe die Verhältnisse des kanonischen Coordinatensystems bei den Curven dritter Ordnung so ausführlich besprochen, weil ich glaubte, damit zugleich seine geometrische Bedeutung für die höheren Normalcurven (bei denen ich die jetzt im Texte gegebenen Erläuterungen nicht noch einmal wiederholen werde) hinreichend bezeichnen zu können. Merkwürdigerweise wurde das kanonische Coordinatensystem bei den Curven dritter Ordnung von den Geometern bisher nur wenig und bei den Raumcurven vierter Ordnung wohl gar nicht betrachtet.

B. *Das singuläre Coordinatensystem der C_3.*

Bekanntlich liegen die 9 Wendepuncte einer ebenen Curve dritter Ordnung zwölfmal zu drei auf einer Geraden, worauf man aus den zwölf solcherweise entstehenden »Wendelinien« vier Dreiecke (die »Wendedreiecke« der Curve) zusammensetzen kann, derart, dass die drei Seiten des einzelnen Dreiecks zusammengenommen sämmtliche neun Wendepuncte enthalten. Jetzt lassen wir die drei Axen des Coordinatensystems x_0, x_1, x_2 mit den drei Seiten eines Wendedreiecks zusammenfallen und fixiren die absoluten Werthe von $x_0 : x_1 : x_2$ in solcher Weise, dass die Curve bei cyklischer Vertauschung der drei Coordinaten in sich übergeht. *So entsteht die sogenannte Hesse'sche Normalform der Curvengleichung:*

$$(50) \qquad (x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) + 6a \, . \, x_0 x_1 x_2 = 0 \, ,$$

welche wir hier als die *singuläre* Gleichungsform bezeichnen.

Die transcendente Definition der in (50) auftretenden x_0, x_1, x_2 (welche bei der Verallgemeinerung zu Grunde gelegt werden muss) ist äusserst einfach. Bezeichnen wir mit Clebsch den Wendepunct, dessen Argument $\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{3}$ ist, mit (λ, μ), so enthalten die geraden Linien $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ etwa diejenigen Wendepuncte, welche in folgendem Schema je in eine Horizontalreihe zusammengestellt sind:

$$(51) \qquad \begin{cases} 00, & 10, & 20\,; \\ 01, & 11, & 21\,; \\ 02, & 12, & 22\,. \end{cases}$$

Gleichzeitig wird diejenige Collineation, welche durch eine cyklische Vertauschung der x_0, x_1, x_2 vorgestellt wird, in transcendenter Form gegeben sein, indem man u um ein Drittel der zweiten Periode vermehrt. Dass diese Angaben genügen, um die x_0, x_1, x_2 bestimmten dreigliedrigen σ-Producten proportional zu setzen, möge man l. c. bei Bianchi nachsehen. Ich selbst verschiebe die betreffende Erörterung bis später, wo für ein beliebiges ungerades n aus den entsprechenden Bedingungen singuläre x_0, x_1, …, x_{n-1} gewonnen werden sollen.

§. 7. *Zweierlei Coordinatensysteme bei beliebiger Normalcurve.*

Wenn es sich jetzt darum handelt, die zweierlei Coordinatensysteme von der Normalcurve dritter Ordnung auf die Normalcurve n^{ter} Ordnung zu übertragen, so ist dies an sich, wie jede Verallgemeinerung, eine unbestimmte Aufgabe.

Ich suche die kanonische Darstellung in der Weise zu übertragen, dass ich, der Formel (46) *entsprechend, die* $x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1}$ *mit geeigneten Potenzen und Producten von* $p(u)$ *und* $p'(u)$ *proportional setze.* Es muss dies nur in solcher Weise geschehen, dass durch Heraufmultipliciren mit $\sigma(u)^n$ überall n-gliedrige σ-Producte entstehen, und zwar solche, die unter einander linear unabhängig sind. Beispielsweise dürfte bei ungeradem n sich folgender Ansatz empfehlen:

$$(52)\quad \begin{cases} x_0 : x_1 \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} : x_{\frac{n+1}{2}} : x_{\frac{n+3}{2}} : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : p(u) : \ldots : p(u)^{\frac{n-1}{2}} : p'(u) : p'(u) \cdot p(u) : \ldots : p'(u) \cdot p(u)^{\frac{n-3}{2}}, \end{cases}$$

dem für gerades n der folgende zur Seite steht:

$$(52^b)\quad \begin{cases} x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n}{2}} : x_{\frac{n+2}{2}} : x_{\frac{n+4}{2}} : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : p(u) : \ldots : p(u)^{\frac{n}{2}} : p'(u) : p'(u) \cdot p(u) : \ldots : p'(u) \cdot p(u)^{\frac{n-4}{2}}. \end{cases}$$

Vielleicht auch scheint es eleganter, statt (52) und (52^b) die einheitliche Formel zu Grunde legen, die schliesslich dasselbe leistet:

$$(53)\quad \begin{cases} x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{n-1} \\ = 1 : p(u) : p'(u) : p''(u) : \ldots : p^{(n-3)}(u) \end{cases}$$

(wo der Index $(n - 3)$ eine $(n - 3)$fache Differentiation bedeutet), doch meine ich, dass man mit den Coordinaten (52) besser rechnet.

Schwieriger, weil um Vieles mannigfaltiger, ist die Verallgemeinerung der *singulären* Darstellung. Wir werden an Stelle des Wendedreiecks jedenfalls ein solches Polyëder der Coordinatenbestimmung zu Grunde legen wollen, dessen n Ebenen zusammengenommen sämmtliche n^2 singuläre Puncte enthalten. Dass es in allen Fällen solche Polyëder gibt, beweist man leicht auf dem Wege des Versuches mit Hülfe des Abel'schen Theorems (indem immer

solche n singuläre Puncte in einer Ebene liegen, deren Argumente zu einander addirt eine Summe ergeben, die modulo ω_1, ω_2 gleich Null ist). Nun wird aber die Zahl dieser Polyëder bei wachsendem n übergross, und eine nähere Überlegung zeigt, dass die entstehenden Polyëder nicht etwa, wie die Wendedreiecke bei der Curve dritter Ordnung, alle gleichberechtigt sind (was man mit Hülfe der $2n^2$ Collineationen und übrigens durch lineare Transformation der Perioden ω_1, ω_2 untersucht), dass selbige vielmehr verschiedenartigen Classen angehören. So findet Herr Lange in seiner wiederholt genannten Dissertation, dass bei $n = 4$ im Ganzen 745 Tetraëder der gewünschten Beschaffenheit existiren, welche sich den genannten Operationen gegenüber auf sechs verschiedene Classen vertheilen. An und für sich scheint es nicht schwierig, bei beliebigem n diese Aufzählung zu wiederholen und nun für jedes der so entstehenden Polyëder als Coordinatenpolyëder die algebraische Darstellung der Normalcurve zu discutiren*). Aber praktische Rücksichten lassen bei gegenwärtiger Gelegenheit betreffs der formulirten Aufgabe eine Beschränkung als durchaus nothwendig erscheinen.

Indem ich mich, was die singuläre Darstellung angeht, im Folgenden auf den Fall des ungeraden n beschränke, will ich ein Coordinatensystem einführen, welches, dem Wendedreiecke (51) *entsprechend, durch folgendes Schema gegeben ist:*

(54)	0, 0	1, 0	2, 0		$(n-1)$, 0
	0, 1	1, 1	2, 1		$(n-1)$, 1
					
					
	0, $(n-1)$	1, $(n-1)$	2, $(n-1)$	. .	$(n-1)$, $(n-1)$

*) Vielleicht sollte man überhaupt alle Coordinatensysteme in Betracht ziehen, deren Ebenen die Eigenschaft haben, der Curve nur in singulären Puncten zu begegnen, ohne darum auszuschliessen, dass einige singuläre Puncte möglicherweise mehrfach als Schnittpuncte auftreten und dafür dann andere singuläre Puncte unter den Schnittpuncten fehlen. Fassen wir die Aufgabe so, so gibt es bereits bei der ebenen Curve dritter Ordnung verschiedenartige singuläre Coordinatensysteme. Es entsteht dann beispielsweise die vielfach benutzte Gleichungsform:

$$(x_0 + x_1 + x_2)^3 - 6k \cdot x_0 x_1 x_2 = 0,$$

wo $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ drei Wendetangenten der Curve vorstellen, deren Berührungspuncte in gerader Linie liegen, etc. etc.

Die Aufstellung zugehöriger x mit Hülfe n-gliedriger σ-Producte mag noch wieder verschoben werden, bis wir sie in §. 9 im Zusammenhange behandeln.

§. 8. *Die Normalcurve n^{ter} Ordnung in kanonischer Darstellung.*

Das im vorigen Paragraphen unter (52), (52^b) definirte kanonische Coordinatensystem soll jetzt insoweit benutzt werden, als wir mit seiner Hülfe die *Flächen zweiten Grades* untersuchen wollen, welche durch die Normalcurve hindurchgehen. Ich will bei den verschiedenen Überlegungen, die diesbezüglich nöthig werden, von den Fällen des geraden oder des ungeraden n alternirend immer nur einen berücksichtigen; der Leser wird mit Leichtigkeit die kleinen Umsetzungen vornehmen, welche jedesmal von dem einen Falle zum anderen führen.

Es handelt sich vor Allem um *wirkliche Aufstellung* der $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängigen quadratischen Relationen. Ich nehme dabei n ungerade und will die Formeln (52) der einfacheren Ausdrucksweise halber eine Zeit lang so schreiben, dass ich $x_{\frac{n+1}{2}}, \ldots, x_{n-1}$ durch $y_0, \ldots, y_{\frac{n-3}{2}}$ ersetze und bei $p(u)$, $p'(u)$ das Argument u unterdrücke. Die Formeln lauten dann:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} : y_0 : y_1 : \ldots : y_{\frac{n-3}{2}}$$
$$= 1 : p : \ldots : p^{\frac{n-1}{2}} : p' : p'p : \ldots : p'p^{\frac{n-3}{2}},$$

wo p' mit p durch die Relation verbunden ist:

$$p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3$$

Die nähere Überlegung ergibt nun vier Arten von quadratischen Relationen:

1) Binomische Relationen von der Gestalt:

$$x_i x_k = x_{i'} x_{k'},$$

die auftreten, weil die beiden zu Vergleich kommenden Producte je derselben Potenz von p gleich werden. Beispiel: $x_0 x_2 = x_1^2$ etc. Solcher Relationen entstehen ebenso viele, als es linear-unabhängige Flächen zweiten Grades gibt, welche durch die rationale Raumcurve $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ten}}$ Grades des Raumes von $\frac{n-1}{2}$ Dimensionen:

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_{\frac{n-1}{2}} = 1 : p : \ldots : p^{\frac{n-1}{2}}$$

hindurchlaufen, nämlich $\frac{n-1 \,.\, n-3}{8}$.

2) Binomische Relationen vom Typus:

$$y_i y_k = y_{i'} y_{k'} \,.$$

Die Abzählung (welche wieder an einer rationalen Raumcurve, die aber nun von der $\left(\frac{n-3}{2}\right)^{\text{ten}}$ Ordnung ist und im Raume von $\frac{n-3}{2}$ Dimensionen liegt, gedeutet werden kann) liefert $\frac{n-3 \,.\, n-5}{8}$ Relationen dieser Art.

3) Binomische Relationen, welche beiderseits ein y enthalten:

$$y_i x_k = y_{i'} x_{k'} \,.$$

Im Ganzen kommen $\frac{n-1 \,.\, n-3}{4}$ hierher gehörige Gleichungen.

4) Quadrinomische Relationen, die entstehen, indem wir das Product $y_i y_k$ durch Einsetzen des für p'^2 vorgegebenen Werthes als Function von p allein darstellen und die drei dabei hervorkommenden Terme durch Producte zweier x ersetzen. Bei der Abzählung müssen wir beachten, dass von allen Producten $y_i y_k$, die einander gleich sind, und ebenso von allen Producten $x_i x_k$, die einander gleich sind, immer nur eines benutzt werden darf (insofern der Gleichheit verschiedener derartiger Producte bereits durch 1), 2) Rechnung getragen ist). Daher wird die Anzahl der neuen Relationen relativ gering; sie beträgt nur $(n-3)$.

Addiren wir zusammen, so haben wir

$$(n-3)\left[\frac{n-1}{8} + \frac{n-5}{8} + \frac{n-1}{4} + 1\right]$$

linear unabhängige quadratische Relationen gefunden. Dies ist aber gerade $\frac{n(n-3)}{2}$, so dass wir in der That sämmtliche Relationen dieser Art gewonnen haben.

Ich werde jetzt weiter zeigen, *dass für $n > 3$ die $\frac{n(n-3)}{2}$ quadratischen Relationen hinreichen, um die Normalcurve n^{ter} Ordnung als solche algebraisch zu definiren.* Es handelt sich um den Nachweis, dass unsere $\frac{n(n-3)}{2}$ Flächen zweiten Grades ausser der

Normalcurve nicht noch andere Bestandtheile gemein haben. Ich zeige dies durch vollständige Induction, indem ich zunächst annehme, dass unser Satz für ein gegebenes $(n-1)$ richtig sei, und dann schliesse, dass er auch bei n selbst gelten muss. Da unser Satz bei $n = 4$ zutrifft, so muss er allgemein richtig sein*).

Der Beweis selbst ist jetzt äusserst einfach. Ich will wieder n als ungerade Zahl annehmen. Dann unterscheiden sich die für die Curve n^{ter} Ordnung geltenden Formeln von denjenigen, die für die Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in Betracht kommen, dadurch, dass sie eine Coordinate, nämlich $y_{\frac{n-3}{2}}$, mehr enthalten. Wir scheiden jetzt die für die Curve n^{ter} Ordnung geltenden quadratischen Relationen in solche, welche $y_{\frac{n-3}{2}}$ enthalten, und solche, welche es nicht thun. Erstere lassen $y_{\frac{n-3}{2}}$ in mannigfacher Weise als rationale Function der anderen Coordinaten berechnen. Nun zeigt ein Blick auf die so entstehenden rationalen Functionen, dass selbige nicht etwa alle gleichzeitig für ein und dasselbe der Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehörige Werthsystem der $x_0, \ldots, x_{\frac{n-1}{2}}$, $y_0, \ldots, y_{\frac{n-5}{2}}$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Nimmt man dies mit der Voraussetzung zusammen, die wir machen müssen: dass nämlich jene quadratischen Relationen, welche $y_{\frac{n-3}{2}}$ nicht enthalten, die Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung rein darstellen, so ist, wie man erkennt, unsere Behauptung erwiesen**).

*) Man sehe auch Bianchi, l. c., wo unser Satz für $n = 5$ unter Benutzung des singulären Coordinatensystems erwiesen wird.

**) Ich habe den Beweis des Textes an die kanonische Darstellung angeknüpft, weil dadurch die Ausdrucksweise bequemer wird. Es ist aber nicht schwer, den Beweis unter Beibehaltung seines Grundgedankens so zu modificiren, dass er der concreten Formeln gar nicht mehr bedarf. Man hat nur zu beachten, dass die Projection der Curve n^{ter} Ordnung von einem *beliebigen* ihrer Puncte aus immer wieder eine Normalcurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liefert, welche ihrerseits durch die zugehörigen quadratischen Relationen rein dargestellt wird. Dies aber wäre unmöglich, wenn die zur Curve n^{ter} Ordnung gehörigen Relationen ausser der Curve noch irgend welche sonstigen Elemente gemein hätten.

§. 9. *Das singuläre Coordinatensystem bei der Normalcurve n^{ter} Ordnung.*

Indem ich mich jetzt bei beliebigem (als ungerade vorausgesetzten) n zur Betrachtung des *singulären* Systems wende, werde ich die Coordinaten fortan zur Unterscheidung mit grossen Buchstaben bezeichnen ($X_0, \ldots, X_{n-1}$, allgemein X_α). Wir haben die X_α in (54) nur erst so weit definirt, dass wir angaben, an welchen Stellen des Periodenparallelogramms der u-Ebene dieselben verschwinden sollen, was in folgender Formel seinen Ausdruck findet:

$$(55) \qquad \varrho X_\alpha(u) = M_\alpha \cdot \prod_{\lambda=0}^{n-1} \sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \alpha\omega_2}{n}\right),$$

wo M_α einen Term bedeutet, der in der u-Ebene nirgends Null ist. Wir werden M_α erstlich in der Weise zu bestimmen haben, dass die Verhältnisse der X_α und überhaupt die Quotienten $X_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ doppeltperiodische Functionen von u mit den Perioden ω_1, ω_2 werden, dann aber, entsprechend der singulären Darstellung der Curve dritter Ordnung, auch so, dass eine Vermehrung des u um $\frac{\omega_2}{n}$ die Verhältnisse der X_α cyklisch vertauscht.

Ich erinnere hier zunächst an die Formeln (31) und (10). Ersterer zufolge ist:

$$e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}(u)}{\left(\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}\right)^2},$$

während wir bei Formel (10) angaben, dass

$$\frac{e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n}$$

eine doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2 ist. *Daher wollen wir jedenfalls setzen:*

$$(56) \qquad \varrho X_0(u) = e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right).$$

Wir nehmen jetzt die Bezeichnung $\sigma_{\lambda,\mu}(u, \omega_1, \omega_2)$ des ersten Abschnitts wieder auf. Nach der dort gegebenen Definition ist

$$\sigma_{0,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = e^{\frac{\alpha\bar{\eta}_2}{n}\left(u+\frac{\alpha\omega_2}{2n}\right)} \cdot \sigma\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$$

(wo $\bar{\eta}_2$ den transformirten Werth von η_2 bezeichnet), also eine Function, welche, wie unser X_α, für

$$u = \frac{\lambda\omega_1 + \alpha\omega_2}{n} \; [\lambda = 0, 1, \ldots, (n-1)]$$

verschwindet. Gleichzeitig ist nach (23)

$$\frac{\sigma_{0,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}$$

eine doppeltperiodische Function von u mit den Perioden ω_1, ω_2. *Vergleichen wir noch* (56), *so sehen wir, dass wir jedenfalls der ersten an die X_α gestellten Anforderung gerecht werden, indem wir allgemein setzen:*

$$(57) \qquad \varrho X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{0,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right).$$

Hiermit ist aber in der That auch der zweiten Forderung (der Forderung cyklischer Vertauschung der X_α bei Vermehrung des u um $\frac{\omega_2}{n}$) Genüge geleistet. Man findet nämlich nach kurzer Rechnung:

$$(58) \qquad X_{n+\alpha}(u) = X_\alpha(u),$$

$$(59) \quad X_\alpha\left(u + \frac{\mu\omega_2}{n}\right) = (-1)^\mu \cdot e^{\mu\bar{\eta}_2\left(u+\frac{\mu\omega_2}{2n}\right)} \cdot X_{\alpha-\mu}(u),$$

wo der dem $X_{\alpha-\mu}$ zugesetzte Factor von α unabhängig ist, so dass für die *Verhältnisse* der X_α in der That eine cyklische Vertauschung vorliegt*). Wir können geradezu schreiben:

$$(60) \qquad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot e^{\alpha\bar{\eta}_2\left(u-\frac{\alpha\omega_2}{2n}\right)} \cdot X_0\left(u - \frac{\alpha\omega_2}{n}\right).$$

Übrigens können wir die X_α auch ohne Benutzung der Trans-

*) Man beachte noch, dass der Formel (58) zufolge der Index α fortan als eine beliebig veränderliche ganze Zahl betrachtet werden kann, deren Werth dann selbstverständlich nur modulo n in Betracht zu ziehen ist.

formationstheorie definiren. Indem wir die Formel (60) mit (31) combiniren, erhalten wir:

$$(61) \qquad \varrho X_\alpha(u) = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\alpha} \cdot \frac{\prod\limits_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,\alpha}(u)}{\left(\prod\limits_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}\right)^2}.$$

Der Proportionalitätsfactor ϱ, der in allen diesen Formeln [(57), (58), (61)] auftritt, ist als solcher natürlich unbestimmt. Ich will aber schon hier angeben, dass wir ihn im folgenden Paragraphen mit Rücksicht auf spätere Zwecke, die über die unmittelbare geometrische Deutung hinausgreifen, in absoluter Weise fixiren werden*).

Wir prüfen noch das Verhalten unserer X_α bei Vermehrung des u um n^{te} Theile der ersten Periode, wie bei Zeichenwechsel des u. Die Rechnung gibt:

$$(62) \quad X_\alpha\left(u + \frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = (-1)^\lambda \cdot e^{\lambda\eta_1\left(u+\frac{\lambda\omega_1}{2n}\right)} \cdot \varepsilon^{-\alpha\lambda} \cdot X_\alpha(u),$$

$$(63) \quad X_\alpha(-u) \qquad = -X_{n-\alpha}(u).$$

Die Formeln (59), (62), (63) *stellen bei Zugrundelegung der* X_α *die* $2n^2$ *Collineationen vor, welche unsere Normalcurve in sich selbst überführen.* Man beachte wohl, dass das Coordinatenpolyëder der X_α, d. h. der Inbegriff der Ebenen

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 0, \quad \ldots$$

bei diesen Collineationen nicht geändert wird, was einen wesentlichen Unterschied des singulären Systems gegenüber dem kanonischen bezeichnet**).

Formel (63) gibt uns jetzt Anlass, folgende Combinationen einzuführen:

*) Dies eben ist der wesentliche Punct, in welchem meine Theorie der X_α von der durch Herrn Bianchi bei $n = 3$ und $n = 5$ entwickelten abweicht.

**) Und zwar speciell des singulären Systems, das wir in (54) auswählten, resp. der anderen, die wir später aus ihm durch lineare Transformation der Perioden ableiten werden. Hätten wir die allgemeinen singulären Systeme eingeführt, von denen in §. 7 die Rede war, so würden sich wesentlich complicirtere Verhältnisse eingestellt haben.

$$(64)\quad Y_0 = X_0\,,\quad Y_1 = X_1 + X_{n-1}\,,\quad \ldots,\quad Y_{\frac{n-1}{2}} = X_{\frac{n-1}{2}} + X_{\frac{n+1}{2}}\,,$$

$$(65)\quad Z_0 = 0\,,\quad Z_1 = X_1 - X_{n-1}\,,\quad \ldots,\quad Z_{\frac{n-1}{2}} = X_{\frac{n-1}{2}} - X_{\frac{n+1}{2}}\,,$$

wo die Y_α *ungerade*, die Z_α *gerade* Functionen von u sind. Ich werde diese Formeln zumeist so benutzen, dass ich auch in ihnen wieder α als eine modulo n zu betrachtende, aber übrigens beliebige ganze Zahl voraussetze, wo dann

$$(66)\qquad Y_\alpha(u) = Y_{-\alpha}(u)\,,\quad Z_\alpha(u) = -Z_{-\alpha}(u)$$

sein wird. Endlich werde ich gleich hier für die Nullwerthe der Z_α und der Differentialquotienten der Y_α diejenige Bezeichnung einführen, die später immer verwendet werden soll. *Ich setze:*

$$(67)\qquad Z_\alpha(0) = 2z_\alpha\,,\quad \left(\frac{dY_\alpha(u)}{du}\right)_{u=0} = y'_\alpha\,.$$

§. 10. *Normirung der* X_α.

Unsere Einführung der X_α würde unvollständig sein, wenn wir nicht ausdrücklich nachwiesen, dass dieselben linear unabhängig sind, d. h. dass zwischen ihnen keine Relation der folgenden Art besteht:

$$(68)\qquad \Sigma c_\alpha X_\alpha = 0\,,$$

wo die c_α von u unabhängige Grössen bedeuten sollen. Hiermit verbinde ich dann gleich die in Aussicht genommene *Normirung* der X_α (bez. der Y_α, Z_α, y'_α, z_α). Man hat es als ein Postulat zu betrachten, dessen Berechtigung in den Entwickelungen des folgenden Abschnitts noch hervortreten soll, *dass in Fragen der hier vorliegenden Art die* ϑ*-Functionen immer diejenigen Functionen sind, denen man möglichst nahe zu kommen suchen muss.* Nun sahen wir bereits in (12) der Einleitung, dass die Fundamentalfunction der Transformationstheorie

$$e^{-G_1u^2}\cdot\frac{\sigma\left(u,\,\frac{\omega_1}{n},\,\omega_2\right)}{\sigma(u,\,\omega_1,\,\omega_2)^2}$$

selbst keinen einfachen Thetaquotienten vorstellt, wohl aber in einen solchen durch Multiplication mit $\sqrt[8]{\Delta : \Delta^n}$ verwandelt werden kann. *Dementsprechend wollen wir fortan in* (56), (57), (61), $\varrho = \sqrt[8]{\Delta : \Delta^n}$ *nehmen und also die Werthe der* $X_\alpha(u)$ *folgendermassen absolut fixiren:*

$$(69)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \sigma_{0,\alpha}\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right),$$

oder auch, was mit Rücksicht auf (32), (33) *dasselbe ist:*

$$(70)\qquad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0} \cdot \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,\alpha}(u).$$

Unter Benutzung des Functionszeichens ϑ_1 haben wir jetzt nach (5) folgende Darstellung der $X_\alpha(u)$ *):

$$(71)\ X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \cdot e^{\frac{-2i\pi u\alpha}{\omega_1}} \cdot q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{nu - \alpha\omega_2}{\omega_1} \cdot \pi, q^n\right),$$

oder auch

$$(72)\qquad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}} \cdot e^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n}, r^{\frac{1}{n}}\right),$$

was uns vermöge (6) die folgenden Reihenentwickelungen ergibt:

$$(73)\qquad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{i \cdot q^{\frac{n}{4}} \cdot \prod (1-q^{2h})^{3n}}$$

$$\cdot \sum_0^\infty (-1)^h \left\{ \begin{array}{l} q^{\frac{[(2h+1)n - 2\alpha]^2}{4n}} \cdot e^{[(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ - q^{\frac{[-(2h+1)n - 2\alpha]^2}{4n}} \cdot e^{[-(2h+1)n - 2\alpha]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\},$$

*) Insbesondere sind also die Nullwerthe z_α durch die Formel gegeben:

$$z_\alpha = (-1)^{\alpha+1} \cdot \sqrt{\frac{2n\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{q^{\frac{\alpha^2}{n}}}{\sqrt[8]{\Delta^n}} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\alpha\omega_2\pi}{\omega_1}, q^n\right)$$

und stimmen daher bis auf einen Zahlenfactor mit denjenigen Grössen überein, die ich in meiner Notiz: *Über gewisse Theilwerthe der ϑ-Function* in Bd. 17 der Math. Annalen (p. 570 daselbst) eben auch als z_α bezeichnet habe. Die Relationen zwischen den z_α, die ich damals mittheilte, werden sich weiterhin aus allgemeineren Beziehungen, welche die $X_\alpha(u)$ betreffen, ergeben, indem wir $u = 0$ setzen.

beziehungsweise:

$$(74)\quad X_\alpha(u) = (-1)^\alpha \cdot \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_2 u^2}{2\omega_2}}}{i \cdot r^{\frac{n}{4}} \cdot \Pi(1-r^{2k})^{3n}}$$

$$\cdot \sum_0^\infty (-1)^k \cdot r^{\frac{(2k+1)^2}{4n}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{-(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}} \cdot e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_2}} \end{array} \right\}.$$

Ich habe diese Reihenentwickelungen so ausführlich mitgetheilt, weil ich sie später noch benutzen werde. Die *Unabhängigkeit* der X_α im Sinne von (68) ergibt sich am einfachsten aus (74), indem die X_α dort mit Hülfe der Multiplicatoren

$$e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, (n-1) \\ k = 0, 1, \ldots, (n-1) \end{pmatrix},$$

deren Determinante nicht verschwindet, aus n durchaus verschiedenen Reihenentwickelungen linear zusammengesetzt erscheinen.

Aus (74) wollen wir noch folgende Formel ableiten, die ebenfalls später benutzt wird, und in der C eine numerische Constante bedeutet, deren Werth uns nicht weiter interessirt:

$$(75)\qquad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = C \cdot \omega_2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n}, r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2}, r\right)^n}.$$

Ich habe diese Formel hierhergesetzt, um von vorneherein den Vergleich unserer Grössen X_α, Y_α, Z_α mit denjenigen Functionen, welche die Transformationstheorie gewöhnlich betrachtet, nahe zu legen. Sieht man von dem Umstande ab, dass meistens neben ϑ_1 immer auch ϑ, ϑ_2, ϑ_3 gebraucht werden (siehe oben, §. 1), dass ferner bei der üblichen Darstellung von gemeinsamen Factoren $\omega_2^{\frac{n-1}{2}}$ etc. kurzweg abstrahirt wird, so erweisen sich die Combinationen:

$$\frac{Y_0(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n}, \qquad \frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{X_\alpha(u) + X_{n-\alpha}(u)}{\sigma(u)^n},$$

$$\left(\alpha = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}\right)$$

als wohlbekannte Grössen der Transformationstheorie. Dagegen scheint es nicht, dass man die Ausdrücke (75) einzeln, oder, was auf das-

selbe hinauskommt, dass man neben den $Y_\alpha(u):\sigma(u)^n$ die Combinationen

$$\frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}$$

betrachtet hat. Nun sind aber nach meiner Auffassung gerade diese Combinationen (beziehungsweise unter den Nullwerthen die z_α) die wichtigsten. Ich möchte es also für wahrscheinlich halten, dass eine Einführung derselben in die eigentliche Transformationstheorie, resp. eine Erweiterung der Transformationstheorie bis zu dem Puncte, wo die genannten Combinationen in die Betrachtung eintreten, von grossem Vortheil sein wird.

§. 11. *Die quadratischen Relationen zwischen den X_α und das Integral erster Gattung n^{ter} Stufe.*

Wir gehen für einen Augenblick zur geometrischen Theorie der Normalcurven n^{ter} Ordnung zurück (wobei die gerade getroffene Normirung der X_α noch ohne Bedeutung ist). Es soll sich darum handeln, *die Normalcurve n^{ter} Ordnung unter Zugrundelegung der X_α algebraisch darzustellen*, wozu es nach §. 9 genügt, $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige quadratische Relationen zwischen den X_α aufzufinden. *Ich sage, dass wir solche Relationen sofort gewinnen, wenn wir von der wohlbekannten σ-Relation ausgehen:*

$$\begin{aligned}(76)\qquad &\sigma(t+u)\,.\,\sigma(t-u)\,.\,\sigma(v+w)\,.\,\sigma(v-w)\\ &+\sigma(t+v)\,.\,\sigma(t-v)\,.\,\sigma(w+u)\,.\,\sigma(w-v)\\ &+\sigma(t+w)\,.\,\sigma(t-w)\,.\,\sigma(u+v)\,.\,\sigma(u-v)=0.\end{aligned}$$

Man verstehe hier nämlich unter σ speciell die σ-Function mit den Perioden $\frac{\omega_1}{n}$, ω_2 und substituire nun für t, u, v, w die folgenden Argumente:

$$\frac{u}{2}-\frac{\alpha_1\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_2\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_3\omega_2}{n},\quad \frac{u}{2}-\frac{\alpha_4\omega_2}{n}.$$

Wir bekommen dann eine Gleichung, die sich vermöge der in (61) oder (69) enthaltenen Definition der X_α und der Bezeichnung z_α für die Nullwerthe sofort in folgende umsetzt:

$$\begin{aligned}(77)\qquad &z_{\alpha_1-\alpha_2}\cdot z_{\alpha_3-\alpha_4}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_2}\cdot X_{\alpha_3+\alpha_4}\\ &+z_{\alpha_1-\alpha_3}\cdot z_{\alpha_4-\alpha_2}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_3}\cdot X_{\alpha_4+\alpha_2}\\ &+z_{\alpha_1-\alpha_4}\cdot z_{\alpha_2-\alpha_3}\cdot X_{\alpha_1+\alpha_4}\cdot X_{\alpha_2+\alpha_3}=0\text{ *)}.\end{aligned}$$

*) Man vergl. wieder die Bianchi'sche Arbeit, wo die Formeln für $n=5$ auf analytisch-geometrischem Wege gewonnen werden. Übrigens finden sich die

Ich behaupte, dass in diese eine Formel die $\frac{n(n-3)}{2}$ *gesuchten quadratischen Relationen bereits eingeschlossen sind.*

Zum Beweise beachte man, dass jede in (77) einbegriffene Gleichung nur Glieder $X_i X_k$ von einer bestimmten Indexsumme $(i+k) \equiv s$ enthält. Linear abhängig können also nur solche Gleichungen sein, welche dasselbe s besitzen. *Unter ihnen finden sich nun*, wie ich zunächst bemerke, *jedesmal* $\frac{n-3}{2}$ *unabhängige*. Wählt man nämlich irgend zwei Terme von der Indexsumme s nach Belieben aus: $X_i X_{s-i}$ und $X_{i'} X_{s-i'}$, so gestattet (77), alle $\frac{n-3}{2}$ anderen Terme derselben Indexsumme durch diese linear auszudrücken. *Jetzt kann s im Ganzen die n Werthe haben:* 0, 1, 2, ..., $(n-1)$. Daher kommen in der That $\frac{n(n-3)}{2}$ linear unabhängige Relationen, was zu beweisen war.

Ich will von den Formeln (77) hier noch eine Anwendung machen, vermöge deren ich der ursprünglichen Forderung gerecht werde, von der ich in meiner Note: *Über unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung* (siehe oben, Einleitung) ausgegangen bin. *Es soll sich darum handeln, die Formeln* (69) *zu invertiren, d. h. die Variable u durch die Grössen X_α auszudrücken.* Die Grösse u erscheint dabei als an der Normalcurve hin erstrecktes Integral erster Gattung und zwar speciell als »Integral erster Gattung n^{ter} Stufe«, insofern in dem Ausdrucke des Integrals als Coëfficienten der Variabelen die Grössen y'_α, z_α auftreten, welche ihrerseits zur n^{ten} Stufe gehören, wie ich bald ausführlich nachweisen werde.

Die Rechnung selbst verläuft folgendermassen. Es seien α, β irgend zwei in Bezug auf n als Modul verschiedene Indices. Wir bilden uns dann, indem wir $X_\alpha(u) : X_\beta(u)$ nach u differentiiren, den Ausdruck:

$$\frac{X_\beta \cdot dX_\alpha - X_\alpha \cdot dX_\beta}{X_\beta^2 \cdot du}. \tag{78}$$

Relationen für $n = 5$ (und zwar auf ganz ähnliche Weise, wie bei Bianchi, abgeleitet) auch in Halphen's Abhandlung: *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (siehe p. 289 des Bd. XVIII der »Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris«). — Setzt man in (77) $u = 0$, so hat man die biquadratischen Relationen zwischen den z_α, die ich in Bd. XVII der Mathematischen Annalen p. 573 angab.

Derselbe ist eine doppeltperiodische Function von u, welche $2n$-mal (je zweimal an jeder Stelle $X_\beta = 0$) im Periodenparallelogramme der u-Ebene unendlich und also auch $2n$-mal daselbst gleich Null wird. Er lässt sich also nach dem Hermite'schen Satze in die Gestalt setzen:

$$(79)\qquad \frac{\Sigma a_{ik} X_i X_k}{X_\beta^2},$$

wo die Summe zunächst über alle Indexcombinationen i, k zu nehmen ist. Wir werden unser Ziel erreicht haben, sobald wir die hier auftretenden a_{ik} kennen; denn wir haben dann durch Umkehr des Differentiationsprocesses:

$$(80)\qquad u = \int \frac{X_\beta \,.\, dX_\alpha - X_\alpha \,.\, dX_\beta}{\Sigma a_{ik} X_i X_k}.$$

Ich sage jetzt zunächst, dass die a_{ik} der Mehrzahl nach gleich Null genommen werden können. Zunächst nämlich folgt, wenn wir Formel (62) in Anwendung bringen, also das u in den $X(u)$ um $\frac{\lambda\omega_1}{n}$ vermehren, wobei du ungeändert bleibt, dass alle diejenigen in (80) auftretenden Terme sich gegenseitig wegheben, deren Indexsumme $(i + k)$ von $(\alpha + \beta)$ verschieden ist. Unter je dreien der sonach allein in Betracht kommenden Glieder $X_i X_k$ besteht aber, wie wir gerade sahen, eine lineare Relation. *Wir können unsere Summe also auf eine lineare Combination irgend zweier dieser Glieder beschränken.*

Ich setze dem Gesagten entsprechend, indem ich mit γ eine Zahl bezeichne, welche weder mit α noch mit β modulo n congruent ist:

$$(81)\qquad X_\beta \,.\, \frac{dX_\alpha}{du} - X_\alpha \,.\, \frac{dX_\beta}{du} = a \,.\, X_\alpha X_\beta + b \,.\, X_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma},$$

wo jetzt nur noch die beiden Constanten a, b zu bestimmen sind. Dies aber gelingt sofort, wenn wir die Nullwerthe y'_α, z_α als bekannt erachten. Durch geeignete Anwendung von (59) leiten wir nämlich aus (81) zunächst folgende zwei Gleichungen ab:

$$X_{\beta-\gamma} \,.\, \frac{dX_{\alpha-\gamma}}{du} - X_{\alpha-\gamma} \,.\, \frac{dX_{\beta-\gamma}}{du} = a \,.\, X_{\alpha-\gamma} X_{\beta-\gamma} + b \,.\, X_0 X_{\alpha+\beta-2\gamma},$$

$$X_{\beta-\alpha} \,.\, \frac{dX_0}{du} - X_0 \,.\, \frac{dX_{\beta-\alpha}}{du} = a \,.\, X_0 X_{\beta-\alpha} + b \,.\, X_{\gamma-\alpha} X_{\beta-\gamma},$$

und erhalten hieraus, indem wir $u = 0$ setzen:

$$(82)\quad \begin{cases} z_{\beta-\gamma}\cdot y'_{\alpha-\gamma} - z_{\alpha-\gamma}\cdot y'_{\beta-\gamma} = 2a\,.\,z_{\alpha-\gamma}z_{\beta-\gamma}, \\ z_{\beta-\alpha}\cdot y'_0 \qquad\qquad\qquad = b\,.\,z_{\gamma-\alpha}z_{\beta-\gamma}, \end{cases}$$

was unmittelbar die gewünschten Formeln sind. Tragen wir in (81), bez. (80) ein, *so haben wir folgenden allgemeinen Werth des Integrals erster Gattung n^{ter} Stufe erhalten:*

$$(83)\quad u = \int \frac{2\,z_{\alpha-\gamma}z_{\beta-\gamma}(X_\alpha\,dX_\beta - X_\beta\,dX_\alpha)}{(z_{\beta-\gamma}y'_{\alpha-\gamma} - z_{\alpha-\gamma}y'_{\beta-\gamma})\,X_\alpha X_\beta + 2z_{\alpha-\beta}y'_0.X_\gamma X_{\alpha+\beta-\gamma}}.$$

Beispielsweise also bei $n = 5$, indem wir $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ setzen:

$$(84)\qquad u = \int \frac{2\,z_1 z_2(X_1\,dX_2 - X_2\,dX_1)}{(z_2 y'_1 - z_1 y'_2)X_1X_2 - 2z_1y'_0.X_0X_3}.$$

Dies Resultat muss mit demjenigen stimmen, welches Herr Bianchi auf p. 261, 262 seiner Arbeit eben auch für $n = 5$ abgeleitet hat. Wir verschieben den Vergleich bis zum Schlusse, indem wir behufs Durchführung desselben den Zusammenhang der y'_α und z_α kennen müssen, dieser aber erst in den letzten Paragraphen des folgenden Abschnitts abgeleitet werden kann.

Dritter Abschnitt.

Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln. Coordinatenverwandlungen bei der Normalcurve. Die $\mathfrak{X}_\gamma(u)$ und die A_γ.

§. 12. *Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln der n^{ten} Stufe.*

Der schliessliche Zielpunct, dem ich mit gegenwärtiger Arbeit zustrebe, besteht in der Erkenntniss gewisser Fundamentaleigenschaften der normirten Moduln y'_α und z_α, bez. solcher Grössen, die aus ihnen abgeleitet sind. Ich wünsche in dieser Hinsicht hier zunächst zu zeigen, dass die y'_α, z_α zusammengenommen ein volles Modulsystem der n^{ten} Stufe bilden, und zwar in der Weise, dass ich erstlich die y'_α, z_α rational durch die Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ ausdrücke, dann aber die Mittel gebe, um rückwärts diese Theilwerthe als rationale Functionen der y'_α, z_α zu berechnen.

Die erste der angedeuteten Aufgaben erledigt sich sofort, wenn wir Formel (70) zu Grunde legen und dementsprechend schreiben:

$$(85)\quad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^\alpha \cdot \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{\lambda,0}^3 \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sigma_{\lambda,\alpha}(u)\cdot\sigma_{-\lambda,\alpha}(u)}{\sigma_{\lambda,0}^2\cdot\sigma_{0,\alpha}(u)^2} \cdot \left[\frac{\sigma_{0,\alpha}(u)}{\sigma(u)}\right]^n.$$

Die dreierlei rechterseits auftretenden Factoren sind bereits früher (Formel (37), (28) und (35)), in dem hier in Betracht kommenden Sinne ausgewerthet worden. Tragen wir ein, so ergibt sich:

$$(86)\quad \frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[p\left(u-\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)\right]$$

$$\cdot \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{p(u) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}{p\left(u-\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}\right].$$

Es ist dies sozusagen die Stammformel, aus welcher die Ausdrücke der z_α, y_α' hervorkommen: wir finden die z_α, indem wir $u = 0$ setzen, die y_α', wenn wir zuerst nach u differentiiren und dann $u = 0$ nehmen. Ich will hier der Kürze halber nur folgende zwei Formeln zusammenstellen:

$$(87)\quad z_\alpha = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)} \cdot \prod_{\lambda=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[p\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)\right]$$

$$\cdot {\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}}' \frac{1}{p\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right) - p\left(\frac{\mu\omega_2}{n}\right)} \cdot \frac{1}{p'\left(\frac{\alpha\omega_2}{n}\right)},$$

wo der dem letzten Productzeichen beigesetzte Accent bedeutet, dass ein bestimmtes Glied (dasjenige, welches $\mu = \alpha$ entsprechen würde) bei der Productbildung auszulassen ist, — ferner:

$$(88)\quad y_0' = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\prod_1^{\frac{n-1}{2}} p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)},$$

was nur eine andere Form von (37) ist.

Um jetzt rückwärts die Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$ etc. durch die y_α', z_α auszudrücken, gehe ich von der wichtigen Formel aus, welche Jacobi der sogenannten umgekehrten Transformation zu Grunde gelegt hat*), und die unserer Bezeichnung folgendermassen lautet**):

$$(89)\quad \sum_0^{n-1}{}_\lambda\, \varepsilon^{-\alpha\lambda}\,.\,\frac{d\log\sigma\left(u-\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)}{du}=\frac{\eta_1}{1-\varepsilon^{-\alpha}}+\frac{y_0'\cdot X_{\alpha+\mu}(u)}{z_\alpha\cdot X_\mu(u)}\,.$$

Indem wir diese Formel einmal, zweimal nach u differentiiren und dann $u=0$ setzen, bekommen wir lineare Gleichungen für die Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$, aus denen wir letztere mit leichter Mühe bestimmen können, — vorausgesetzt natürlich, dass wir die auf der rechten Seite auftretenden Grössen zu berechnen wissen. Nun beginnt die Reihenentwickelung von $X_0(u)$ mit $y_0'\,.\,u$ und enthält nur ungerade Potenzen von u, während die Entwickelung der übrigen $X_\alpha(u)$ mit den Termen $z_\alpha+\frac{y_\alpha'}{2}\,.\,u$ einsetzt. Hieran anknüpfend werden wir in §. 14 alle höheren Terme der in Rede stehenden Entwickelungen rational durch die y_α', z_α ausdrücken. Ist dies geschehen, so kennen wir in der That alle Grössen, welche bei der Discussion von (89) rechterseits auftreten, und können dann die gewünschte Berechnung der Theilwerthe von $p(u)$, $p'(u)$, — oder auch von $p''(u)$ etc. — mit Leichtigkeit durchführen.

Ich will den Verlauf der Rechnung hier nur für die Theilwerthe von $p(u)$ und zwar diejenigen derselben, bei denen $\mu=0$ ist, genauer angeben. Wir haben aus (89) durch einmalige Differentiation nach u:

$$(90)\quad \sum_0^{n-1}{}_\lambda\, \varepsilon^{-\lambda\alpha}\,.\,p\left(u-\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)=\frac{y_0'\left(X_\alpha\frac{dX_0}{du}-X_0\frac{dX_\alpha}{du}\right)}{z_\alpha\cdot X_0^2}\,.$$

Nun sei unter Benutzung der in §. 14 einzuführenden Bezeichnung:

$$(91)\quad X_0(u)=y_0'\,.\,u+a_{0,1}\,.\,u^3+\dots,$$

*) Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. I, p. 272 ff.

**) Die hier mitgetheilte Umsetzung der Jacobi'schen Formel rührt von Herrn Kiepert her, vergl. Bd. 76 des Journals für Mathematik p. 37, 38. Man sehe weiter Frobenius und Stickelberger in Bd. 88 ebenda, p. 169 ff.

sowie für $\alpha \gtrless 0 \pmod{n}$:

$$(92) \qquad X_\alpha(u) = z_\alpha + \frac{y_\alpha'}{2} . u + b_{\alpha,1} . u^2 + \cdots .$$

Indem wir diese Entwickelungen in (90) eintragen und nach Potenzen von u ordnen, kommt:

$$(93) \qquad \sum_1^{n-1}{}_\lambda\, \varepsilon^{-\lambda\alpha} . p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = \frac{3 a_{0,1}}{y_0'} - \frac{b_{\alpha,1}}{z_\alpha} .$$

Hier kann α nach Belieben gleich 1, 2, ..., $(n-1)$ genommen werden; wir haben also ebenso viele lineare Gleichungen als Unbekannte $p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)$ *). Um aber diese Gleichungen elegant auflösen zu können, setzen wir noch eine Relation hinzu, die aus (86) hervorgeht. Schreiben wir nämlich in (86) $\alpha = 0$, so kommt:

$$\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{p(u) - p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)}{p'\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right)},$$

und hieraus, indem wir nach Potenzen von u ordnen und (88) heranziehen:

$$(94) \qquad \sum_1^{n-1}{}_\lambda\, p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = -\frac{2 a_{0,1}}{y_0'} .$$

Die Combination von (93), (94) *ergibt jetzt folgendes Resultat:*

$$(95) \quad p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = -\frac{5}{n} \cdot \frac{a_{0,1}}{y_0'} - \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_\alpha \frac{\varepsilon^{\lambda\alpha} + \varepsilon^{-\lambda\alpha}}{n} \cdot \frac{b_{\alpha,1}}{z_\alpha},$$

was die gewünschte Endformel ist **).

*) Natürlich ist $p\left(\frac{\lambda\omega_1}{n}\right) = p\left(\frac{-\lambda\omega_1}{n}\right)$, wovon ich im Texte der bequemeren Ausdrucksweise wegen keinen Gebrauch mache.

**) Man vergl. hierzu die ganz ähnliche Rechnung, vermöge deren Herr Kronecker in den Berliner Monatsberichten von 1875 (p. 498 ff. daselbst) die Theilwerthe von $\sin^2 am\, u$ durch die Wurzeln der Jacobi'schen Modular- und Multiplicatorgleichung ausdrückt.

Ich berühre hier noch einen verwandten Gegenstand, auf den zuerst Herr Sylow in den Berichten der Akademie zu Christiania von 1864 eingegangen ist, nachdem Abel bereits einige diesbezügliche Andeutungen gegeben hatte, die *linearen Relationen* nämlich, welche zwischen den Theilwerthen der elliptischen Functionen bestehen. Wie Herr Engel nachgewiesen hat (Berichte der königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom Juli 1884) lauten dieselben unter Zu-

§. 13. *Coordinatenverwandlungen bei der Normalcurve.*

Unsere weiteren Untersuchungen knüpfen aufs Neue an eine directe geometrische Betrachtung der Normalcurve n^{ter} Ordnung an.

Wir haben bislang zwei Darstellungen der Normalcurve einander gegenüber gestellt: die *kanonische* Darstellung des §. 7 und die *singuläre* Darstellung der §§. 9—11. Aber jede dieser Darstellungen ist nur eine unter einer Anzahl gleichberechtigter. Wir gewinnen die letzteren, wie wir schon sagten, indem wir einerseits u den charakteristischen Umformungen unterwerfen:

$$(96) \qquad u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n},$$

$$(97) \qquad u' = -u,$$

indem wir andererseits ω_1, ω_2 in beliebiger Weise linear transformiren:

$$(98) \qquad \begin{cases} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \\ \omega_2' = \gamma\omega + \delta\omega_2. \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

Was speciell die *kanonische* Darstellung angeht, so bemerkten wir bereits, dass sie mit Modulfunctionen erster Stufe zu thun hat,

grundelegung der Weierstrass'schen Bezeichnungen folgendermassen:

$$\sum_0^{n-1}{}_{\mu} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu}}{p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)} = 0; \quad \sum_0^{n-1}{}_{\mu} \frac{\varepsilon^{2\lambda\mu} \cdot p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)}{p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)} = 0.$$

Man leitet diese Relationen (was Herr Engel unter leichter Modification der Bezeichnungen ausführt) unmittelbar aus Formel (89) des Textes ab, wenn man zunächst 2μ statt μ schreibt, dann für u der Reihe nach

$$\frac{\mu\omega_2}{n} + \frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\mu\omega_2}{n} + \frac{\omega_2}{2}, \quad \frac{\mu\omega_2}{n} + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

einträgt und endlich die so entstehenden drei Gleichungen nach Multiplication mit gewissen Factoren, deren Summe gleich Null ist, zusammenaddirt —, worauf der Umstand zur Geltung kommt, dass der Quotient

$$X_{2\mu}(u) : X_0(u)$$

für die genannten drei Werthe von u genau denselben Werth annimmt. Letzterer Satz kann, wie hier hervorgehoben werden soll, in eleganter Weise als Eigenschaft der Normalcurve n^{ter} Ordnung gedeutet werden. Wenn ich hierauf im Texte nicht eingehe, so geschieht es, weil es sich dabei um Lageneigenthümlichkeiten solcher Puncte der Normalcurve handelt, deren Argumente von den Argumenten der singulären Puncte um halbe Perioden abweichen, wir aber mit den Lagenverhältnissen der singulären Puncte bereits hinreichend beschäftigt sind.

so dass sie gegenüber den Transformationen (97) durchaus ungeändert bleibt. Aber auch die Umformung (97) bewirkte nur eine unbedeutende Umänderung des kanonischen Coordinatensystems. *Es gibt also im Wesentlichen n^2 unterschiedene Coordinatensysteme, welche aus einem beliebigen derselben durch die Umformungen* (96) *hervorgehen.*

Gewissermassen umgekehrt ist es bei der *singulären* Darstellung. Nach den Formeln des §. 9 bleibt das singuläre Coordinatensystem nicht nur bei (97) sondern überhaupt bei allen Transformationen (96) in der Hauptsache ungeändert. *Wollen wir andere, gleichberechtigte Systeme finden, so müssen wir die Operationen* (98) *anwenden.* Es ist leicht zu sehen, dass die Anzahl der gleichberechtigten Systeme mit der Zahl der unterschiedenen Transformationen n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen zusammenfällt. Die Ebenen des singulären Coordinatensystems entstehen nämlich auf alle Fälle aus der ersten, $X_0(u) = 0$, durch die Umformungen (96). Es fragt sich also nur, auf wie viele Weisen die Ebene X_0 angenommen werden kann. Nun ist, wie wir früher sahen

$$\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n} = \sqrt[8]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot e^{-G_1 u^2} \cdot \frac{\sigma\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)}{\sigma(u, \omega_1, \omega_2)^n};$$

jedes X_0 correspondirt also einer bestimmten Transformation n^{ter} Ordnung und umgekehrt. *Die Anzahl der wesentlich unterschiedenen singulären Coordinatensysteme ist daher, der bekannten Formel zufolge:*

$$(99) \qquad N = n \prod \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

wo das Product über alle unterschiedenen Primfactoren der Zahl n zu erstrecken ist.

Es entsteht jetzt das Problem, den Zusammenhang aller dieser verschiedenartigen Coordinatensysteme darzulegen. Wir wollen dabei jenes singuläre System, welches wir in §. 9 einführten, und das wir fernerhin als *erstes* singuläres System bezeichnen, zum Ausgangspuncte wählen, alle in Betracht kommenden Constanten aber durch die zum ersten Systeme gehörigen y_α', z_α darzustellen suchen. Unsere erste Aufgabe wird sein, mit dem genannten Systeme das kanonische Coordinatensystem des §. 8 in Verbindung zu setzen. Eine fernere Betrachtung der anderen kanonischen Coordinatensysteme erscheint dann überflüssig, weil selbige aus dem ersten kanonischen Systeme durch

die n^2 Collineationen hervorgehen, die (96) entsprechen, diese Collineationen aber unter Zugrundelegung des ersten singulären Systems, wie wir in §. 9 sahen, äusserst einfache Formeln erhalten. So bleibt denn nur noch der Zusammenhang des ersten singulären Systems mit den anderen singulären Systemen zu erforschen, eine Aufgabe, die selbst späterhin in mehrere Einzelprobleme zerlegt werden wird.

Indem ich nunmehr die angedeuteten Aufgaben hinter einander behandele, halte ich durchweg an der geometrischen Ausdrucksweise fest. Für den Kundigen aber muss unmittelbar einleuchten, dass es sich, analytisch zu reden, um die Grundprobleme der Transformationstheorie handelt, wobei sich unsere Behandlung von der sonst üblichen dadurch unterscheidet, dass der Werth $u = 0$, den man gemeinhin auszeichnet, nur als einer unter den n^2 Werthen $u = \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ betrachtet wird $[\lambda, \mu = 0, 1, \ldots (n-1)]$. Eben hierin liegt die »Erweiterung« des Transformationsproblems, von der am Schlusse des §. 10 die Rede war. Diese Erweiterung ist bei uns unabweisbar, insofern doch alle singulären Puncte der Normalcurve geometrisch gleichberechtigt erscheinen.

§. 14. *Über die Verbindung des ersten singulären Systems mit dem ersten kanonischen.*

Um jetzt die erste unserer Aufgaben zu behandeln, wird es von vorneherein gut sein, zwischen geraden und ungeraden Functionen von u zu unterscheiden und also statt der X_α die Combinationen Y_α, Z_α einzuführen, die wir in (64), (65) definirten. Die Quotienten $Y_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ sind gerade, die Quotienten $Z_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ ungerade Functionen von u, übrigens beide ganze lineare Functionen der kanonischen Variabelen (52):

$$1, \quad p(u), \quad p(u)^2, \quad \ldots, \quad p(u)^{\frac{n-1}{2}},$$

$$p'(u), \quad p'(u)\cdot p(u), \quad \ldots, \quad p'(u)\cdot p(u)^{\frac{n-3}{2}}.$$

Berücksichtigen wir noch die Benennungen y_α', z_α für die Nullwerthe, so können wir jedenfalls schreiben:

$$(100)\quad \frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = y_\alpha' \cdot p(u)^{\frac{n-1}{2}} + a_{\alpha,1}\cdot p(u)^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + a_{\alpha,\frac{n-1}{2}},$$

$$(101)\quad \frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = -p'(u)\left(z_\alpha \cdot p(u)^{\frac{n-3}{2}} + b_{\alpha,1} \cdot p(u)^{\frac{n-5}{2}} + \dots + b_{\alpha,\frac{n-3}{2}}\right),$$

(wo die Bezeichnung mit der in (91), (92) verwandten übereinstimmt). *Unsere Aufgabe wird darauf zurückkommen, die successiven Coëfficienten $a_{\alpha,\varkappa}$, $b_{\alpha,\varkappa}$ zu berechnen.* Zu dem Zwecke mögen wir die Entwickelungen (100), (101) in die für die X_α geltenden quadratischen Relationen eintragen und verlangen, dass alle entstehenden Gleichungen vermöge der einen, welche $p(u)$ mit $p'(u)$ verknüpft, zu identischen werden sollen. Die zahlreichen Relationen, welche wir so erhalten, müssen zur Bestimmung der unbekannten Coëfficienten jedenfalls ausreichen, insofern ja die Normalcurve n^{ter} Ordnung durch die zugehörigen quadratischen Relationen vollkommen definirt ist. Inzwischen haben wir ein sehr viel übersichtlicheres Mittel, um die gesuchten Grössen durch die z_α, y_α' und ihre nach g_2, g_3 genommenen Differentialquotienten auszudrücken. *Einem bekannten Jacobi'schen Gedanken folgend werden wir nämlich eine lineare partielle Differentialgleichung aufstellen, der $Y_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ and $Z_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ als Function von $p(u) = p$, g_2, g_3 genügen. Diese Differentialgleichung gestattet uns dann, jeden der gesuchten Coëfficienten recurrent aus den vorangehenden zu berechnen.*

Um die in Rede stehende Differentialgleichung zu gewinnen, gehen wir von (75) aus:

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n} = C \cdot \omega_2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2} - \frac{\alpha\pi}{n},\ r^{\frac{1}{n}}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_2},\ r\right)^n}$$

und stellen zunächst die wohlbekannte Differentialgleichung auf, welcher der rechts stehende ϑ_1-Quotient in Bezug auf $\frac{u}{\omega_1}$, $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ als unabhängige Variabele genügt. Sodann gestalten wir diese Differentialgleichung um, indem wir für den ϑ-Quotienten den Ausdruck $X_\alpha(u) : [\omega_2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sigma(u)^n]$ substituiren, beachten, dass er eine homogene Function der Variabelen u, ω_1, ω_2 ist, und endlich statt u, ω_1, ω_2 die Grössen p, g_2, g_3 als unabhängige Veränderliche einführen. Hier nun bewährt sich die Normirung, die wir für die X_α in §. 10 verabredet haben. Der Erfolg ist nämlich der, dass die in der schliesslich resultirenden Differentialgleichung auftretenden Coëfficienten *rationale* Functionen von g_2, g_3 werden.

Ich werde hier nicht in die Einzelheiten der Rechnung eingehen. Für denjenigen Quotienten nämlich, den wir $X_0(u) : \sigma(u)^n$ nennen, hat bereits Hr. Kiepert die Rechnung durchgeführt (Bd. 88 des Journals für Mathematik, p. 209; siehe auch Frobenius und Stickelberger, Bd. 92 ebenda, p. 327), und es ist von vorneherein klar, dass die fragliche Differentialgleichung von dem Index α ganz unabhängig ist. Ich darf mich also darauf beschränken, das Resultat kurz anzugeben. Dasselbe läuft darauf hinaus, *dass sämmtliche Grössen*

$$\frac{X_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}, \quad \textit{oder auch} \quad \frac{Y_\alpha(u)}{\sigma(u)^n}, \quad \frac{Z_\alpha(u)}{\sigma(u)^n},$$

die ich zusammenfassend mit ϱ bezeichnen will, der folgenden partiellen Differentialgleichung genügen:

$$(102) \quad (4p^3 - g_2 p - g_3) \cdot \frac{\partial^2 \varrho}{\partial p^2} + \left[(6 - 4n)p^2 + \frac{4n-3}{6} \cdot g_2\right] \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p}$$
$$- \frac{2n}{3}\left(18 g_3 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_2} + g_2^2 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_3}\right) + n(n-1)\,p \cdot \varrho = 0,$$

der dann noch die Homogeneitätsrelation zutritt:

$$(103) \quad p \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial p} + 2g_2 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_2} + 3g_3 \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial g_3} = \frac{n-1}{4} \cdot \varrho .$$

Eine Betrachtung der Gleichungssysteme, welche die y_α', z_α mit g_2, g_3 verknüpfen, liegt ausserhalb der Grenzen der gegenwärtigen Darstellung. Ich werde also auch bei der Berechnung der in (100), (101) auftretenden Coëfficienten mit Hülfe von (102), (103) nicht länger verweilen, und bemerke nur, dass sich dieselbe in den niedersten Fällen $n = 3, 5, 7$ sehr einfach gestaltet*).

Uebrigens aber mögen folgende Bemerkungen hier noch eine Stelle finden. Ich will einen Augenblick, wie früher bereits geschah, $p(u) = \Sigma(u) : \sigma(u)^2$, $p'(u) = -2T(u) : \sigma(u)^3$ setzen. Wir erreichen dann durch Inversion der Formeln (101), (102), dass wir alle Producte

$$\sigma(u)^a \cdot \Sigma(u)^b \cdot T(u)^c, \quad \text{wo} \quad a + 2b + 3c = n,$$

als lineare homogene Functionen der $X_\alpha(u)$ darstellen können. Aus den so gewonnenen Formeln erhalten wir dann leicht entsprechende

*) Was die $a_{0,k}$ betrifft, so sehe man auch Kiepert l. c.

Ausdrücke für die

$$\sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)^a . \Sigma\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)^b . T\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)^c .$$

Schliesslich können wir aus den so entstehenden Resultaten insbesondere die Functionen $p\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(u - \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ in ihrer Abhängigkeit von den $X_\alpha(u)$ und die Theilwerthe $p\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$, $p'\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\right)$ als Functionen der y_α', z_α berechnen, wodurch wir auf anderem Wege zu demselben Ziele geführt werden, das wir in §. 12 mit Hülfe der Formel (89) erreicht haben.

§. 15. *Verhalten der X_α bei linearer Transformation von ω_1, ω_2.*

Um jetzt den Übergang von dem ersten singulären Systeme zu allen anderen zu finden, haben wir §. 13 zufolge das Verhalten der X_α, die wir jetzt ausführlicher als

$$X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$$

bezeichnen, bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 in Betracht zu ziehen. Jeder einzelnen solchen Transformation entsprechend haben wir nach dem Hermite'schen Satze jedenfalls eine Formel:

$$(104) \qquad X_\alpha(u, \omega_1', \omega_2') = \Sigma c_{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

wo die $c_{\alpha\beta}$ von u unabhängig sind. Hier nun bewährt sich auf's Neue die Normirung der X_α. *Wir werden nämlich finden, dass die $c_{\alpha\beta}$ auch von ω_1, ω_2 nicht abhängen, dass also die X_α bei linearer Transformation der Perioden sich linear homogen mit constanten Coëfficienten substituiren.*

Der ferneren Entwickelung wollen wir folgende Bemerkung vorausschicken. Wir haben die X_α soeben (§. 14) aus Functionen der ersten Stufe mit Hülfe von Coëfficienten zusammengesetzt, die selbst zur n^{ten} Stufe gehören. Daher bleiben die X_α sicher bei allen denjenigen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert, die modulo n zur Identität congruent sind. Sie bleiben aber auch bei keinen anderen linearen Transformationen von ω_1, ω_2 ungeändert: ein Blick auf das Schema (54) genügt, um uns davon zu überzeugen. Daher schliessen wir, dass die X_α bei solchen linearen Transformationen von ω_1, ω_2, und nur bei solchen Transformationen, welche

modulo n zu einander congruent sind, übereinstimmende Aenderungen erleiden. Mit anderen Worten: *Die Gruppe der linearen Substitutionen, denen unsere X_α bei linearer Transformation der Perioden ω_1, ω_2 unterliegen, ist mit dem Inbegriff der durch das Congruenzzeichen definirten Operationen:*

$$(105)\quad \begin{cases} \omega_1' \equiv \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 , \\ \omega_2' \equiv \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 , \end{cases} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1)\ (\mathrm{mod}\ n)$$

holoëdrisch isomorph.

Um jetzt zu wirklichen Formeln zu schreiten, erinnern wir uns vor allen Dingen, dass sämmtliche lineare Transformationen von ω_1, ω_2 sich aus folgenden beiden, die wir S und T nennen:

$$S: \begin{cases} \omega_1' = \omega_1 , \\ \omega_2' = \omega_1 + \omega_2 , \end{cases} \qquad T: \begin{cases} \omega_1' = -\omega_2 , \\ \omega_2' = \quad \omega_1 , \end{cases}$$

durch Wiederholung und Combination ableiten lassen. Es wird also genügen, dass wir die zwei gerade diesen Transformationen entsprechenden Substitutionen der X_α (die selbst wieder S und T genannt werden sollen) berechnen. Dies geschieht bei S sofort vermöge (75). Wir finden, in Übereinstimmung mit der vorangestellten Behauptung über den Charakter der in (104) auftretenden Coëfficienten:

$$(106)\quad S: X_\alpha(u,\ \omega_1,\ \omega_2 + \omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} . X_\alpha(u,\ \omega_1,\ \omega_2) .$$

Die Formel für $X_\alpha(u,\ -\omega_2,\ \omega_1)$ können wir jetzt gewinnen, indem wir die Entwickelungen (73), (74) vergleichen. Ehe ich dies jedoch ausführe, will ich das Bildungsgesetz des entstehenden Ausdrucks, soweit dasselbe von der Normirung der X_α unabhängig ist, zu erforschen suchen, was nunmehr geschehen soll.

§. 16. *Vorläufige Betrachtung von $X_\alpha(u,\ -\omega_2,\ \omega_1)$.*

Wir setzen, der Formel (104) entsprechend:

$$X_\alpha(u,\ -\omega_2,\ \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^{\beta}\, c_{\alpha\beta} . X_\beta(u,\ \omega_1,\ \omega_2) ,$$

und vermehren hier u das eine Mal um $\frac{\lambda\omega_1}{n}$, das andere Mal um $\frac{\mu\omega_2}{n}$. In (59), (62) hatten wir bestimmt, welche Umänderungen die ursprünglichen X_α dabei erleiden; die Aenderungen der $X_\alpha(u,\ -\omega_2,\ \omega_1)$ ergeben sich daraus durch blosse Buchstaben-

vertauschung. Wir gewinnen so die Formeln:

$$X_{\alpha-\lambda}(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^{\beta}\, c_{\alpha\beta} \,.\, \varepsilon^{-\lambda\beta} \,.\, X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

$$\varepsilon^{\mu\alpha} \,.\, X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^{\beta}\, c_{\alpha\beta} \,.\, X_{\beta-\mu}(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

die wir auch folgendermassen schreiben können:

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^{\beta}\, c_{\alpha+\lambda, \beta} \,.\, \varepsilon^{-\lambda\beta} \,.\, X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

$$X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_0^{n-1}{}^{\beta}\, c_{\alpha, \beta+\mu} \,.\, \varepsilon^{-\mu\alpha} \,.\, X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

(wo jetzt die Indices unbeschränkt veränderliche ganze Zahlen sein sollen, die allein modulo n in Betracht kommen). *Daher ist überhaupt*:

$$c_{\alpha+\lambda, \beta} = \varepsilon^{\lambda\beta} \,.\, c_{\alpha, \beta} , \qquad c_{\alpha, \beta+\mu} = \varepsilon^{\mu\alpha} \,.\, c_{\alpha, \beta}$$

und also:

$$c_{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} \,.\, c_{00} \,.$$

Schreiben wir noch C für c_{00} und lassen der Symmetrie halber die Summation über β von $-\frac{n-1}{2}$ bis $+\frac{n-1}{2}$ gehen, so haben wir:

$$(107) \quad X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = C \,.\, \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}^{\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta} \,.\, X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) ,$$

eine Formel, auf die schon Hr. Bianchi auf pag. 243 seiner Arbeit hinweist*).

Den eigentlichen Erfolg der Normirung hat man nun, soweit Formel (107) *in Betracht kommt, darin zu erblicken, dass C eine constante Grösse wird.* Nehmen wir nämlich an, dass C constant sei, so ist dasselbe, wie ich jetzt zeigen will, absolut gegeben. Zu dem Zwecke beachte man zunächst, dass eine Wiederholung von T aus ω_1, ω_2 die negativen $-\omega_1$, $-\omega_2$ macht, während sich für $X_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2)$ folgende Formel ergibt:

$$(108) \quad X_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, X_\alpha(-u, \omega_1, \omega_2)$$
$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \,.\, X_{n-\alpha}(u, \omega_1, \omega_2) \,.$$

*) In der That hat Herr Bianchi bei $n = 3$ und $n = 5$ ganz ähnliche Überlegungen benutzt, wie ich sie im Texte für beliebiges ungerades n gebe.

Nun gibt die Wiederholung von (107), sofern wir C constant nehmen:

$$X_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2) = n \cdot C^2 \cdot X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2) \; .$$

Die Constante C hat also jedenfalls folgenden Werth:

$$C = \frac{\pm 1}{i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{n}} \; .$$

Ich behaupte aber, dass nur das obere Vorzeichen zulässig ist. Man findet dies Resultat, wenn man in Betracht zieht, dass die Operation ST, dreimal hinter einander auf ω_1, ω_2 angewandt, die anfänglichen ω_1, ω_2 ergibt, und nun bei Zusammensetzung der auf die X_α bezüglichen Substitutionen die Theorie der *Gaussischen Summen* in Anwendung bringt.

Unter der Voraussetzung, dass C constant sei, muss also die in Betracht kommende Formel lauten:

$$(109) \quad i^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt{n} \cdot X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} {}^\beta \, \varepsilon^{\alpha\beta} \cdot X_\beta(u, \omega_1, \omega_2) \; ,$$

*was wir im folgenden Paragraphen durch directe Rechnung bestätigen**).

§. 17. *Berechnung von $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ mit Hülfe der Reihenentwickelungen.*

Um Formel (109) auf directem Wege abzuleiten, gehen wir zur Doppelformel (73), (74) zurück und ordnen die Rechnung etwa folgendermassen.

Wir knüpfen zuerst an (73) an. Indem wir der Kürze halber setzen:

$$\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\right)^{\frac{3n-1}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{n\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{i \cdot q^{\frac{n}{4}} \cdot \prod (1-q^{2h})^{3n}} = M \; ,$$

finden wir:

*) Bei dieser ganzen Betrachtungsweise ist natürlich der Umstand wesentlich, dass wir den imaginären Theil von $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ positiv genommen haben. Hätten wir ihn negativ vorausgesetzt, so müsste in (106), (109) übereinstimmend ε durch ε^{-1}, i aber durch $-i$ ersetzt werden.

$$\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \,.\, X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

$$= \sqrt{n}\,.\,M\,.\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{\beta+h}\,.\,\varepsilon^{\alpha\beta}\,.\left\{\begin{array}{l} q^{\frac{[(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}}\,.\,e^{[(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -q^{\frac{[-(2h+1)n-2\beta]^2}{4n}}\,.\,e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array}\right\},$$

oder, wenn wir je zwei Terme, welche dieselbe Potenz von q enthalten, zusammennehmen:

$$(110)\qquad \sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \,.\, X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

$$= \sqrt{n}\,.\,M\,.\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^{\beta+h}\,.\,q^{\frac{[(2h+1)n+2\beta]^2}{4n}}\,.\left\{\begin{array}{l} \varepsilon^{-\alpha\beta}\,.\,e^{[(2h+1)n+2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -\varepsilon^{\alpha\beta}\,.\,e^{[-(2h+1)n-2\beta]\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array}\right\}.$$

Mit dieser Formel bringen wir jetzt die andere zum Vergleich, welche sich aus (74) für $X_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1)$ ergibt und die folgendermassen lautet:

$$X_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1)$$

$$= e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,M\,.\sum_{\varkappa=0}^{\alpha}(-1)^\varkappa\,.\,q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}}\,.\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}\,.\,e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}\,.\,e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array}\right\}.$$

Wir verwandeln zu dem Zwecke die in (110) rechter Hand auftretende Doppelsumme, indem wir $(2h+1)n+2\beta = 2k+1$ setzen und nun k von 0 bis ∞ laufen lassen. Dabei wird $(-1)^{h+\beta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,(-1)^k$ sein, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ aber durch folgenden Ausdruck ersetzt werden können: $(-1)^\alpha\,.\,e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}$. Solcherweise kommt:

$$\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \,.\, X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,\sqrt{n}\,.\,(-1)^\alpha\,.\,M\,.\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^\varkappa\,.\,q^{\frac{(2k+1)^2}{4n}}\,.\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}\,\,e^{(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ -e^{\frac{(2k+1)i\pi\alpha}{n}}\,.\,e^{-(2k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array}\right\}.$$

Daher lesen wir ab:

$$X_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,.\,e^{(n-1)\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{n}}\,.\sum_{\beta=-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\alpha\beta}\,.\,X_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,,$$

was mit der in Aussicht genommenen Formel (109) übereinstimmt.

Überblicken wir diese Rechnung genauer, so handelt es sich im Grunde um Beweis und Anwendung einer bestimmten Thetarelation, die wir nach Wegwerfung überschiessender Factoren etwa folgendermassen schreiben können:

$$(111)\qquad (-1)^\alpha . \vartheta_1\left(\frac{u\pi}{\omega_1} - \frac{\alpha\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} . \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_\beta (-1)^\beta . \varepsilon^{\alpha\beta} . q^{\frac{\beta^2}{n}} . e^{-\frac{2\beta u\pi i}{\omega_1}} . \vartheta_1\left(\frac{nu - \beta\omega_2}{\omega_1}\pi, q^n\right) .$$

Diese Relation als solche ist nicht neu, wie ich in Berichtigung einer früheren Angabe hier ausdrücklich bemerken will; man findet sie beispielsweise mit unwesentlichen Abweichungen bei Schröter (*Habilitationsschrift*, Breslau 1855), bei Brioschi in Bd. 59 der Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1858, *Sur diverses équations analogues aux équations modulaires*), bei Scheibner in Bd. 14 der Berichte der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1862, *Über periodische Functionen*), etc. etc. Man kann sie übrigens, wenn man will, als speciellen Fall der allgemeinen, von den Herren Prym und Krazer aufgestellten Thetarelation betrachten, von der in §. 1 die Rede war. Beiläufig bemerkt: die letztgenannte Relation gestattet überhaupt, unter Zugrundelegung der X_α die Gleichung jeder Ebene anzuschreiben, welche der Normalcurve ausschliesslich in singulären Puncten begegnet. An sie also könnte man anknüpfen, wenn man von den X_α zu allen den verschiedenen Coordinatensystemen übergehen wollte, von welchen in §. 7 die Rede war.

§. 18. *Verhalten der Y_α, Z_α. Charakter der entstehenden Substitutionsgruppen.*

Um jetzt das Verhalten der Y_α, Z_α bei linearer Transformation der Perioden zu studiren, stelle ich die beiden auf die X_α bezüglichen Formeln für S, T noch einmal zusammen. Wir hatten in (106), (109):

$$(112)\qquad \begin{cases} S:\ X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2 + \omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} . X_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)\ , \\ T:\ i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n} . X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1) = \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_\beta\ \varepsilon^{\alpha\beta} . X_\beta(u, \omega_1, \omega_2)\ . \end{cases}$$

Führen wir jetzt statt der X_α die Y_α, Z_α ein [siehe (64), (65)], so ergibt sich jedenfalls, *dass sich die* $\frac{n+1}{2}$ *Grössen* Y_α, *und ebenso die* $\frac{n-1}{2}$ *Grössen* Z_α, *linear für sich substituiren;* denn die Z_α sind gerade, die Y_α ungerade Functionen von u. *Des Näheren findet man:*

1) *für die* Y_α:

$$(113)\quad \begin{cases} S: & Y_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \,.\, Y_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \\ T: & \begin{cases} i^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \sqrt{n} \,.\, Y_0(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) = \sum\limits_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{\beta}\, Y_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \\ i^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \sqrt{n} \,.\, Y_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) = 2\,Y_0(u,\,\omega_1,\,\omega_2) \\ \qquad + \sum\limits_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{\beta}\, (\varepsilon^{\alpha\beta}+\varepsilon^{-\alpha\beta})\, Y_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \end{cases} \end{cases}$$

(*wo* α *in der letzten Formel nur die Werthe* $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ *zu durchlaufen hat*);

2) *für die* Z_α, *unter derselben Beschränkung für die Werthe von* α:

$$(114)\quad \begin{cases} S: & Z_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2+\omega_1) = \varepsilon^{-\frac{\alpha(n-\alpha)}{2}} \,.\, Z_\alpha(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,, \\ T: & i^{\frac{n-1}{2}} \,.\, \sqrt{n} \,.\, Z_\alpha(u,\,-\omega_2,\,\omega_1) = \sum\limits_1^{\frac{n-1}{2}}{}^{\beta}\, (\varepsilon^{\alpha\beta}-\varepsilon^{-\alpha\beta}) \,.\, Z_\beta(u,\,\omega_1,\,\omega_2)\,. \end{cases}$$

Alle diese Formeln bleiben natürlich bestehen, wenn man das u irgend welchem constanten Werthe gleich setzt. *Insbesondere gelten die* (113) *für die* y_α' *und die weiteren in* (100) *auftretenden Coëfficienten* $a_{\alpha,k}$, *die* (114) *für die* z_α *und die in* (101) *definirten* $b_{\alpha,k}$.

Von den hiermit gefundenen Resultaten ist dasjenige, welches durch (113) ausgedrückt wird, seit lange bekannt. Man spricht es gewöhnlich so aus, dass man die *Gleichung* in Betracht zieht, von welcher die verschiedenen Werthe abhängen, die $Y_0(u) : \sigma(u)^n$ (gleich $X_0(u) : \sigma(u)^n$) bei linearer Transformation der Perioden annimmt, und nun als besondere Eigenschaft dieser Gleichungen hinstellt, dass alle ihre Wurzeln sich aus $\frac{n+1}{2}$ Grössen, eben unseren $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{\frac{n-1}{2}}$, linear zusammensetzen*). Ich will hier an die ursprünglichen Unter-

*) Man sehe etwa die Excurse über »Jacobi'sche« Gleichungen in meinen »*Vorlesungen über das Ikosaeder etc.* ...« (Leipzig 1884). Ich habe dort in

suchungen von Jacobi, die in dieser Richtung liegen*), wie an die weitergehenden Entwickelungen der Herren Brioschi**) und Kronecker***) nur beiläufig erinnern. Ein Vergleich ihrer Untersuchungen mit den unserigen wird dadurch erschwert, dass sie nicht nach Potenzen von $p(u)$, sondern von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ entwickeln (wodurch die Entwickelungscoëfficienten unnöthigerweise von der $2n^{\text{ten}}$ Stufe werden, während sie bei uns von der n^{ten} Stufe sind). Die Entwickelung von $X_0(u) : \sigma(u)^n$ nach Potenzen von $p(u)$ findet sich zuerst bei Herrn Kiepert ausgeführt, wie wir bereits in §. 14 erwähnten.

Dagegen erscheinen die Formeln (114), soweit ich nicht selbst auf dieselben bei früheren Gelegenheiten aufmerksam machte, als neu. Vom Ikosaëder ausgehend habe ich zuerst in Bd. XV der Mathematischen Annalen (p. 275 ff. daselbst) darauf hingewiesen, dass der auf $\frac{n+1}{2}$ Variabele bezüglichen Substitutionsgruppe der Jacobischen Gleichungen eine andere, auf $\frac{n-1}{2}$ Variabele bezügliche Substitutionsgruppe zur Seite steht, wobei zwischen diesen Gruppen ein merkwürdiger Gegensatz statt hat: *Ist $n \equiv 3 \pmod 4$, so ist die erste dieser Gruppen mit den modulo n betrachteten linearen Transformationen von ω_1, ω_2 holoëdrisch, die zweite hemiëdrisch isomorph; für $n \equiv 1 \pmod 4$ ist es genau umgekehrt*†). Dieser Satz erscheint jetzt in einem neuen Lichte, indem beiderlei Substitutionsgruppen ihre Entstehung in der einen Gruppe der X_α (112) finden. Letztere Gruppe ist, wie wir wissen, mit der Gruppe der zu Vergleich stehen-

Übereinstimmung mit Herrn Brioschi die Ausdrucksweise so gewählt, dass $\left(\frac{X_0(u)}{\sigma(u)^n}\right)^2$ als Unbekannte gilt und also die »Quadratwurzeln aus den Wurzeln« sich linear aus $\frac{n+1}{2}$ Grössen zusammensetzen lassen. Im gegenwärtigen Texte dagegen halte ich auch weiter unten daran fest, dass $X_\alpha(u) : \sigma(u)^n$ selbst als Wurzel der Jacobi'schen Gleichung betrachtet werden soll.

*) Gesammelte Werke, Bd. I, p. 261.

**) Vergl. die bereits citirte Arbeit in Bd. 47 der Comptes Rendus, sowie eine Abhandlung im Jahrgange 1866 der Atti della R. Accademia di Napoli.

***) Berliner Monatsberichte von 1861 (Bericht über algebraische Arbeiten).

†) Wegen der allgemeinsten Definition dieser Gruppen und ihrer principiellen Stellung in der Theorie der elliptischen Functionen wolle man insbesondere auch die neuerdings im 25. Bande der Mathematischen Annalen erschienene Arbeit von Herrn Morera vergleichen: *Über einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen.*

den ω-Transformationen immer holoëdrisch isomorph. Der verschiedene Charakter der für die Y_α und die Z_α geltenden Gruppen erklärt sich aus dem verschiedenen Verhalten dieser Grössen gegenüber der Operation $\omega_1' = -\omega_1$, $\omega_2' = -\omega_2$. Aus Formel (108) nämlich:

$$X_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . X_{n-\alpha}(u, \omega_1, \omega_2)$$

folgt einerseits:

$$(115) \qquad Y_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} . Y_\alpha(u, \omega_1, \omega_2),$$

andererseits aber:

$$(116) \qquad Z_\alpha(u, -\omega_1, -\omega_2) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} . Z_\alpha(u, \omega_1, \omega_2),$$

wo nun die Unterscheidung der beiden Fälle $n \equiv \pm 1 \pmod{4}$ unmittelbar hervorspringt.

§. 19. *Der besondere Fall $n = 3$. Die Grössen $\overline{X}_\gamma(u)$ etc.*

Das Formelsystem (114) wird besonders einfach für $n = 3$, wo es für die eine dann allein vorhandene Grösse:

$$(117) \qquad Z_1(u) = X_1(u) - X_2(u)$$

das folgende Verhalten aussagt:

$$(118) \qquad \begin{cases} Z_1(u, \omega_1, \omega_2 + \omega_1) = \varepsilon^2 . Z_1(u, \omega_1, \omega_2), \\ Z_1(u, -\omega_2, \omega_1) \quad = \quad Z_1(u, \omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Wir werden diese Formeln besser verstehen, wenn wir einerseits den Nullwerth z_1 durch g_2, g_3, Δ darzustellen suchen, andererseits aber Formel (101) heranziehen, derzufolge $Z_1(u) : \sigma(u)^3$ gleich $-z_1 . p'(u)$ ist. Um z_1 zu gewinnen, trage ich in (117) für X_1, X_2 die entsprechenden Ausdrücke (73) ein. Dies gibt:

$$(119) \qquad Z_1(u) = -\sqrt{\frac{6\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{3\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \cdot \left[q^{\frac{1}{3}} . e^{-\frac{2i\pi u}{\omega_1}} . \vartheta_1\left(\frac{3u\pi - \omega_2\pi}{\omega_1}, q^3\right) \right.$$
$$\left. + q^{\frac{4}{3}} . e^{-\frac{4i\pi u}{\omega_1}} . \vartheta_1\left(\frac{3u\pi - 2\omega_2\pi}{\omega_1}, q^3\right)\right],$$

oder zusammengezogen:

$$(120) \qquad Z_1(u) = i\sqrt{\frac{6\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{3\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} (-1)^k . q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} . \left\{ \begin{matrix} e^{(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ + e^{-(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{matrix} \right\}.$$

Für z_1 kommt also (indem wir vorstehend $u = 0$ setzen):

$$(121) \qquad z_1 = \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt[8]{\Delta^3}} \left\{ \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^k (-1)^k \cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} \right\}.$$

Hier ist nun der in eckiger Klammer stehende Theil die bekannte Reihenentwickelung für $\sqrt[24]{\Delta}$ (welche der unter (7) gegebenen Productentwickelung entspricht). *Der Nullwerth z_1 erhält also folgende Bedeutung**):

$$(122) \qquad z_1 = \frac{i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}}.$$

Wir setzen jetzt wieder $p'(u) = -2T(u) : \sigma(u)^3$. Dann folgt aus der bereits angezogenen Formel (101):

$$(123) \qquad Z_1(u) = 2z_1 \cdot T(u) = \frac{2i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\Delta}} \cdot T(u),$$

womit in der That das Verhalten von $Z_1(u)$ bei linearer Transformation der Perioden erklärt ist, insofern $T(u)$ als Modulfunction zur ersten Stufe gehört.

Ich werde nun zeigen, *dass wir auf Grund dieser Entwickelung für solche ungerade n, die nicht durch 3 theilbar sind, neue Grössen zusammensetzen können, die sich bei linearer Transformation der Perioden ganz ähnlich wie die X_α verhalten.* Einen ersten Schritt hierzu hat schon Herr Kiepert gethan (Journal für Mathematik, Bd. 87, p. 213), indem er von folgender Reihenentwickelung ausging (die sich durch Zusammenstellung von (120) und (123) ergibt):

$$(124) \quad T(u) = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} \cdot \frac{e^{\frac{3\eta_1 u^2}{2\omega_1}}}{2\sqrt[24]{\Delta}} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \cdot q^{\frac{(6k+1)^2}{12}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \\ + e^{-(6k+1)\frac{u\pi i}{\omega_1}} \end{array} \right\}$$

und mit ihrer Hülfe schloss, dass

$$(125) \qquad \sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}} \cdot e^{-3G_1 u^2} \cdot T\left(u, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right)$$

zusammen mit den Werthen, die aus ihm durch lineare Transformation der Perioden entstehen, für $n \gtrless 0$ (mod. 3) einer Jacobi'schen Gleichung genügt, — einer Jacobi'schen Gleichung, die als speciellen Fall ($u = 0$) die wohlbekannte Gleichung einschliesst, deren

*) Siehe hier und im Folgenden auch Brioschi, Annali di Matematica, ser. 2, t. XII, p. 49 ff.

Wurzeln die verschiedenen Werthe von $\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta^n}}$ sind *). Auf demselben Wege, nämlich ausgehend von der Reihenentwickelung (124), würde man auch die in Aussicht genommenen neuen Grössen, die den X_α coordinirt sind, gewinnen können, wobei die T-Function eine ganz ähnliche Rolle spielen müsste, wie bei der Aufstellung der X_α die σ-Function**). Inzwischen ziehe ich vor, die neuen Grössen (die ich $\bar{X}_\gamma(u)$ nenne) aus den X_α selbst durch geeignete Combination verschiedener X_α herzuleiten.

Es seien X_α jetzt diejenigen Grössen X, welche sich auf die Zahl $3n$ beziehen (wo die ungerade Zahl n selbst durch 3 nicht theilbar sein soll). Dann sind die $\bar{X}_\gamma(u)$, um die es sich handelt, durch folgende Formel gegeben:

$$(126)\quad \bar{X}_\gamma(u,\ \omega_1,\ \omega_2) = \frac{\sqrt[3]{\Delta^n}}{2i\sqrt{3}}(X_{3\gamma+n}(u,\ \omega_1,\ \omega_2) - X_{3\gamma+2n}(u,\ \omega_1,\ \omega_2)),$$

welche für $\gamma = 0$ den Ausdruck (125) vorstellt.

Um das Verhalten der $\bar{X}_\gamma$ bei linearer Transformation zu erforschen, brauchen wir nur die für die X_α geltenden Substitutionsformeln (in denen natürlich n durch $3n$ zu ersetzen ist) in geeigneter Weise zusammenzuziehen. Wir finden nach kurzer Zwischenrechnung:

$$(127)\quad \begin{cases} S: \bar{X}_\gamma\ u,\ \omega_1,\ \omega_2 + \omega_1) = \varepsilon^{-\frac{3\gamma(n-\gamma)}{2}} \,.\, \bar{X}_\gamma(u,\ \omega,\ \omega_2), \\ T: \left(\frac{3}{n}\right) . \, i^{\frac{n-1}{2}} . \sqrt{n} \,.\, \bar{X}_\gamma(u,\ -\omega_2,\ \omega_1) = \sum_{-\frac{n-1}{2}}^{+\frac{n-1}{2}}{}_\delta\ \varepsilon^{3\gamma\delta} \,.\, \bar{X}_\delta(u,\ \omega_1,\ \omega_2), \end{cases}$$

also in der That Formeln, welche genau den für die alten X_α geltenden entsprechen, nur dass ε überall durch ε^3 ersetzt ist (was sich denn

*) Es ist dies diejenige Gleichung, welche ich sonst als *Multiplicatorgleichung erster Stufe* bezeichnet habe und auf die Herr Kiepert und ich von verschiedenen Seiten her zu gleicher Zeit geführt worden sind. Man sehe insbesondere Hurwitz: *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen etc.*, Bd. 18 der Math. Annalen, wo man die einschlägige Literatur ausführlich zusammengestellt findet.

**) Man vergl. meine Note vom November 1884 (in den Berichten der königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss.), wo eben das im Texte angedeutete Verfahren durchgeführt ist.

auch in dem Legendre'schen Zeichen ausdrückt, welches linker Hand dem Zahlenfactor $i^{\frac{n-1}{2}}.\sqrt{n}$ zugesetzt ist).

Aus den $\overline{X}_\gamma$ können wir jetzt wieder Systeme von $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-1}{2}$ Grössen ableiten, die sich für sich genommen substituiren. Indem ich dieselben, der Analogie mit der früheren Entwickelung folgend, $\overline{Y}_\gamma$ und $\overline{Z}_\gamma$ nenne, habe ich:

$$(128)\quad \begin{cases} \overline{Y}_0 = \overline{X}_0,\ \overline{Y}_1 = \overline{X}_1 + \overline{X}_{n-1},\ \ldots,\ \overline{Y}_{\frac{n-1}{2}} = \overline{X}_{\frac{n-1}{2}} + \overline{X}_{\frac{n+1}{2}}, \\ \qquad\qquad \overline{Z}_1 = \overline{X}_1 - \overline{X}_{n-1},\ \ldots,\ \overline{Z}_{\frac{n-1}{2}} = \overline{X}_{\frac{n-1}{2}} - \overline{X}_{\frac{n+1}{2}}. \end{cases}$$

Hier ist $\overline{Y}_0 = \overline{X}_0$, wie wir bereits bemerkten, dem Ausdrucke (125) gleich, *die $\overline{Y}_\gamma$ aber überhaupt sind die Theilgrössen, aus denen sich die verschiedenen Werthe, welche $\overline{Y}_0$ bei linearer Transformation der Perioden annimmt, nach dem Jacobi'schen Schema zusammensetzen.* Insbesondere also sind die Nullwerthe $\overline{Y}_\gamma(0)$ diejenigen Theilgrössen, welche zu der für $\sqrt[24]{\frac{\Delta}{\Delta'^n}}$ geltenden Jacobi'schen Gleichung gehören. Ich habe diese Theilgrössen in Bd. 17 der Mathematischen Annalen, p. 567 ff. (wo eben die Betrachtungen, die ich im folgenden Paragraphen ausführe, bereits angedeutet sind), mit $A_0, A_1, \ldots, A_{\frac{n-1}{2}}$ bezeichnet und will hier diese Benennung festhalten. Die Grössen A_γ des folgenden Paragraphen sind also in nachstehender Weise definirt:

$$(129)\qquad A_\gamma = \overline{Y}_\gamma(0).$$

§. 20. *Verbindung der y'_α und z_α mit Hülfe der A_γ.*

Mit den Ausdrücken A_γ ist ein neues System von Moduln n^{ter} Stufe gewonnen, welches insofern besondere Beachtung verdient, als es ebensowohl mit den y'_α als den z_α, wie ich jetzt zeigen werde, in einfachster Beziehung steht und also die Verbindung dieser beiden Modulsysteme vermittelt. Allerdings gelten die entstehenden Formeln, wie selbstverständlich, nur für $n \gtreqless 0$ (mod. 3), was aber den besonders wichtigen Fall, in welchem n eine Primzahl > 3 ist, einschliesst.

Um mit den y'_α zu beginnen, so haben wir jedenfalls die Formel:

$$(130)\qquad y'_0 = A_0^3.$$

Lassen wir hier beiderseits die Operation T eintreten, so erhalten wir:

$$\pm n \cdot \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^{\alpha} y'_\alpha = \left(\sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^{\gamma} A\gamma \right)^3,$$

wo das $+$ oder $-$ Zeichen anzuwenden ist, jenachdem $(n - 1)$ oder $(n + 1)$ durch 6 theilbar ist. Hieraus aber folgt weiter, indem wir ν-mal mit S operiren:

$$(131) \qquad \pm n \sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^{\alpha} \varepsilon^{-\nu \frac{\alpha . n - \alpha}{2}} \cdot y'_\alpha = \left(\sum_0^{\frac{n-1}{2}} {}^{\gamma} \varepsilon^{-3\nu \frac{\gamma(n-\gamma)}{2}} \cdot A\gamma \right)^3.$$

Nun müssen in dieser Gleichung, wie schon Herr Brioschi bemerkt hat*), die Potenzen von ε linker und rechter Hand übereinstimmen. Dies gibt einmal $\frac{n-1}{2}$ cubische Relationen für die $A\gamma$, *andererseits aber*, worauf es hier ankommt, *die y'_α als rationale ganze Functionen dritten Grades der A_γ, so dass die y'_α überall zweckmässigerweise durch die $A\gamma$ ersetzt werden können.*

Die Beziehung zu den z_α gestaltet sich nicht minder einfach. Wir haben folgende Relation voranzustellen (die nichts anderes als eine wohlbekannte σ-Relation ist):

$$T(u) = \frac{\sigma(2u)}{2\sigma(u)},$$

aus der wir dann mit leichter Mühe die Formel ableiten:

$$(132) \qquad \frac{X_\gamma(u)}{A_0} = \frac{X_{2\gamma}(2u)}{X_\gamma(u)},$$

(unter X_γ die zur ursprünglichen Zahl n gehörigen X verstanden). Wir setzen jetzt $u = 0$ und haben:

$$(133) \qquad \frac{A_\gamma}{A_0} = \frac{z_{2\gamma}}{z_\gamma},$$

so dass wir jedenfalls die Verhältnisse der A durch die Verhältnisse der z, oder auch, wenn wir wollen, sämmtliche vorkommende Moduln durch die z_α und die eine Grösse A_0 rational darstellen können.

Wird auch A_0 selbst eine rationale Function der z_α sein**)? Eine

*) *Sopra una classe di equazioni modulari*, Annali di Matematica, ser. 2, t. IX, p. 167 ff.

**) In der wiederholt genannten Note vom November 1884 habe ich die Sache gerade umgekehrt gewandt, indem ich A_0 als Wurzel der Multiplicatorgleichung erster Stufe betrachtete und nun nach der Bestimmung der z_α fragte.

nähere Überlegung, welche ich hier nicht ausführe, zeigt, dass dies in der That für $n \equiv 1 \pmod{4}$ der Fall ist, während für $n \equiv 3 \pmod{4}$ erst A_0^2 in den z_α rational wird und die Berechnung des A_0 aus den z_α also eine Quadratwurzel erfordert. Es ist diese Unterscheidung darin begründet, dass die z_α von der $\frac{3n-1}{2}^{\text{ten}}$ Dimension in ω_1, ω_2 sind, A_0 aber von der $\frac{n-1}{2}^{\text{ten}}$ Dimension, dass also die z_α und die A_γ in Bezug auf ω_1, ω_2 abwechselnd geraden und ungeraden Charakter haben.

Ich will hier wenigstens eine der Formeln angeben, welche A_0 mit den z_α verknüpft, und zwar deshalb, weil sie bei $n = 5$ und $n = 7$ bereits ausreicht, um A_0, bez. A_0^2 rational durch die z_α darzustellen. Es ist folgende:

$$(134) \qquad \prod_1^{\frac{n-1}{2}} z_\alpha \cdot \Delta^{\frac{n^2-1}{24}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{n} \cdot A_0^{\frac{n-3}{2}}.$$

Unter Zugrundelegung derselben mögen wir insbesondere den Fall $n = 5$ durchrechnen. Aus (134) wird:

$$(135) \qquad A_0 = \frac{z_1 z_2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}},$$

also aus (133):

$$(135^b) \qquad A_1 = \frac{z_2^2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}}, \quad A_2 = \frac{-z_1^2 \cdot \Delta}{\sqrt{5}}.$$

Dies tragen wir in (131) ein und erhalten:

$$(136)\ y'_0 = \frac{z_1^3 z_2^3 \cdot \Delta^3}{5\sqrt{5}}, \quad y'_1 = \frac{(z_1^6 - 3 z_1 z_2^5) \cdot \Delta^3}{25\sqrt{5}}, \quad y'_2 = \frac{(-3 z_1^5 z_2 - z_2^6) \cdot \Delta^3}{25\sqrt{5}},$$

so dass bei $n = 5$ jetzt alle von uns betrachteten Modulsysteme durch z_1, z_2 allein ausgedrückt sind.

Wir wollen die Formeln (136) noch in (84) eintragen. Wir finden dann für das »Integral erster Gattung fünfter Stufe«:

$$(137) \qquad u = \int \frac{25\sqrt{5}(X_1\, dX_2 - X_2\, dX_1)}{((2 z_1^5 - z_2^5) X_1 X_2 - 5 z_1^3 z_2^2 X_0 X_3) \cdot \Delta^3},$$

womit wir nun auch in der Bestimmung von u den Anschluss an Bianchi's ursprüngliche Formel gewonnen haben (siehe Bd. 17 der Mathematischen Annalen, p. 261, 262). Die unbestimmte Constante C, welche bei Herrn Bianchi als Multiplicator auftritt, und die in (137)

fehlt, findet dadurch ihre Begründung, dass Herr Bianchi nirgendwo die absoluten Werthe der X_α fixirt hat und also auch nicht die z_1, z_2 selbst, sondern nur deren Quotienten in Betracht zieht.

Wir haben hiermit die Theorie der y'_α und z_α, wie der A_γ, soweit entwickelt, als sie sich ungezwungen an die Theorie der Normalcurven anschliesst. Ich betrachte dies Alles nur als Vorbereitung zu einer tiefer gehenden Untersuchung der genannten Modulsysteme, die aber nach Umfang und Inhalt einer gesonderten Darstellung vorbehalten bleiben muss.

Düsseldorf, den 10. April 1885.

Inhalt.

Seite

Einleitung . 3

Erster Abschnitt. Über die Theilwerthe der σ-Function.

§. 1. Definition der Theilwerthe 8
§. 2. Verhalten der Theilwerthe bei linearer Veränderung der Argumente 12
§. 3. Herstellung anderer Grössen aus den Theilwerthen 14
§. 4. Beziehung unserer Theilwerthe auf die $p_{\lambda,\mu}$, $p'_{\lambda,\mu}$ 16

Zweiter Abschnitt. Die Normalcurven n^{ter} Ordnung im Allgemeinen und ihre zwiefache algebraische Darstellung.

§. 5. Grundlegende Sätze . 18
§. 6. Von der algebraischen Darstellung der Normalcurven 21
§. 7. Zweierlei Coordinatensysteme bei beliebiger Normalcurve 26
§. 8. Die Normalcurve n^{ter} Ordnung in kanonischer Darstellung 28
§. 9. Das singuläre Coordinatensystem bei der Normalcurve n^{ter} Ordnung 31
§. 10. Normirung der X_α . 34
§. 11. Die quadratischen Relationen zwischen den X_α und das Integral erster Gattung n^{ter} Stufe 37

Dritter Abschnitt. Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln. Coordinatenverwandlungen bei der Normalcurve. Die $\overline{X}_\gamma(u)$ und die A_γ.

§. 12. Die y'_α, z_α als Fundamentalmoduln der n^{ten} Stufe 40
§. 13. Coordinatenverwandlungen bei der Normalcurve 44
§. 14. Über die Verbindung des ersten singulären Systems mit dem ersten kanonischen . 46
§. 15. Verhalten der X_α bei linearer Transformation von ω_1, ω_2 49
§. 16. Vorläufige Betrachtung von $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ 50
§. 17. Berechnung von $X_\alpha(u, -\omega_2, \omega_1)$ mit Hülfe der Reihenentwickelungen 52
§. 18. Verhalten der Y_α, Z_α. Charakter der entstehenden Substitutionsgruppen 54
§. 19. Der besondere Fall $n = 3$. Die Grössen $\overline{X}_\gamma(u)$ etc. 57
§. 20. Verbindung der y'_α und z_α mit Hülfe der A_γ 60

ÜBER DIE

KUGELFUNCTIONEN P_n UND Q_n,

INSBESONDERE

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER AUSDRÜCKE

$$P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\phi)$$

UND

$$Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\phi)$$

NACH DEN COSINUS DER VIELFACHEN VON ϕ.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° V.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1886.

Vom Verfasser übergeben den 12. Januar 1886.
Der Abdruck vollendet den 16. März 1886.

ÜBER DIE

KUGELFUNCTIONEN P_n UND Q_n,

INSBESONDERE

ÜBER DIE ENTWICKLUNG DER AUSDRÜCKE

$$P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^{\,2}}\cos\phi)$$

UND

$$Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^{\,2}}\cos\phi)$$

NACH DEN COSINUS DER VIELFACHEN VON ϕ.

VON

C. NEUMANN.

Die Ausdrücke:

$$(\mathfrak{P}.)\qquad P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$$

und

$$(\mathfrak{Q}.)\qquad Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)\ ,$$

in denen z, z_1 *complex* sein sollen, während Φ eine *reelle* Variable vorstellen mag, sind entwickelbar nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

Auch ist bekannt, dass die Entwickelung des Ausdruckes ($\mathfrak{P}$.) auf zwei verschiedenen Wegen bewerkstelligt werden kann, nämlich entweder nach der *Laplace'schen Methode*, die auf der Anwendung gewisser *Differentialgleichungen* beruht, denen jener Ausdruck Genüge leistet, oder aber nach der *Jacobi'schen Methode*, die im Wesentlichen darin besteht, dass man jenen Ausdruck zuvörderst in ein *bestimmtes Integral* verwandelt.

Genau dasselbe gilt auch vom Ausdruck ($\mathfrak{Q}$.). Nur bedarf es hier, um die Entwickelung wirklich zu bewerkstelligen, einer viel grösseren Mühe und überhaupt einer viel tiefer gehenden Untersuchung, — schon deswegen, weil der Ausdruck ($\mathfrak{Q}$.) für gewisse Werthsysteme von z, z_1, Φ *unendlich gross* wird, während ($\mathfrak{P}$.) durchweg *endlich* bleibt. In der That ist jene Entwicklung von ($\mathfrak{P}$.), gegenüber der von ($\mathfrak{Q}$.), gewissermassen als ein *elementares* Problem zu bezeichnen.

Das eigentliche Ziel der nachfolgenden Untersuchungen besteht in der Entwicklung des Ausdruckes ($\mathfrak{Q}$.), wobei es aber nothwendig sein wird, die Entwicklung von ($\mathfrak{P}$.) mit in Betracht zu ziehen. Es mag mir gestattet sein, die Hauptresultate meiner Untersuchung hier gleich von vorneherein in Kürze anzudeuten. Ich werde dabei zuvörderst die allgemeine Gestalt der in Rede stehenden Entwick-

lungen, und sodann die näheren Bedingungen anzugeben haben, unter denen dieselben gültig sind.

Man erhält für die Ausdrücke (𝔓.) und (𝔔.) Formeln von folgender Gestalt:

$$(A.)\qquad P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n} \mathfrak{A}_{nh} P_{nh}(z) P_{nh}(z_1) \cos h\Phi\ ,$$

$$(B.)\qquad Q_n(Z) + \mathfrak{M}\,.\,2\pi i P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \mathfrak{B}_{nh} f_{nh}(z)\, Q_{nh}(z_1) \cos h\Phi\ ,$$

in denen Z die Bedeutung hat:

$$(C.)\qquad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\ ,$$

und $i = \sqrt{-1}$ ist. Dabei repräsentiren die P_{nh} und Q_{nh} die adjungirten Kugelfunctionen, während die f_{nh} für $h \leqq n$ mit den P_{nh} identisch, für $h > n$ aber durch gewisse andere Functionen dargestellt sind, auf welche hier näher einzugehen wenig angemessen sein würde. Die $\mathfrak{A}_{nh}$ und $\mathfrak{B}_{nh}$ sind *constante Coefficienten.* Hingegen repräsentirt $\mathfrak{M}$ eine *variable ganze Zahl*, d. i. eine Zahl, deren Werth wesentlich abhängt von den augenblicklichen Werthen der Argumente z, z_1, Φ.

Die Formel (*A.*) giebt geradezu die Entwicklung des Ausdruckes $P_n(Z)$, d. i. die Entwicklung von (𝔓.). Andererseits erhält man die Entwicklung des Ausdrucks $Q_n(Z)$ oder (𝔔.), falls man $P_n(Z)$ aus den beiden Formeln (*A.*), (*B.*) eliminirt.

Die Formel (*A.*) ist *ganz allgemein gültig.* Bei der Formel (*B.*) hingegen wird vorausgesetzt, dass die complexen Variablen z, z_1 *gewissen Bedingungen* entsprechen. Und um diese Bedingungen bequem angeben zu können, wird es zweckmässig sein, an bekannte geometrische Betrachtungen anzuknüpfen, indem man z und z_1 als zwei *variable Punkte* in der z-Ebene sich vorstellt. Von besonderer Wichtigkeit sind dabei die beiden *festen Punkte* -1 und $+1$, — sie mögen die beiden *Pole**) heissen, und gleichzeitig mag die gerade Verbindungslinie dieser beiden Pole die *Pollinie***) genannt werden.

*) Bezeichnet man also die reelle und imaginäre Axe der z-Ebene respective mit x und y, so liegen die beiden Pole auf der x-Axe, zu beiden Seiten des Anfangspunktes, jeder in der Entfernung *Eins* von demselben.

**) Diese *Pollinie* wird im Folgenden stets mit λ bezeichnet werden. Andererseits wird eine beliebige von einem Pol zum andern laufende Curve mit σ bezeichnet werden.

Denkt man sich alle von Pol zu Pol gehenden *Kreisbogen* und deren *rechtwinklige Trajectorien* construirt, so sind diese Trajectorien bekanntlich wiederum Kreise, — sie mögen in Zukunft kurzweg als das System der *Dipolarkreise* *) bezeichnet werden. — Solches festgesetzt, lauten alsdann jene den Puncten z und z_1 aufzuerlegenden Bedingungen folgendermassen:

(α.) Es soll $R < R_1$ sein, wo R und R_1 die Radien der respective durch z und z_1 gehenden Dipolarkreise vorstellen.

(β.) Es soll der reelle Theil von z *positiv* sein, mithin der Punkt z *rechts* von der imaginären Axe liegen**).

(γ.) Es soll der Punct z_1 von der *Pollinie* durch irgend welchen Zwischenraum getrennt sein.

Denkt man sich diese Bedingungen (α.), (β.), (γ.) *wirklich erfüllt, so werden nicht nur die Formeln* (A.), (B.) *in Kraft sein, sondern gleichzeitig wird alsdann auch die Bestimmung der daselbst auftretenden Zahl* $\mathfrak{M}$ *eine sehr einfache sein, nämlich zu bewerkstelligen sein nach folgender Regel.*

Man construire die in (A.), (B.) enthaltenen Punkte z, z_1, Z, überdies noch einen vierten Punct z', der der Formel entsprechen soll: $z' = zz_1$, und construire sodann die gebrochene Linie

$$(L.) \qquad (Z, z', z_1),$$

d. i. eine Linie, welche von Z geradeaus nach z', und von z' geradeaus nach z_1 geht. — *Alsdann wird jene Zahl* $\mathfrak{M} = 0$ *sein, falls die Linie* (L.) *die Pollinie gar nicht oder aber zweimal überschreitet. Hingegen wird die Zahl* $\mathfrak{M} = \pm 1$ *sein, falls* (L.) *die Pollinie nur einmal überschreitet, und zwar* $= +1$ *oder* $= -1$, *jenachdem diese einmalige Ueberschreitung von Oben nach Unten, oder umgekehrt von Unten nach Oben erfolgt.*

Dabei sei bemerkt, dass die so eben angedeuteten Resultate von mir erhalten sind unter Anwendung der *Laplace'schen Methode.*

*) Ein solcher *Dipolarkreis* kann alsdann offenbar auch als der geometrische Ort eines Punktes definirt werden, dessen Abstandsverhältnis in Bezug auf die beiden Pole stets *denselben* Werth behält.

**) Es soll nämlich, was die z-Ebene betrifft, die reelle x-Axe *von Links nach Rechts*, und die imaginäre y-Axe *von Unten nach Oben* fortlaufend gedacht werden.

Uebrigens ist der hier von mir behandelte Gegenstand schon von *Heine* untersucht worden, jedoch auf einem wesentlich *andern* Wege, nämlich unter Anwendung der *Jacobi'schen Methode*. Abgesehen von dieser Verschiedenheit der Methode, besteht der Unterschied meiner Untersuchung gegenüber der Heine'schen namentlich darin, dass die von mir zur Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$ gegebene Regel durch *besondere Einfachheit* sich auszeichnet, während bei Heine im Gegentheil die Bestimmung von $\mathfrak{M}$ mit mancherlei mühsamen Substitutionen und Unterscheidungen verknüpft ist. Will man die Art und Weise, in welcher Heine die Zahl $\mathfrak{M}$ bestimmt, sich vergegenwärtigen, so hat man die Auseinandersetzungen in seinem Handbuch der Kugelfunctionen (Erster Band, Berlin, 1878) auf Seite 335 und 336, und überdies noch die daselbst auf Seite 169 gegebenen Vorschriften einem sorgfältigen Studium zu unterwerfen.

Um die nachfolgenden Expositionen möglichst übersichtlich und continuirlich zu gestalten, werde ich nicht nur die Entwicklung der Ausdrücke ($\mathfrak{P}$.) und ($\mathfrak{Q}$.), sondern, gewissermassen als Grundlage dazu, auch die Entwicklung der *einfacheren* Ausdrücke:

$$(\mathfrak{P}_0.) \qquad (z + i\sqrt{1 - z^2}\cos\Phi)^n$$

und

$$(\mathfrak{Q}_0.) \qquad \frac{1}{(z + i\sqrt{1 - z^2}\cos\Phi)^{n+1}}$$

in Betracht ziehen. Hier soll $i = \sqrt{-1}$, und n eine beliebig gegebene *positive ganze Zahl* sein.

Dabei werde ich in der Weise verfahren, dass ich mit der Entwicklung von ($\mathfrak{P}_0$.) beginne, von hier aus zu der von ($\mathfrak{P}$.) übergehe, und sodann die Entwicklungen von ($\mathfrak{Q}_0$.) und ($\mathfrak{Q}$.) folgen lasse.

Was die in meinem Aufsatze angewendeten Bezeichnungen betrifft, so sind unter ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, etc. Constanten zu verstehen, von denen die erste $= 1$, alle übrigen aber $= 2$ sind. Also:

$$\varepsilon_0 = 1\,, \qquad \text{hingegen} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \ldots\ldots = 2\,.$$

Ueberdies habe ich, was die *Kugelfunctionen* betrifft, festgehalten an den Bezeichnungen meines Vaters (vgl. *F. Neumann*: Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Leipzig, 1878).

§. 1.

Zur vorläufigen Orientirung über die Functionen $P_n(z)$, $Q_n(z)$, $S_n(z)$ und $T_n(z)$.

Die Kugelfunctionen $P_n(z)$ und $Q_n(z)$ sind bekanntlich particulare Integrale der Differentialgleichung:

$$(\mathfrak{D}_n.)\qquad n(n+1)\,U - 2zU' + (1-z^2)\,U'' = 0\ ,$$

wo die Accente Differentiationen nach z andeuten. Aus dieser Gleichung $(\mathfrak{D}_n.)$ ergeben sich durch wiederholte Differentiation nach z die Formeln:

$$(\mathfrak{D}_n'.)\qquad (n-1)(n+2)\,U' - 4zU'' + (1-z^2)\,U''' = 0\ ,$$

$$(\mathfrak{D}_n''.)\qquad (n-2)(n+3)\,U'' - 6zU''' + (1-z^2)\,U'''' = 0\ ,$$

u. s. w., also allgemein:

$$(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)\quad (n-h)(n+h+1)\,U^{(h)} - (2h+2)\,z\,U^{(h+1)} + (1-z^2)\,U^{(h+2)} = 0\ .$$

Führt man, an Stelle von U, eine *neue* Function V ein mittelst der Substitution:

$$V = (1-z^2)^{\frac{h}{2}}\,U^{(h)}\ ,$$

so gewinnt die Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ folgende Gestalt:

$$(\mathfrak{D}_{nh}.)\qquad \left(n(n+1) - \frac{h^2}{1-z^2}\right)V - 2zV' + (1-z^2)\,V'' = 0\ .$$

Da nun den *früheren* Differentialgleichungen $(\mathfrak{D}_n.)$, $(\mathfrak{D}_n'.)$, $(\mathfrak{D}_n''.)$... $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ genügt wird durch die Functionen:

$$(\text{I.})\qquad U = \begin{cases} P_n(z)\ , \\ Q_n(z)\ , \end{cases}$$

so wird der *gegenwärtigen* Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_{nh}.)$ Genüge geleistet werden durch:

$$(\text{II.})\qquad V = \begin{cases} (1-z^2)^{\frac{h}{2}}\,P_n^{(h)}(z) = P_{nh}(z)\ , \\ (1-z^2)^{\frac{h}{2}}\,Q_n^{(h)}(z) = Q_{nh}(z)\ , \end{cases}$$

wo $P_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z)$ nur als Abbreviaturen dienen sollen für die hier angegebenen Ausdrücke.

Von diesen beiden particularen Integralen $P_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z)$ der Gleichung $(\mathfrak{D}_{nh}.)$ wird das *erstere* *illusorisch* für $h > n$. Denn $P_n(z)$ ist bekanntlich eine ganze rationale Function n^{ten} Grades

von z; *und hieraus folgt, dass* $P_n^{(h)}(z)$, *mithin auch* $P_{nh}(z)$ *für* $h > n$ *identisch verschwindet. Für den Fall* $h > n$ *haben wir also nur ein particulares Integral der Gleichung* $(\mathfrak{D}_{nh}.)$, *nämlich* $Q_{nh}(z)$; *und es entsteht also die Aufgabe, das andere zu finden.* Diese Aufgabe ist, wie später gezeigt werden soll, leicht lösbar mittelst der Functionen:

$$\text{(III.)}\qquad \begin{cases} S_n(z) = -P_n(z)\log(z-1)\,, \\ T_n(z) = -P_n(z)\log(z+1)\,. \end{cases}$$

Die h^{ten} Ableitungen dieser Functionen nach z werden wir mit $S_n^{(h)}(z)$, $T_n^{(h)}(z)$ bezeichnen, und zugleich [analog mit (II.)] folgende Abbreviaturen einführen:

$$\text{(IV.)}\qquad \begin{cases} (1-z^2)^{\frac{h}{2}}\,S_n^{(h)}(z) = S_{nh}(z)\,, \\ (1-z^2)^{\frac{h}{2}}\,T_n^{(h)}(z) = T_{nh}(z)\,. \end{cases}$$

Die in solcher Weise definirten Functionen $S_n^{(h)}$, S_{nh}, $T_n^{(h)}$, T_{nh} sind, wie hier sogleich bemerkt werden mag, *völlig identisch* mit den von meinem Vater*) eingeführten Functionen $S_n^{(h)}$, S_{nh}, $T_n^{(h)}$, T_{nh}, *jedoch nur für den Fall* $h > n$, *nicht aber für* $h \leqq n$.

§ 2.

Bemerkungen über die Functionen $P_n(z)$, namentlich über ihre Werthe für $z = \pm 1$ und $z = \infty$.

Die Function $P_n(z)$ ist bekanntlich eine ganze rationale Function von z, und dargestellt durch folgenden Ausdruck;

$$\text{(1.)}\quad P_n(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi^2(n)}\left\{z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} - + \cdots\right\},$$

wo $\Pi(0) = \Pi(1) = 1$, $\Pi(2) = 1.2$, $\Pi(3) = 1.2.3$ ist, u. s. f. Hieraus folgt sofort:

$$\text{(2.)}\qquad P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)\,,$$

und hieraus durch h-malige Differentiation nach z:

$$\text{(3.)}\qquad P_n^{(h)}(-z) = (-1)^{n+h} P_n^{(h)}(z)\,.$$

*) F. Neumann, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig 1878.

Ueberdies können wir als bekannt voraussetzen, dass die Function $P_n(z)$ für $z = \pm 1$ die Werthe hat:

$$(4.)\qquad P_n(1) = 1\,, \qquad P_n(-1) = (-1)^n\,;$$

was in Einklang steht mit der Formel (2.).

Was ferner die Werthe von $P_n^{(h)}(z)$ für $z = \pm 1$ betrifft, so ergeben sich dieselben am Leichtesten mittelst der für $P_n(z)$ geltenden Differentialgleichungen $(\mathfrak{D}_n.)$, $(\mathfrak{D}_n'.)$, $(\mathfrak{D}_n''.)$, etc. [auf p. 407], d. i. mittelst der Gleichungen:

$$(5.)\qquad \begin{cases} n(n+1)\,P_n(z) - 2z\,P_n'(z) + (1-z^2)\,P_n''(z) = 0\,, \\ (n-1)(n+2)\,P_n'(z) - 4z\,P_n''(z) + (1-z^2)\,P_n'''(z) = 0\,, \\ (n-2)(n+3)\,P_n''(z) - 6z\,P_n'''(z) + (1-z^2)\,P_n''''(z) = 0\,, \\ \text{etc. etc. etc.} \end{cases}$$

Setzt man nämlich hier $z = 1$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (4.):

$$P_n'(1) = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

$$P_n''(1) = \frac{(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)}{2\,.\,4}\,,$$

$$P_n'''(1) = \frac{(n-2)(n-1)\,n\,(n+1)(n+2)(n+3)}{2\,.\,4\,.\,6}\,,$$

etc. etc. etc.

mithin allgemein:

$$(6.)\qquad P_n^{(h)}(1) = \frac{\Pi(n+h)}{2^h\,\Pi(h)\,\Pi(n-h)}\,.$$

Und hieraus folgt mit Rücksicht auf (3.) sofort:

$$(7.)\qquad P_n^{(h)}(-1) = (-1)^{n+h}\,\frac{\Pi(n+h)}{2^h\,\Pi(h)\,\Pi(n-h)}\,.$$

Was ferner die Werthe der Functionen $P_n(z)$, $P_n^{(h)}(z)$ für $z = \infty$ betrifft, so ergiebt sich aus (1.) durch Differentiation nach z:

$$P_n'(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-1)}\left\{z^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2\,(2n-1)}\,z^{n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\,z^{n-5} - + \ldots\right\},$$

$$P_n''(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-2)}\left\{z^{n-2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2\,(2n-1)}\,z^{n-4} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\,z^{n-6} - + \ldots\right\};$$

u. s. w., mithin allgemein:

$$(8.)\quad P_n^{(h)}(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n) \Pi(n-h)} \Big\{ z^{n-h} - \frac{(n-h)(n-h-1)}{2(2n-1)} z^{n-h-2} + $$
$$+ \frac{(n-h)(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)}{2 \,.\, 4(2n-1)(2n-3)} z^{n-h-4} - + \ldots \Big\} .$$

Und hieraus folgt für *unendlich grosse* Werthe von z:

$$(9.)\quad P_n^{(h)}(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n) \Pi(n-h)} z^{n-h}, \qquad (h \leqq n) .$$

§ 3.

Bemerkungen über die Functionen $Q_n(z)$, namentlich über ihre Werthe für $z = \pm 1$ und für $z = \infty$.

Was die Kugelfunctionen *zweiter* Art, nämlich die $Q_n(z)$ betrifft, so ist nach der Definition meines Vaters [Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, Leipzig 1878 p. 1]:

$$(10.)\qquad Q_n(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\gamma)\, d\gamma}{z - \gamma} [\lambda] ,$$

die Integration auf *reellem* Wege erstreckt gedacht von $\gamma = -1$ bis $\gamma = +1$. Dieser reelle Weg ist offenbar nichts Anderes als die sogenannte *Pollinie* λ [vgl. p. 404]. Und um anzudeuten, dass das Integral (10.) über diese Linie λ hinläuft, ist demselben der Buchstabe λ in Klammern beigefügt.

Aus (10.) folgt durch h-malige Differentiation nach z:

$$(10a.)\qquad Q_n^{(h)}(z) = (-1)^h \Pi(h) \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\gamma)\, d\gamma}{(z-\gamma)^{h+1}} [\lambda] .$$

Das in (10.), (10a.) enthaltene Argument z soll im Allgemeinen *complex*, also als ein variabler Punct auf der z-Ebene gedacht werden. Lässt man diesen Punct z auf der genannten Ebene in beliebiger Weise sich bewegen, so werden hierbei die durch die Integrale (10.), (10a.) definirten Functionen $Q_n(z)$, $Q_n^{(h)}(z)$ Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändern, falls man nur den Punct z beständig *fern* hält von der Integrationslinie λ *). Also der Satz:

*) Denn so lange solches der Fall ist, werden die in (10.) und (10a.) unter dem Integralzeichen stehenden Nenner $(z-\gamma)$ und $(z-\gamma)^{h+1}$ niemals zu 0 werden können.

Die Functionen

$$(10b.)\qquad Q_n(z)\;,\qquad Q_n^{(h)}(z)\quad\text{und}\quad Q_{nh}(z)$$

sind, mit alleiniger Ausnahme der Pollinie λ, *auf der z-Ebene überall stetig**). Dass nämlich die in letzter Stelle aufgeführten Functionen $Q_{nh}(z)$ ebenfalls die genannte Eigenschaft besitzen, ergiebt sich ohne Weiteres auf Grund der Relation (II.) p. 407:

$$Q_{nh}(z) = (\sqrt{1-z^2})^h\, Q_n^{(h)}(z)\;.$$

Bemerkung. — Soll die Function $Q_{nh}(z)$, mit Ausnahme der Pollinie λ, nicht nur *stetig*, sondern auch *eindeutig* sein, so hat man dieselbe sich ausgebreitet zu denken auf einer Riemann'schen *Doppelebene*, welche die Linie λ zur *Uebergangslinie* hat.

Wir kehren zurück zur Formel (10.). Dieselbe ist in mancherlei andere Gestalten versetzbar. So z. B. ergiebt sich [was hier nicht weiter ausgeführt werden soll] auf Grund jener Formel (10.) folgende Darstellung der Function $Q_n(z)$:

$$(11.)\qquad Q_n(z) = R_n(z) + P_n(z)\int_{-1}^{+1}\frac{d\gamma}{z-\gamma}\,[\lambda]\;,$$

die Integration wieder hinerstreckt gedacht längs der Linie λ. Dabei repräsentirt $R_n(z)$ eine *ganze rationale* Function von z; es ist nämlich:

$$(12.)\qquad R_n(z) = -2\left\{\frac{2n-1}{1\,.\,n}P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3\,(n-1)}P_{n-3}(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{2n-9}{5\,(n-2)}P_{n-5}(z) + \dots\right\}\;,$$

wo das *letzte* Glied, je nach der Beschaffenheit von n, bald mit $P_0(z)$, bald mit $P_1(z)$ behaftet ist. — Uebrigens kann man die Formel (11.) auch so schreiben:

$$(13.)\qquad Q_n(z) = R_n(z) + P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}\;,$$

wo alsdann unter dem Logarithmus diejenige *eindeutige* Function zu verstehen ist, welche mit dem in (11.) stehenden Integral übereinstimmt.

Die letzte Formel (13.) lässt sich auch so schreiben:

$$(14.)\qquad Q_n(z) = R_n(z) + S_n(z) - T_n(z)\;,$$

*) Die Function $Q_n(z)$ wird übrigens weiterhin bisweilen auch [vgl. z. B. p. 415] mit $Q_n(\lambda, z)$ bezeichnet werden.

wo alsdann S_n und T_n die bereits in (III.) p. 408 genannten Bedeutungen haben:

$$(15.)\quad \begin{cases} S_n(z) = -P_n(z) \,.\, \log(z-1)\,, \\ T_n(z) = -P_n(z) \,.\, \log(z+1)\,. \end{cases}$$

Setzt man also für den Augenblick:

$$(16.)\qquad f_n(z) = -P_n(z) \,.\, \log(z-c)\,,$$

und versteht man dabei unter c eine beliebige Constante, so sind $S_n(z)$ und $T_n(z)$ specielle Fälle der Function $f_n(z)$.

In Betreff dieser Functionen (15.), (16.) mag es gestattet sein, schon jetzt einige einfache Bemerkungen einzuschalten, die in der Folge sich als nützlich erweisen werden.

Bezeichnet man die Differentialquotienten des Logarithmus

$$(\alpha.)\qquad L = \log(z-c)$$

nach z mit L', L'', L''', ... $L^{(h)}$, ...:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} L' = \dfrac{1}{z-c}\,, \quad L'' = \dfrac{-1}{(z-c)^2}\,, \quad L''' = \dfrac{(-1)^2 \,.\, 1 \,.\, 2}{(z-c)^3}\,, \quad \ldots\ldots \\ \text{allgemein also:} \\ \qquad L^{(h)} = \dfrac{(-1)^{h-1}\,\Pi(h-1)}{(z-c)^h}\,, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (16.) durch h-malige Differentiation nach z:

$$(\gamma.)\quad f_n^{(h)}(z) = -\Big[P_n(z)L^{(h)} + \frac{h}{1}P_n'(z)L^{(h-1)} + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}P_n''(z)\,L^{(h-2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h}{1}P_n^{(h-1)}(z)\,L' + P_n^{(h)}(z)\,L\Big]\,,$$

oder, falls man die Werthe (α.), (β.) wirklich einsetzt:

$$(\delta.)\quad f_n^{(h)}(z) = \frac{(-1)^h\,\Pi(h-1)}{(z-c)^h}P_n(z) + \frac{\mathfrak{B}}{(z-c)^{h-1}}P_n'(z) +$$
$$+ \frac{\mathfrak{C}}{(z-c)^{h-2}}P_n''(z) + \ldots + \frac{\mathfrak{G}}{z-c}P_n^{(h-1)}(z) - P_n^{(h)}(z)\,.\,\log(z-c)\,,$$

wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... $\mathfrak{G}$ *Constanten* vorstellen, nämlich nur von h abhängen. Ordnet man das Polynom $P_n(z)$ nach Potenzen von $(z-c)$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(c) + \gamma_1(z-c) + \gamma_2(z-c)^2 + \ldots + \gamma_n(z-c)^n\,, \\ P_n'(z) &= \gamma_1 + 2\gamma_2(z-c) + \ldots + n\gamma_n(z-c)^{n-1}\,, \\ P_n''(z) &= 2\gamma_2 + \ldots + n(n-1)\gamma_n(z-c)^{n-2}\,, \end{aligned}$$

etc. etc. etc.

wo die γ nur von c und n abhängen. Diese Werthe in (δ.) eingesetzt, erhält man:

$$(\varepsilon.)\quad f_n^{(h)}(z) = \frac{(-1)^h \Pi(h-1)}{(z-c)^h} P_n(c) + \frac{\delta_1}{(z-c)^{h-1}} + \frac{\delta_2}{(z-c)^{h-2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{\delta_n}{(z-c)^{h-n}} - P_n^{(h)}(z) \, . \log(z-c) \, ,$$

wo die δ nur von c, n, h abhängen.

Bringt man jetzt die Formel (ε.) in Anwendung auf die *Specialfälle* $c = 1$ und $c = -1$, und beachtet man dabei die bekannten Gleichungen:

$$P_n(1) = 1 \, , \qquad P_n(-1) = (-1)^n \, ,$$

[vgl. (4.) p. 409], so gelangt man zu folgenden Darstellungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} S_n(z) = -P_n(z) \log(z-1) \, , \\ S_n^{(h)}(z) = \dfrac{(-1)^h \Pi(h-1)}{(z-1)^h} + \dfrac{D_1}{(z-1)^{h-1}} + \dfrac{D_2}{(z-1)^{h-2}} + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{D_n}{(z-1)^{h-n}} - P_n^{(h)}(z) \log(z-1) \, , \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$$(18.)\quad \begin{cases} T_n(z) = -P_n(z) \log(z+1) \, , \\ T_n^{(h)}(z) = \dfrac{(-1)^{h+n} \Pi(h-1)}{(z+1)^h} + \dfrac{E_1}{(z+1)^{h-1}} + \dfrac{E_2}{(z+1)^{h-2}} + \dots \\ \qquad \dots + \dfrac{E_n}{(z+1)^{h-n}} - P_n^{(h)}(z) \log(z+1) \, , \quad \text{für } h = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

wo die D und E die Specialwerthe der δ für $c = 1$ und $c = -1$ vorstellen, *mithin nur noch von n und h abhängen.*

Zu den Formeln (17.), (18.) mögen noch folgende hinzugefügt werden [vgl. (14.)]:

$$(19.)\quad \begin{cases} Q_n(z) = R_n(z) + S_n(z) - T_n(z) \, , \\ Q_n^{(h)}(z) = R_n^{(h)}(z) + S_n^{(h)}(z) - T_n^{(h)}(z) \, , \end{cases}$$

wo $R_n(z)$ eine *ganze rationale* Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades vorstellt.

Aus diesen Formeln (17.), (18.), (19.) ergeben sich, mit Rücksicht auf (II.), (IV.), p. 407, folgende Sätze:

Die Functionen

$$(20.)\qquad S_n(z) \, , \qquad S_n^{(h)}(z) \, , \qquad S_{nh}(z)$$

werden unendlich für $z = +1$. Andererseits werden die Functionen

$$(21.)\qquad T_n(z) \, , \qquad T_n^{(h)}(z) \, , \qquad T_{nh}(z)$$

unendlich gross für $z = -1$.

Und demgemäss werden [wie aus (19.) folgt] *die Functionen*

$$(22.)\qquad Q_n(z)\,,\qquad Q_n^{(h)}(z)\,,\qquad Q_{nh}(z)$$

unendlich gross sein sowohl für $z = +1$, *wie auch für* $z = -1$.

Für $h > n$ *verschwinden* offenbar $P_n^{(h)}(z)$ und $R_n^{(h)}(z)$, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Formeln (17.), (18.), (19.), und zugleich der bemerkenswerthe Satz sich ergiebt, *dass die Functionen*

$$(23.)\qquad S_n^{(h)}(z)\,,\qquad T_n^{(h)}(z)\quad \textit{und}\quad Q_n^{(h)}(z)$$

für $h > n$ *rationale Functionen von* z *sind.*

Für *grosse* Werthe von z (genauer ausgedrückt: für $\mathrm{mod}\, z > 1$) kann das Integral (10.) nach fallenden Potenzen von z entwickelt werden, wodurch man erhält:

$$(24.)\quad Q_n(z) = \frac{2^{n+1}\Pi^2(n)}{\Pi(2n+1)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\,.\,4\,(2n+3)(2n+5)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+5} + \ldots\right\}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach z:

$$Q_n'(z) = (-1)\frac{2^{n+1}\Pi(n)\Pi(n+1)}{\Pi(2n+1)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+3)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+4} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2\,.\,4\,(2n+3)(2n+5)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+6} + \ldots\right\},$$

$$Q_n''(z) = (-1)^2\frac{2^{n+1}\Pi(n)\Pi(n+2)}{\Pi(2n+1)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{n+3} + \frac{(n+3)(n+4)}{2(2n+3)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+5} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)}{2\,.\,4\,(2n+3)(2n+5)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+7} + \ldots\right\},$$

u. s. w., mithin allgemein:

$$(25.)\quad \begin{cases} Q_n^{(h)}(z) \\ = (-1)^h\dfrac{2^{n+1}\Pi(n)\Pi(n+h)}{\Pi(2n+1)}\left\{\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+h+1} + \dfrac{(n+h+1)(n+h+2)}{2(2n+3)}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+h+3} + \right. \\ \left. + \dfrac{(n+h+1)(n+h+2)(n+h+3)(n+h+4)}{2\,.\,4\,(2n+3)(2n+5)}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{n+h+5} + \ldots\right\}; \end{cases}$$

und hieraus folgt z. B. für ein *unendlich grosses* z:

$$(26.)\quad Q_n^{(h)}(z) = (-1)^h\frac{2^{n+1}\Pi(n)\Pi(n+h)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+h+1}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (II.), p. 407, dass

$$Q_n(z)\,,\qquad Q_n^{(h)}(z)\quad \text{und}\quad Q_{nh}(z)$$

verschwinden für $z = \infty$. Und durch Zusammenfassung dieses Satzes mit dem früheren Satz (10*b*.) gelangt man zu folgendem Resultat:

Die Functionen

(27.) $$Q_n(z)\ ,\qquad Q_n^{(h)}(z)\quad \textit{und}\quad Q_{nh}(z)$$

sind, mit Ausnahme der Pollinie λ, *auf der z-Ebene überall* s t e t i g, *und in den unendlich fernen Punkten dieser Ebene überall* $= 0$.

§ 4.

Ueber die aus $Q_n(z)$ durch Abänderung der Integrationscurve entstehende Function $Q_n(\sigma, z)$.

In der z-Ebene sei ein *fester Punct* z markirt, und überdies irgend eine *in sich zurücklaufende Curve von bestimmt festgesetzter Richtung* construirt, deren aufeinander folgende Puncte mit γ bezeichnet sein mögen. Das über diese Curve und in der Richtung derselben hinerstreckte Integral

(1.) $$\int \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{z-\gamma} = (-1)\int \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{\gamma - z}$$

wird alsdann [zufolge eines bekannten Cauchy'schen Satzes]

(2.) $$= \mathfrak{M}\,.\,2\pi i\,P_n(z)$$

sein, wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und $\mathfrak{M}$ eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt. Liegt z. B. der feste Punct z *ausserhalb* der construirten Curve, so ist $\mathfrak{M} = 0$. Liegt hingegen z *innerhalb* derselben, so wird $\mathfrak{M} = -1$ oder $= +1$ sein, jenachdem die Curve *positiv* oder *negativ* um z herumläuft.

Diesen Satz wollen wir jetzt in Anwendung bringen auf die schon behandelte Function

(3.) $$Q_n(z) = Q_n(\lambda, z) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{z-\gamma}\,[\lambda]\ ,$$

und daneben auf die *neue* Function:

(4.) $$Q_n(\sigma, z) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{z-\gamma}\,[\sigma]\ .$$

Dabei soll die Integration in (4.) hinerstreckt gedacht sein *längs irgend welcher von* $\gamma = -1$ *nach* $\gamma = +1$ *laufenden Curve* σ. Die beiden Functionen (3.) und (4.) unterscheiden sich also nur da-

durch von einander, dass bei der einen die Pollinie λ, bei der andern die Curve σ als Integrationscurve dient. Um dies in deutlicher Weise zur Anschauung zu bringen, ist die erstere, nämlich $Q_n(z)$, mit $Q_n(\lambda, z)$, die letztere hingegen mit $Q_n(\sigma, z)$ bezeichnet worden [vgl. die Note p. 411].

Die Curven σ und λ bilden zusammengenommen eine in sich zurücklaufende Curve. Zufolge des Satzes (1.), (2.) ergiebt sich daher:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{z-\gamma}[\sigma] + \int_{+1}^{-1} \frac{P_n(\gamma)\,d\gamma}{z-\gamma}[\lambda] = \mathfrak{M}\,.\,2\pi i P_n(z)\,,$$

d. i.

$$Q_n(\sigma, z) - Q_n(\lambda, z) = \mathfrak{M}\,.\,2\pi i P_n(z)\,.$$

Also der Satz: *Versteht man unter σ eine ganz beliebige vom Pole -1 zum Pole $+1$ laufende Curve, so wird stets die Relation stattfinden:*

$$(5.)\qquad Q_n(\sigma, z) = Q_n(\lambda, z) + \mathfrak{M}\,.\,2\pi i P_n(z)\,,$$

d. i. die Relation:

$$(6.)\qquad Q_n(\sigma, z) = Q_n(z) + \mathfrak{M}\,.\,2\pi i P_n(z)\,,$$

wo $\mathfrak{M}$ eine positive oder negative ganze Zahl vorstellt, deren Werth von der Beschaffenheit der Curve σ abhängt.

Ebenso wie für $Q_n(z)$ oder $Q_n(\lambda, z)$ der Satz (27.) p. 415 abgeleitet wurde, ebenso wird sich offenbar für die neue Function $Q_n(\sigma, z)$ folgender Satz ergeben:

Die Function

$$(7.)\qquad Q_n(\sigma, z)$$

ist, mit alleiniger Ausnahme der Curve σ, auf der z-Ebene überall s t e t i g, *und verschwindet in den unendlich fernen Puncten dieser Ebene.*

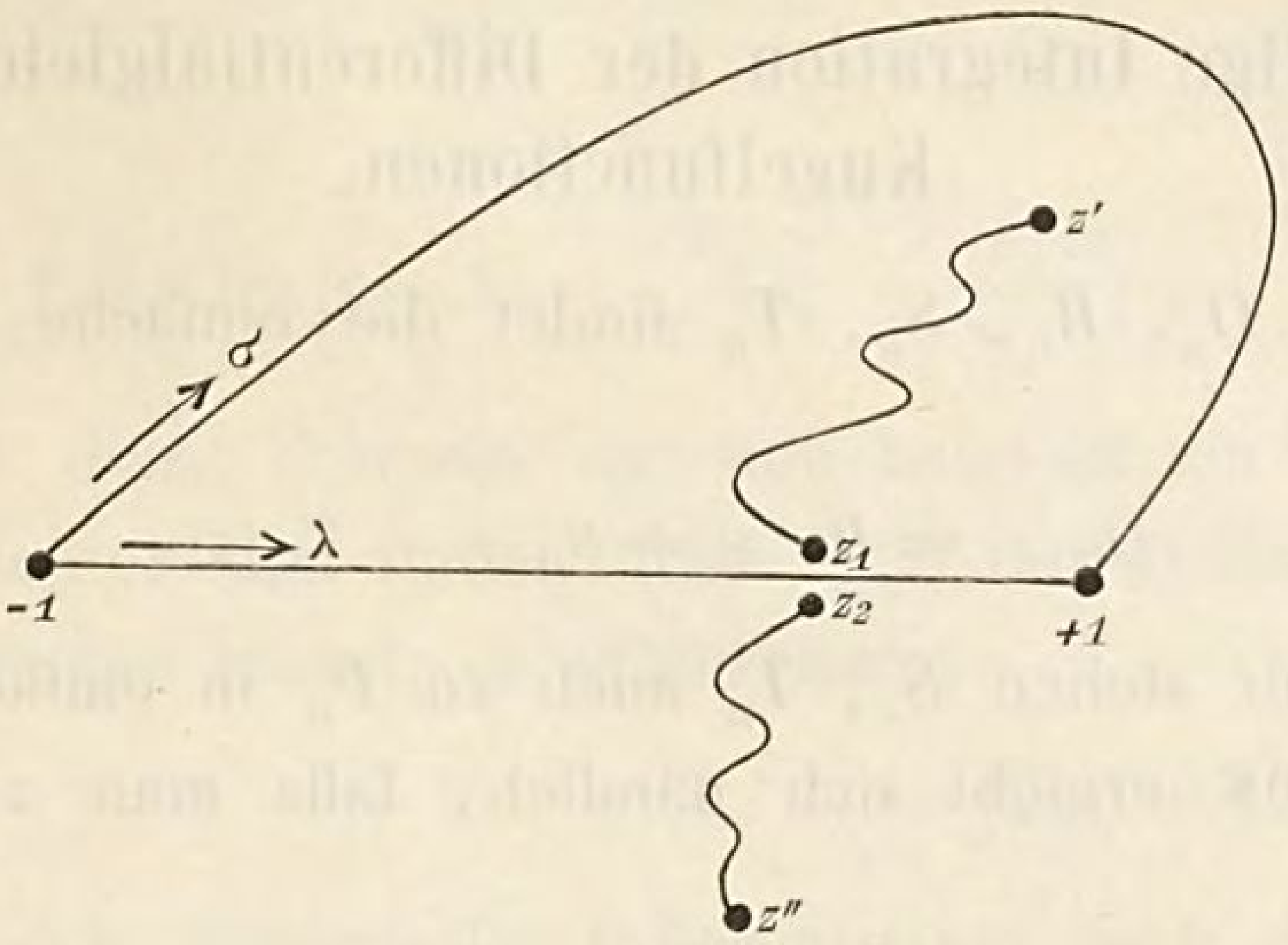
Die in (5.), (6.) enthaltene Zahl $\mathfrak{M}$ ist abhängig von der Curve σ, und leicht angebbar, falls diese Curve σ, sowie auch die Lage des Punctes z, in bestimmter Weise gegeben sind. Betrachtet man z. B. die in nachstehender Figur gezeichnete Curve σ und die daselbst angegebenen Puncte z' und z'', so ergiebt sich, auf Grund des Satzes (1.), (2), sofort:

$$(\alpha.)\qquad Q_n(\sigma, z') - Q_n(\lambda, z') = 2\pi i P_n(z')\,,$$

$$(\beta.)\qquad Q_n(\sigma, z'') - Q_n(\lambda, z'') = 0\,,$$

sodass also im einen Fall $\mathfrak{M} = 1$, im andern $\mathfrak{M} = 0$ ist.

Diese Formeln $(\alpha.)$, $(\beta.)$ bleiben in Kraft, wenn man [wie in der Figur angegeben ist] z' nach z_1 und z'' nach z_2 wandern lässt,



wo z_1 und z_2 zwei am *obern* und *untern* Ufer der Linie λ einander gegenüberliegende Puncte vorstellen. Man erhält also:

$$(\gamma.) \qquad Q_n(\sigma, z_1) - Q_n(\lambda, z_1) = 2\pi i P_n(z_1) \; ,$$

$$(\delta.) \qquad Q_n(\sigma, z_2) - Q_n(\lambda, z_2) = 0 \; .$$

Nun ist aber $Q_n(\sigma, z)$, mit alleiniger Ausnahme der Curve σ, auf der z-Ebene überall *stetig* [Satz (7.)], mithin z. B.:

$$Q_n(\sigma, z_1) = Q_n(\sigma, z_2) \; .$$

Demgemäss ergiebt sich aus $(\gamma.)$, $(\delta.)$ durch Subtraction:

$$(\varepsilon.) \qquad Q_n(\lambda, z_2) - Q_n(\lambda, z_1) = 2\pi i P_n(z_1) \; .$$

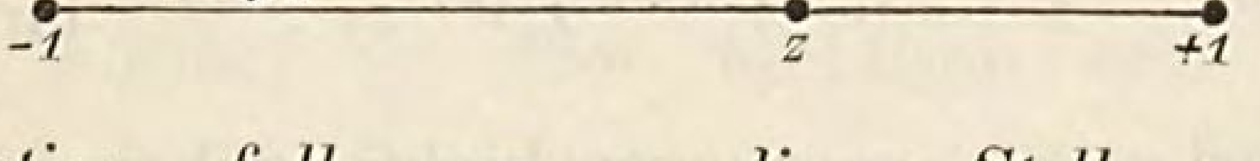
Diese Formel kann, weil $P_n(z)$ *allenthalben stetig*, mithin z. B. $P_n(z_1) = P_n(z_2)$, überdies aber $Q_n(\lambda, z)$ identisch mit $Q_n(z)$ ist, auch so geschrieben werden:

$$(\zeta.) \qquad Q_n(z_2) - Q_n(z_1) = 2\pi i P_n(z_1) = 2\pi i P_n(z_2) \; .$$

Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Die Unstetigkeit der Function $Q_n(z)$ längs der Linie λ ist leicht näher angebbar. Markirt man nämlich auf der Linie λ irgend eine Stelle z:

(8.)



so wird jene Function, falls man an dieser Stelle z die Linie λ von Oben nach Unten überschreitet, um $2\pi i P_n(z)$ anwachsen.

Ein analoger Satz ergiebt sich leicht für die Function $Q_n(\sigma, z)$ mit Bezug auf die Curve σ.

§ 5.

Vollständige Integration der Differentialgleichung der Kugelfunctionen.

Zwischen Q_n, R_n, S_n, T_n findet die einfache Beziehung statt [(14.) p. 411]:

$$(1.)\qquad Q_n(z) = R_n(z) + S_n(z) - T_n(z)\ .$$

Andrerseits aber stehen S_n, T_n auch zu P_n in einfacher Beziehung. Aus (III.) p. 408 ergiebt sich nämlich, falls man z mit $-z$ vertauscht:

$$S_n(-z) = -P_n(-z)\,.\log(-z-1)\ ,$$

also, weil $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$ und $\log(-\zeta) = i\pi + \log\zeta$ ist:

$$(-1)^n S_n(-z) = -P_n(z)\,[i\pi + \log(z+1)]\ ,$$

also mit abermaliger Rücksicht auf (III.) p. 408:

$$(-1)^n S_n(-z) = -i\pi P_n(z) + T_n(z)\ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(2.)\qquad i\pi P_n(z) = (-1)^{n+1} S_n(-z) + T_n(z)\ .$$

Mittelst dieser Relation wird man die Werthe von S_n auf die von T_n, und umgekehrt, zu reduciren im Stande sein.

Aus (1.), (2.) folgt durch h-malige Differentiation:

$$(3.)\qquad Q_n^{(h)}(z) = R_n^{(h)}(z) + S_n^{(h)}(z) - T_n^{(h)}(z),$$

$$(4.)\qquad i\pi P_n^{(h)}(z) = (-1)^{n+h+1} S_n^{(h)}(-z) + T_n^{(h)}(z)\ .$$

Nun sind aber $P_n(z)$ und $R_n(z)$ *ganze rationale* Functionen von z respective vom n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Demgemäss nehmen die Formeln (3.), (4.) für $h > n$ die einfachere Gestalt an:

$$(5.)\qquad Q_n^{(h)}(z) = S_n^{(h)}(z) - T_n^{(h)}(z)\ ,\qquad \text{für } h > n\ ,$$

$$(6.)\qquad S_n^{(h)}(-z) = (-1)^{n+h}\, T_n^{(h)}(z)\ ,\qquad \text{für } h > n\ .$$

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, gehen wir jetzt über zur Absolvirung der schon auf p. 408 genannten Aufgabe, d. i. zur ***vollständigen** Integration der Differentialgleichung der Kugelfunctionen.*

Nach (III.) p. 408 ist

$$S_n(z) = -P_n(z)\log(z-1)\,, \qquad\qquad \Big|\; n(n+1)$$

mithin:

$$S_n'(z) = -P_n'(z)\log(z-1) - \frac{P_n(z)}{z-1}\,, \qquad\qquad \Big|\; -2z$$

und:

$$S_n''(z) = -P_n''(z)\log(z-1) - \frac{2P_n'(z)}{z-1} + \frac{P_n(z)}{(z-1)^2}\,. \qquad \Big|\; 1-z^2$$

Multiplicirt man diese Formeln mit den beigesetzten Factoren, und addirt, und beachtet man dabei, dass $P_n(z)$ der Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n.)$ p. 407 Genüge leistet, so erhält man:

$$n(n+1)\,S_n(z) - 2z\,S_n'(z) + (1-z^2)\,S_n''(z) = P_n(z) + 2(z+1)\,P_n'(z)\,.$$

Hieraus folgt durch wiederholte Differentiation nach z:

$$(n-1)(n+2)\,S_n'(z) - 4z\,S_n''(z) + (1-z^2)\,S_n'''(z)$$
$$= 3P_n'(z) + 2(z+1)\,P_n''(z)\,,$$
$$(n-2)(n+3)\,S_n''(z) - 6z\,S_n'''(z) + (1-z^2)\,S_n''''(z)$$
$$= 5P_n''(z) + 2(z+1)\,P_n'''(z)\,,$$

etc. etc. etc.,

mithin allgemein:

$$(7.)\quad (n-h)(n+h+1)\,S_n^{(h)}(z) - (2h+2)\,z\,S_n^{(h+1)}(z) + (1-z^2)\,S_n^{(h+2)}(z) =$$
$$= (2h+1)\,P_n^{(h)}(z) + 2(z+1)\,P_n^{(h+1)}(z)\,.$$

Diese allgemeine Formel vereinfacht sich für $h = n$ und auch für $h > n$. Zufolge p. 410 (8.) ist nämlich:

$$P_n^{(n)}(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)}\,, \qquad \text{mithin} \quad P_n^{(n+1)}(z) = 0\,, \qquad P_n^{(n+2)}(z) = 0\,, \quad \text{etc.}$$

Somit folgt aus (7.) für $h = n$:

$$(8.)\quad -(2n+2)\,z\,S_n^{(n+1)}(z) + (1-z^2)\,S_n^{(n+2)}(z) = \frac{\Pi(2n+1)}{2^n\,\Pi(n)}\,,$$

und andrerseits für $h > n$:

$$(9.)\quad -(h-n)(h+n+1)\,S_n^{(h)}(z) - (2h+2)\,z\,S_n^{(h+1)}(z)$$
$$+ (1-z^2)\,S_n^{(h+2)}(z) = 0\,, \qquad \text{für} \quad h > n\,.$$

Diese letzte Formel ist aber identisch mit der Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ p. 407. Somit sehen wir, dass diese Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ für den Fall $h > n$ nicht nur erfüllt wird durch $P_n^{(h)}(z)$ und $Q_n^{(h)}(z)$, sondern auch durch $S_n^{(h)}(z)$, mithin [zufolge (5.)] auch durch $T_n^{(h)}(z)$. Also der Satz:

Für den Fall $h > n$ *sind sowohl* $P_n^{(h)}(z)$, $Q_n^{(h)}(z)$, *wie auch* $S_n^{(h)}(z)$ *und* $T_n^{(h)}(z)$ *Integrale der*

(10.) *Differentialgleichung* $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$.

Doch ist in diesem Fall das erste dieser Integrale, nämlich $P_n^{(h)}(z)$ *illusorisch. Denn dasselbe ist für* $h > n$ *identisch gleich Null.*

Dieser Satz überträgt sich [mittelst der Relationen (II.), (IV.) p. 407] sofort auf die Functionen P_{nh}, Q_{nh}, S_{nh}, T_{nh}, und lautet alsdann folgendermassen:

Für den Fall $h > n$ *sind sowohl* $P_{nh}(z)$, $Q_{nh}(z)$, *wie auch* $S_{nh}(z)$, $T_{nh}(z)$ *Integrale der*

(11.) *Differentialgleichung* $(\mathfrak{D}_{nh}.)$.

Dabei ist aber $P_{nh}(z)$ *wieder als ein illusorisches Integral zu bezeichnen, weil dasselbe für* $h > n$ *identisch verschwindet.*

§ 6.

Die Functionen $S_n^{(h)}(z)$, $T_n^{(h)}(z)$ und $S_{nh}(z)$, $T_{nh}(z)$ für $h > n$. Ihre Werthe für $z = \pm 1$ und für $z = \infty$.

Nach p. 413, 414 sind $S_n^{(h)}(z)$, $T_n^{(h)}(z)$ für $h > n$ *rationale* Functionen von z, und dargestellt durch die Formeln:

$$(12.)\quad S_n^{(h)}(z) = \frac{(-1)^h \Pi(h-1)}{(z-1)^h} + \frac{D_1}{(z-1)^{h-1}} + \frac{D_2}{(z-1)^{h-2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{D_n}{(z-1)^{h-n}}, \qquad (h > n),$$

$$(13.)\quad T_n^{(h)}(z) = \frac{(-1)^{h+n} \Pi(h-1)}{(z+1)^h} + \frac{E_1}{(z+1)^{h-1}} + \frac{E_2}{(z+1)^{h-2}} + \dots$$
$$\dots + \frac{E_n}{(z+1)^{h-n}}, \qquad (\text{für } h > n),$$

wo die D, E *Constanten* bezeichnen. Hieraus ergeben sich mit Rücksicht auf (IV.) p. 408 folgende Sätze:

Die Functionen

(14.) $S_n^{(h)}(z)$ *und* $S_{nh}(z)$, $h > n$,

sind für $z = 1$ *unendlich, sonst aber auf der z-Ebene überall stetig.*

Und andrerseits sind die Functionen

(15.) $T_n^{(h)}(z)$ *und* $T_{nh}(z)$, $h > n$,

für $z = -1$ *unendlich, sonst aber auf der z-Ebene überall stetig.*

Es sollen nun zuvörderst die Werthe der Functionen (12.) für $z = -1$, und die der Functionen (13.) für $z = 1$ ermittelt werden. Zu diesem Zwecke greifen wir zurück zu den Formeln (8.), (9.). Dieselben lauten [falls man nämlich in (9.) das h successive $= (n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$, etc. macht] folgendermassen:

$$(\alpha.)\qquad -(2n+2)z\,S_n^{(n+1)}(z) + (1-z^2)S_n^{(n+2)}(z) = \frac{\Pi(2n+1)}{2^n\Pi(n)},$$

$$(\beta.)\qquad -1(2n+2)S_n^{(n+1)}(z) - (2n+4)z\,S_n^{(n+2)}(z) + (1-z^2)S_n^{(n+3)}(z) = 0,$$

$$(\gamma.)\qquad -2(2n+3)S_n^{(n+2)}(z) - (2n+6)z\,S_n^{(n+3)}(z) + (1-z^2)S_n^{(n+4)}(z) = 0,$$

$$(\delta.)\qquad -3(2n+4)S_n^{(n+3)}(z) - (2n+8)z\,S_n^{(n+4)}(z) + (1-z^2)S_n^{(n+5)}(z) = 0,$$

etc. etc. etc.

Setzt man in diesen Formeln $z = -1$, und beachtet dabei, dass die $S_n^{(h)}(z)$ für $z = -1$ *endliche* Werthe haben [Satz (14.) oder Formel (12.)], so erhält man:

$$S_n^{(n+1)}(-1) = \frac{\Pi(2n+1)}{2^{n+1}\Pi(n+1)},$$

$$S_n^{(n+2)}(-1) = \frac{1.(2n+2)}{2.(n+2)}S_n^{(n+1)}(-1),$$

$$S_n^{(n+3)}(-1) = \frac{2.(2n+3)}{2.(n+3)}S_n^{(n+2)}(-1),$$

etc. etc. etc.

Hieraus folgt sofort

$$S_n^{(n+1)}(-1) = \frac{\Pi(0)\Pi(2n+1)}{2^{n+1}\Pi(n+1)},$$

$$S_n^{(n+2)}(-1) = \frac{\Pi(1)\Pi(2n+2)}{2^{n+2}\Pi(n+2)},$$

$$S_n^{(n+3)}(-1) = \frac{\Pi(2)\Pi(2n+3)}{2^{n+3}\Pi(n+3)},$$

etc. etc. etc.

mithin allgemein:

$$S_n^{(n+j)}(-1) = \frac{\Pi(j-1)\Pi(2n+j)}{2^{n+j}\Pi(n+j)}, \qquad \text{für } j = 1, 2, 3, \text{etc.},$$

oder, falls man $n + j = h$, mithin $j = h - n$ setzt:

$$(16.)\qquad S_n^{(h)}(-1) = \frac{\Pi(h-n-1)\Pi(h+n)}{2^h\Pi(h)}, \qquad \text{für } h > n.$$

Hieraus folgt mittelst der Relation (6.) sofort:

$$(17.)\qquad T_n^{(h)}(+1) = (-1)^{n+h}\frac{\Pi(h-n-1)\Pi(h+n)}{2^h\Pi(h)}, \qquad \text{für } h > n.$$

Wir wollen nun weiter die Werthe von $S_n^{(h)}(z)$, $T_n^{(h)}(z)$ für $z = \infty$ untersuchen, und kehren zu diesem Zwecke zurück zur Formel (δ.) p. 412, welche für $h = n + 1$ folgende Gestalt annimmt:

$$f_n^{(n+1)}(z) = \mathfrak{A}\frac{P_n(z)}{(z-c)^{n+1}} + \mathfrak{B}\frac{P_n'(z)}{(z-c)^n} + \mathfrak{C}\frac{P_n''(z)}{(z-c)^{n-1}} + \dots + \mathfrak{G}\frac{P_n^{(n)}(z)}{z-c},$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... $\mathfrak{G}$ Constanten sind, die nur von n abhängen. Setzt man $c = 1$, so geht f_n über in S_n [vgl. (15.), (16.) p. 412]. Demgemäss ergiebt sich also:

$$(18.)\quad S_n^{(n+1)}(z) = \mathfrak{A}\frac{P_n(z)}{(z-1)^{n+1}} + \mathfrak{B}\frac{P_n'(z)}{(z-1)^n} + \mathfrak{C}\frac{P_n''(z)}{(z-1)^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + \mathfrak{G}\frac{P_n^{(n)}(z)}{z-1}.$$

Ist nun z sehr gross (oder wenigstens mod. $z > 1$), so wird nach dem Binomischen Satz:

$$\frac{1}{(z-1)^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{1}{z^{n+2}} + \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{z^{n+3}} + \dots.$$

$$\frac{1}{(z-1)^n} = \frac{1}{z^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{z^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\cdot\frac{1}{z^{n+2}} + \dots.$$

etc. etc. etc.

Und substituirt man diese Werthe in (18.), so ergiebt sich:

$$(19.)\quad S_n^{(n+1)}(z) = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \frac{A_4}{z^4} + \dots,$$

oder etwas anders geordnet:

$$(20.)\quad S_n^{(n+1)}(z) = \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_3}{z^3} + \dots\right) + \left(\frac{A_2}{z^2} + \frac{A_4}{z^4} + \dots\right),$$

wo A_1, A_2, A_3, A_4, ... Constanten vorstellen. Somit folgt aus (6.):

$$(21.)\quad T_n^{(n+1)}(z) = \left(\frac{A_1}{z} + \frac{A_3}{z^3} + \dots\right) - \left(\frac{A_2}{z^2} + \frac{A_4}{z^4} + \dots\right).$$

Ferner folgt aus (20.), (21.) durch Subtraction und mit Rücksicht auf (5.):

$$(22.)\quad Q_n^{(n+1)}(z) = 2\left(\frac{A_2}{z^2} + \frac{A_4}{z^4} + \dots\right).$$

Durch Vergleichung dieser Formel mit der früheren Formel (25.) p. 414 [letztere bezogen gedacht auf den Fall $h = n + 1$] bestimmen sich die Constanten A_2, A_4, A_6, ...

Was die Bestimmung der noch übrigen Constanten $A_1, A_3, A_5, \ldots$ betrifft, so mag zur augenblicklichen Abkürzung gesetzt werden:

$$(\alpha.)\qquad \varphi^{(h)} = S_n^{(h)}(z) - \tfrac{1}{2} Q_n^{(h)}(z)\,, \qquad \text{für } h > n\,,$$

oder, was dasselbe ist [vgl. (5.)]:

$$(\beta.)\qquad \varphi^{(h)} = T_n^{(h)}(z) + \tfrac{1}{2} Q_n^{(h)}(z)\,, \qquad \text{für } h > n\,.$$

Alsdann ergiebt sich aus $(\alpha.)$ für $h = n + 1$ die Formel:

$$(\gamma.)\qquad \varphi^{(n+1)} = S_n^{(n+1)}(z) - \tfrac{1}{2} Q_n^{(n+1)}(z)\,,$$

eine Formel, die man mit Rücksicht auf (20.), (22.) auch so schreiben kann:

$$(\delta.)\qquad \varphi^{(n+1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_3}{z^3} + \frac{A_5}{z^5} + \ldots .$$

Bekanntlich genügt nun $Q_n^{(h)}(z)$ der Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ p. 407:

$$(n-h)(n+h+1)\,Q_n^{(h)}(z) - (2h+2)\,z\,Q_n^{(h+1)}(z) + (1-z^2)\,Q_n^{(h+2)}(z) = 0\,,$$

woraus für $h = n$ sich ergiebt:

$$-(2n+2)\,z\,Q_n^{(n+1)}(z) + (1-z^2)\,Q_n^{(n+2)}(z) = 0\,.$$

Ueberdies ist nach (8.):

$$-(2n+2)\,z\,S_n^{(n+1)}(z) + (1-z^2)\,S_n^{(n+2)}(z) = \frac{\Pi(2n+1)}{2^n\,\Pi(n)}\,.$$

Multiplicirt man aber die beiden letzten Formeln respective mit $-\tfrac{1}{2}$ und 1, und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf $(\gamma.)$:

$$(\varepsilon.)\qquad -(2n+2)\,z\,\varphi^{(n+1)} + (1-z^2)\,\varphi^{(n+2)} = \frac{\Pi(2n+1)}{2^n\,\Pi(n)}\,.$$

Und substituirt man hier für $\varphi^{(n+1)}$ die Entwicklung $(\delta.)$, so erhält man zur Bestimmung von $A_1, A_3, A_5, \ldots$ die Relationen:

$$\begin{aligned}
-(2n+1)\,A_1 &= \frac{\Pi(2n+1)}{2^n\,\Pi(n)}\,,\\
-(2n-1)\,A_3 &= 1\,.\,A_1\,,\\
-(2n-3)\,A_5 &= 3\,.\,A_3\,,\\
-(2n-5)\,A_7 &= 5\,.\,A_5\,,\\
&\text{etc. etc.}\,,
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$
(\zeta.)\quad \begin{cases} A_1 = (-1)\dfrac{\Pi(2n)}{2^n\Pi(n)}\,, \\[2mm] A_3 = (-1)^2\dfrac{\Pi(2n)}{2^n\Pi(n)}\cdot\dfrac{1}{2n-1}\,, \\[2mm] A_5 = (-3)^3\dfrac{\Pi(2n)}{2^n\Pi(n)}\cdot\dfrac{1\,.\,3}{(2n-1)(2n-3)}\,, \\ \quad\text{etc. etc.} \end{cases}
$$

Diese Werthe in (δ.) substituirt, ergiebt sich eine Formel, die wir folgendermassen schreiben wollen:

$$
\varphi^{(n+1)} = (-1)\frac{\Pi(2n)}{2^n\Pi(n)}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1\,.\,2}{2(2n-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \right.
$$
$$
\left. + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - + \dots\right\}.
$$

Hieraus erhalten wir nun weiter durch wiederholte Differentiation nach z:

$$
\varphi^{(n+2)} = (-1)^2\frac{\Pi(2n)\,\Pi(1)}{2^n\Pi(n)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{2\,.\,3}{2(2n-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \right.
$$
$$
\left. + \frac{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1}{z}\right)^6 - + \dots\right\},
$$

$$
\varphi^{(n+3)} = (-1)^3\frac{\Pi(2n)\,\Pi(2)}{2^n\Pi(n)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^3 - \frac{3\,.\,4}{2(2n-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^5 + \right.
$$
$$
\left. + \frac{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1}{z}\right)^7 - + \dots\right\},
$$

etc. etc. etc.,

mithin allgemein:

$$
(\eta.)\quad \varphi^{(h)} = (-1)^{h-n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\Pi(n)}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n} - \frac{(h-n)(h-n+1)}{2(2n-1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n+2} + \right.
$$
$$
\left. + \frac{(h-n)(h-n+1)(h-n+2)(h-n+3)}{2\,.\,4\,(2n-1)(2n-3)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n+4} - + \dots\right\},
$$
$$
h > n\,.
$$

Hieraus aber ergiebt sich für ein *unendlich grosses* z die einfache Formel:

$$
(\vartheta.)\quad \varphi^{(h)} = (-1)^{h-n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\Pi(n)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n}, \qquad h > n\,,
$$

oder, falls man für $\varphi^{(h)}$ seine eigentlichen Bedeutungen (α.), (β.) substituirt:

$$
(23.)\quad S_n^{(h)}(z) - \tfrac{1}{2}\,Q_n^{(h)}(z) = T_n^{(h)}(z) + \tfrac{1}{2}\,Q_n^{(h)}(z) =
$$
$$
= (-1)^{h-n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\Pi(n)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n}, \qquad h > n\,,
$$

immer vorausgesetzt, dass z *unendlich gross* ist.

Für ein unendlich grosses z ist aber $Q_n^{(h)}(z)$, nach (26.) p. 414 proportional

$$\text{mit } \left(\frac{1}{z}\right)^{n+h+1}, \text{ d. i. mit } \left(\frac{1}{z}\right)^{(h-n)+(2n+1)};$$

sodass also das in (23.) enthaltene $Q_n^{(h)}(z)$ gegen den daselbst in der zweiten Zeile vorhandenen Ausdruck *verschwindet*. Solches aber erkannt, gewinnt die Formel (23.) die einfachere Gestalt:

$$(24.)\quad S_n^{(h)}(z) = T_n^{(h)}(z) = (-1)^{h-n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\,\Pi(n)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n}, \quad h>n,$$

immer vorausgesetzt, dass z *unendlich gross* ist.

§ 7.

Zusammenstellung derjenigen Werthe, welche die Functionen $P_{nh}(z)$, $Q_{nh}(z)$, $S_{nh}(z)$, $T_{nh}(z)$ annehmen für ein unendlich grosses z.

Für ein *unendlich grosses* z ist nach (26.) p. 414:

$$(A.)\qquad Q_n^{(h)}(z) = (-1)^h\frac{2^{n+1}\,\Pi(n)\,\Pi(n+h)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+h+1},$$

ferner nach (9.) p. 410:

$$(B.)\qquad P_n^{(h)}(z) = \frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-h)}\,z^{n-h}, \qquad h\leqq n,$$

endlich nach der letzten Formel des vorhergehenden Paragraphen:

$$(C.)\quad S_n^{(h)}(z) = T_n^{(h)}(z) = (-1)^{h+n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\,\Pi(n)}\left(\frac{1}{z}\right)^{h-n}, \quad h>n.$$

Offenbar gilt aber für ein unendlich grosses z auch folgende Formel:

$$(\sqrt{1-z^2})^h = i^h z^h, \qquad \text{wo } i=\sqrt{-1}.$$

Durch Multiplication mit dieser letzten Formel gewinnen aber die Formeln ($A.$), ($B.$), ($C.$) folgendes Aussehen:

$$(\alpha.)\quad Q_{nh}(z) = i^h(-1)^h\frac{2^{n+1}\,\Pi(n)\,\Pi(n+h)}{\Pi(2n+1)}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1},$$

$$(\beta.)\quad P_{nh}(z) = i^h\frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-h)}\,z^n, \qquad h\leqq n,$$

$$(\gamma.)\quad S_{nh}(z) = T_{nh}(z) = i^h(-1)^{h+n}\frac{\Pi(2n)\,\Pi(h-n-1)}{2^n\,\Pi(n)}\,z^n, \qquad h>n,$$

immer vorausgesetzt, dass z *unendlich gross* ist. (Vgl. *F. N.* p. 77, 78, 79.)

Aus diesen Formeln (α.), (β.), (γ.) ergeben sich nun sofort folgende Sätze:

Erster Satz. — Die Function

$$(\delta.)\qquad Q_{nh}(z)$$

verschwindet für $z = \infty$.

Zweiter Satz. — Die Functionen

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{cases} P_{nh}(z) \\ h \leqq n \end{cases} \quad \textit{und} \quad \begin{cases} S_{nh}(z)\,, & T_{nh}(z) \\ & h > n \end{cases}$$

werden für $z = \infty$ *stets Werthe haben, die von Null verschieden sind. Und zwar werden diese von Null verschiedenen Werthe endlich oder unendlich gross sein, je nachdem die Zahl* $n = 0$ *oder* > 0 *ist.*

§ 8.

Ueber die Entwicklung von $(z + i\sqrt{1 - z^2}\cos\Phi)^n$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

Führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = r\mu\,, \\ \mathfrak{y} = r\sqrt{1 - \mu^2}\cos\Phi\,, \\ \mathfrak{z} = r\sqrt{1 - \mu^2}\sin\Phi\,, \end{cases}$$

so nimmt bekanntlich die Differentialgleichung:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \mathfrak{x}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mathfrak{y}^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \mathfrak{z}^2} = 0$$

die Gestalt an:

$$(3.)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1 - \mu^2)\frac{\partial U}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{1 - \mu^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \Phi^2} = 0\,.$$

Der Gleichung (2.) wird aber z. B. Genüge geleistet durch

$$U = (\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})^n\,, \qquad \text{wo } i = \sqrt{-1}\,.$$

Folglich wird der aus diesem U durch die Substitutionen (1.) entstehende Ausdruck:

$$U = r^n(\mu + i\sqrt{1 - \mu^2}\cos\Phi)^n$$

der Differentialgleichung (3.) Genüge leisten. Und hieraus folgt weiter, dass der Ausdruck

$$f = (\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\Phi)^n$$

der Gleichung

$$n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2} = 0$$

genügt; sodass man also, indem man schliesslich den Buchstaben μ durch z ersetzt, zu folgendem Satz gelangt:

Die von z und Φ abhängende Function

$$(4.)\qquad f = (z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^n$$

ist ein Integral der Differentialgleichung;

$$(5.)\qquad n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\Phi^2} = 0\ .$$

Dabei repräsentirt n eine beliebig zu wählende Constante.

Es sei nun n eine *positive ganze Zahl.* Alsdann ist der Ausdruck

$$(6.)\qquad f = (z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^n$$

in die Form versetzbar:

$$f = E_0 + E_1\cos\Phi + E_2\cos^2\Phi + E_3\cos^3\Phi + \ldots + E_n\cos^n\Phi\ ,$$

wo die E's *ganze rationale Functionen* von z und $\sqrt{1-z^2}$ sind. Substituirt man hier für $\cos\Phi$, $\cos^2\Phi$, $\cos^3\Phi$, etc. die bekannten Ausdrücke:

$$(\xi.)\qquad \begin{cases} \cos\Phi = \cos\Phi\ , \\ \cos^2\Phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\Phi\ , \\ \cos^3\Phi = \frac{3}{4}\cos\Phi + \frac{1}{4}\cos 3\Phi\ , \\ \quad\text{etc. etc.}\ , \end{cases}$$

so erhält man:

$$(7.)\qquad f = F_0 + 2F_1\cos\Phi + 2F_2\cos 2\Phi + 2F_3\cos 3\Phi + \ldots + 2F_n\cos n\Phi\ ,$$

oder einfacher geschrieben:

$$(8.)\qquad f = \sum_{h=0}^{h=n}\varepsilon_h F_h\cos h\Phi\ ,$$

wo die F's (ebenso wie die E's) *ganze rationale Functionen* von z und $\sqrt{1-z^2}$ vorstellen, während die ε's die früher (p. 406) festgesetzte Bedeutung haben.

Da nun f der Differentialgleichung (5.) genügt, so ergiebt sich

aus (7.) oder (8.) sofort, dass F_h folgender Gleichung Genüge leistet:

$$(9.)\qquad \left(n(n+1) - \frac{h^2}{1-z^2}\right)F_h + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial F_h}{\partial z}\right) = 0\ .$$

Dies ist aber die Differentialgleichung ($\mathfrak{D}_{nh}$.), deren particulare Integrale $P_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z)$ sind [vgl. p. 407]. Somit ergiebt sich, dass F_h die Gestalt besitzen muss:

$$(10.)\qquad F_h = \alpha P_{nh}(z) + \beta Q_{nh}(z)\ ,$$

wo α, β noch unbekannte *Constanten* vorstellen.

Die F_h sind (wie schon bemerkt wurde) ganze rationale Functionen von z und $\sqrt{1-z^2}$, mithin *endlich* für $z = \pm 1$, während die $Q_{nh}(z)$ [vgl. (22.) p. 414] für $z = \pm 1$ *unendlich gross* werden. Demgemäss kann in der Formel (10.) ein mit $Q_{nh}(z)$ behaftetes Glied *nicht* vorkommen; woraus folgt, dass das dortige $\beta = 0$ ist. Somit ergiebt sich:

$$(11.)\qquad F_h = \alpha P_{nh}(z)\ .$$

Substituirt man diesen Werth von F_h in (8.), und schreibt man dabei α_{nh} für α, so erhält man:

$$(12.)\qquad f = \sum_{h=0}^{h=n} \varepsilon_h \alpha_{nh} P_{nh}(z) \cos h\Phi\ .$$

Es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung der Constanten α_{nh}. — Aus (12.) folgt sofort:

$$(\alpha.)\qquad \alpha_{nh} P_{nh}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f \cos h\Phi\, d\Phi\ ,$$

oder, falls man durch $(\sqrt{1-z^2})^h$ dividirt, und zugleich für f seine eigentliche Bedeutung (6.) substituirt:

$$(\beta.)\quad \alpha_{nh} P_n^{(h)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(z + i\,\mathrm{w}\cos\Phi)^n \cos h\Phi\, d\Phi}{\mathrm{w}^h}\ ,$$

wo $$\mathrm{w} = \sqrt{1-z^2}\ .$$

Um die α_{nh} zu bestimmen, wollen wir jetzt den speciellen Fall betrachten, dass z nahezu $= 1$, mithin w nahezu $= 0$ ist. Alsdann ergiebt sich durch Entwicklung nach Potenzen von w:

$$(z + i\,\mathrm{w}\cos\Phi)^n = z^n\Big[1 + \frac{n}{1}\left(\frac{i\,\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{i\,\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Pi(n)}{\Pi(h)\,\Pi(n-h)}\left(\frac{i\,\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right)^h + \ldots\Big]\ .$$

Substituirt man dies in $(\beta.)$, und beachtet man dabei die bekannten Formeln:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\Phi)^g \cos h\Phi \,.\, d\Phi = 0 \qquad \text{für} \quad g < h \,,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\Phi)^h \cos h\Phi \,.\, d\Phi = \left(\frac{1}{2}\right)^h ,$$

so erhält man:

$$(\gamma.) \quad \alpha_{nh} P_n^{(h)}(z) = z^n \left[\frac{\Pi(n)}{\Pi(h)\,\Pi(n-h)} \cdot \frac{i^h}{z^h}\left(\frac{1}{2}\right)^h + C\frac{\mathrm{w}}{z^{h+1}} + D\frac{\mathrm{w}^2}{z^{h+2}} + \cdots\right],$$

wo C, D, ... gewisse Constanten vorstellen, auf deren Werthe es nicht weiter ankommt. Lässt man nun in dieser Formel $(\gamma.)$ das $z = 1$, mithin $\mathrm{w} = 0$ werden, so folgt:

$$(\delta.) \qquad \alpha_{nh} P_n^{(h)}(1) = \frac{\Pi(n)}{\Pi(h)\,\Pi(n-h)}\left(\frac{i}{2}\right)^h ,$$

oder, falls man für $P_n^{(h)}(1)$ seinen Werth (6.) p. 409 einsetzt:

$$(\varepsilon.) \quad \alpha_{nh}\left(\frac{1}{2}\right)^h \frac{1}{\Pi(h)} \cdot \frac{\Pi(n+h)}{\Pi(n-h)} = \frac{\Pi(n)}{\Pi(h)\,\Pi(n-h)}\left(\frac{i}{2}\right)^h ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\zeta.) \qquad \alpha_{nh} = i^h \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+h)} \,.$$

Substituirt man dies in (12.), und ersetzt man daselbst zugleich das f durch seine eigentliche Bedeutung (6.), so gelangt man zu folgendem

Resultat. — *Bezeichnet Φ eine reelle, z eine complexe Variable, ferner n eine beliebig gegebene positive ganze Zahl, so findet stets die Formel statt:*

$$(13.) \quad (z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^n = \sum_{h=0}^{h=n}{}' \varepsilon_h i^h \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+h)} P_{nh}(z) \cos h\Phi \,,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, während die ε_h die auf p. 406 festgesetzte Bedeutung besitzen.

Bemerkung. — Was das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{1-z^2}$ betrifft, so ist zu beachten, dass diese Grösse in (13.) *links* und *rechts* vorkommt; denn es ist:

$$P_{nh}(z) = (\sqrt{1-z^2})^h P_n^{(h)}(z) \,.$$

Bei dieser Auffassung kann nun das Vorzeichen von $\sqrt{1-z^2}$ *beliebig* gewählt werden, nur mit der Restriction, dass man *links* und *rechts* unter $\sqrt{1-z^2}$ *ein und dieselbe* Grösse zu verstehen hat.

§ 9.

Ueber die Entwicklung von $P_n(zz_1+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

Führt man statt der rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = r\mu\ , \\ \mathfrak{y} = r\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi\ , \\ \mathfrak{z} = r\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi\ , \end{cases}$$

wo μ den Cosinus desjenigen Winkels vorstellt, unter welchem r gegen die $\mathfrak{x}$-Axe geneigt ist, so nimmt die Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{x}^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{y}^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{z}^2}=0$$

die Gestalt an:

$$(2.)\qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial U}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0\ .$$

Dieser Gleichung wird z. B. genügt, wenn man

$$U = r^n F(\mu)$$

setzt, und dabei die *nur* von μ abhängende Function $F(\mu)$ der Bedingung unterwirft:

$$n(n+1)F(\mu)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial F(\mu)}{\partial\mu}\right)=0\ .$$

Dieser wird [vgl. p. 407] entsprochen, wenn man für $F(\mu)$ eine der Functionen $P_n(\mu)$ oder $Q_n(\mu)$ oder auch [vgl. p. 416 (6.)] die allgemeinere Function $Q_n(\sigma,\mu)$ nimmt. Also der Satz:

Versteht man unter r die Entfernung des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vom Anfangspunkte der Coordinaten, ferner unter μ den Cosinus des Neigungswinkels von r gegen die $\mathfrak{x}$-Axe, so sind:

$$(3.)\qquad r^n P_n(\mu)\ ,\qquad r^n Q_n(\mu)\ ,\qquad r^n Q_n(\sigma,\mu)$$

Integrale der Gleichung:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{x}^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{y}^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\mathfrak{z}^2}=0\ .$$

Aus diesem Satze selber folgt aber sofort, dass die Functionen (3.) der Gleichung (4.) auch dann Genüge leisten werden, wenn man unter μ den Cosinus des Neigungswinkels von r gegen die $\mathfrak{y}$- oder $\mathfrak{z}$-Axe, oder gegen irgend eine *andere* feste Axe versteht. Markirt man also irgendwo im Raume einen *festen Punkt*:

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_1 = r_1 \mu_1 , \\ \mathfrak{y}_1 = r_1 \sqrt{1-\mu_1^2} \cos\varphi_1 , \\ \mathfrak{z}_1 = r_1 \sqrt{1-\mu_1^2} \sin\varphi_1 , \end{cases}$$

und nimmt man an Stelle von μ den Cosinus:

$$\cos\gamma = \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1) ,$$

d. i. den Cosinus desjenigen Winkels γ, unter welchem r gegen die *feste Axe* r_1 geneigt ist, so werden

$$(6.) \qquad r^n P_n(\cos\gamma) , \qquad r^n Q_n(\cos\gamma) , \qquad r^n Q_n(\sigma, \cos\gamma)$$

ebenfalls Integrale der Gleichung (4.), mithin auch Integrale der [aus (4.) durch Transformation entstehenden] Gleichung (2.) sein. Substituirt man aber in dieser letztern Gleichung an Stelle von U die Ausdrücke (6.), so ergiebt sich sofort, *dass*

$$(7.) \qquad P_n(\cos\gamma) , \qquad Q_n(\cos\gamma) , \qquad Q_n(\sigma, \cos\gamma)$$

folgender Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(8.) \qquad n(n+1)V + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0 .$$

Dieses Resultat (7.), (8.) nimmt, falls man schliesslich die Bezeichnungen

$$\cos\gamma , \qquad \mu , \qquad \mu_1 , \qquad \varphi - \varphi_1$$

durch

$$Z , \qquad z , \qquad z_1 , \qquad \Phi$$

ersetzt, folgende Gestalt an:

Sind z, z_1, Φ beliebige Variable, und setzt man

$$(9.) \qquad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi ,$$

so werden

$$(10.) \qquad P_n(Z) , \qquad Q_n(Z) , \qquad Q_n(\sigma, Z)$$

der Differentialgleichung

$$(11.) \qquad n(n+1)V + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\Phi^2} = 0$$

Genüge leisten. Und demgemäss werden diese Functionen (10.), *wie*

unmittelbar aus ihrer Symmetrie folgt, auch folgender Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(11a.) \quad n(n+1)V + \frac{\partial}{\partial z_1}\left((1-z_1^2)\frac{\partial V}{\partial z_1}\right) + \frac{1}{1-z_1^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \Phi^2} = 0 \; .$$

Der Ausdruck $P_n(Z)$ ist in Bezug auf Z, also [wie aus (9.) ersichtlich] auch in Bezug auf $\cos\Phi$ eine *ganze rationale* Function n^{ten} Grades, also von der Form:

$$P_n(Z) = E_0 + E_1\cos\Phi + E_2\cos^2\Phi + \ldots + E_n\cos^n\Phi \; ,$$

wo die E_h *ganze rationale Functionen* von z, z_1, $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-z_1^2}$ sind. Hieraus folgt mittelst bekannter Formeln [(ξ.) p. 427]:

$$P_n(Z) = F_0 + 2F_1\cos\Phi + 2F_2\cos 2\Phi + \ldots + 2F_n\cos n\Phi \; ,$$

d. i.

$$(12.) \qquad P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n}{}' \varepsilon_h F_h \cos h\Phi \; ,$$

wo die F_h (ebenso wie die E_h) *ganze rationale Functionen* von z, z_1, $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-z_1^2}$ sind.

Da nun $P_n(Z)$ den Gleichungen (11.), (11a.) genügt, so ergiebt sich aus (12.), dass F_h folgenden Gleichungen Genüge leistet:

$$\left(n(n+1) - \frac{h^2}{1-z^2}\right)F_h + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial F_h}{\partial z}\right) = 0 \; ,$$

$$\left(n(n+1) - \frac{h^2}{1-z_1^2}\right)F_h + \frac{\partial}{\partial z_1}\left((1-z_1^2)\frac{\partial F_h}{\partial z_1}\right) = 0 \; .$$

Diese beiden Formeln aber repräsentiren die Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_{nh}.)$, deren particulare Integrale P_{nh} und Q_{nh} sind [vgl. p. 407]. Somit ergiebt sich, dass F_h die Form haben muss:

$$(13.) \qquad F_h = \mathsf{A}P_{nh}(z) + \mathsf{B}Q_{nh}(z) \; ,$$

und dass ferner die hier auftretenden A, B die Form haben müssen:

$$(14.) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \alpha P_{nh}(z_1) + \beta Q_{nh}(z_1) \; , \\ \mathsf{B} = \gamma P_{nh}(z_1) + \delta Q_{nh}(z_1) \; , \end{cases}$$

wo α, β, γ, δ *noch unbekannte Constanten* vorstellen.

Die F_h sind (wie schon bemerkt wurde) ganze rationale Functionen von z, z_1, $\sqrt{1-z^2}$, $\sqrt{1-z_1^2}$, mithin z. B. *endlich* für $z = 1$, ebenso für $z_1 = 1$. Gleiches gilt von $P_{nh}(z)$ und $P_{nh}(z_1)$; während die $Q_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z_1)$ für die genannten Argumente *unendlich gross* werden (p. 414). Demgemäss können in der Darstellung von F_h

d. h. in (13.) und (14.) die $Q_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z_1)$ *nicht* vorkommen. Somit reduciren sich jene Formeln (13.), (14.) auf

$$F_h = \mathsf{A}\, P_{nh}(z) \quad \text{und} \quad \mathsf{A} = \alpha\, P_{nh}(z_1)\ ,$$

d. i. auf:

$$(15.)\qquad F_h = \alpha\, P_{nh}(z)\, P_{nh}(z_1)\ .$$

Substituirt man dies in (12.), und schreibt man dabei α_{nh} für α, so erhält man:

$$(16.)\qquad P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n} \varepsilon_h \alpha_{nh} P_{nh}(z)\, P_{nh}(z_1) \cos h\Phi\ ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(17.)\qquad \begin{cases} P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n} \varepsilon_h \alpha_{nh} P_{nh}(z)\,.\,(\sqrt{1-z_1^2})^h\, P_n^{(h)}(z_1)\,.\cos h\Phi\ , \\ \text{wo:}\quad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\ . \end{cases}$$

Um die Constanten α_{nh} zu bestimmen, lassen wir z_1 *ins Unendliche* wachsen, wobei alsdann Z ebenfalls unendlich gross wird. Für ein unendlich grosses Argument $\mathfrak{z}$ ist aber:

$$P_n(\mathfrak{z}) = A\mathfrak{z}^n\ , \qquad [\text{vgl. (1.) p. 408}],$$
$$P_n'(\mathfrak{z}) = An\mathfrak{z}^{n-1}\ ,$$
$$\text{etc. etc.}$$
$$P_n^{(h)}(\mathfrak{z}) = A\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-h)}\mathfrak{z}^{n-h}\ ,$$

wo A eine Constante vorstellt, auf deren Werth es nicht weiter ankommt. Die Formeln (17.) nehmen daher, falls man in ihnen z_1, mithin auch Z *ins Unendliche* wachsen lässt, folgende Gestalt an:

$$(18.)\qquad \begin{cases} AZ^n = \sum_{h=0}^{h=n} \varepsilon_h \alpha_{nh} P_{nh}(z)\,.\,(iz_1)^h A\frac{\Pi(n)}{\Pi(n-h)} z_1^{\,n-h}\,.\cos h\Phi\ , \\ Z = z_1(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)\ . \end{cases}$$

Hieraus folgt, durch Elimination von Z:

$$(19.)\qquad (z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^n = \sum_{h=0}^{h=n} \varepsilon_h \alpha_{nh} i^h \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-h)} P_{nh}(z)\cos h\Phi\ .$$

Vergleicht man aber diese Formel mit der früheren Formel (13.) p. 429, so erkennt man sofort, dass

$$\alpha_{nh}\, i^h \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-h)} = i^h \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+h)}$$

ist. Somit folgt:

$$(20.)\qquad \alpha_{nh} = \frac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)} \,.$$

Dies in (16.) substituirt, gelangt man zu folgendem

Resultat. — *Versteht man unter* Φ *eine reelle Variable, ferner unter* z *und* z_1 *zwei complexe Argumente, und setzt man:*

$$(21.)\qquad Z = z z_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi \,,$$

so findet stets die Formel statt

$$(22.)\qquad P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=n}{}' \varepsilon_h \frac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)} P_{nh}(z)\, P_{nh}(z_1) \cos h\Phi \,,$$

wo die ε_h *die auf p. 406 festgesetzte Bedeutung haben.* Vgl. die Bemerkung p. 429.

§ 10.

Entwicklung des Ausdrucks $\dfrac{1}{(z+i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}}$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

Ersetzt man im Satz (4.), (5.) p. 427 die Constante n durch

$$-(n+1) \,,$$

so ergiebt sich, dass der Ausdruck

$$(1.)\qquad f = \frac{1}{(z+i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}}$$

der Differentialgleichung Genüge leistet:

$$(2.)\qquad n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \Phi^2} = 0 \,.$$

Dabei mag das in (1.), (2.) enthaltene n als eine *positive ganze Zahl* angesehen werden.

Offenbar kann die Function f (1.) nur dann *unendlich* werden, wenn ihr Nenner verschwindet, also nur dann, wenn

$$\cos^2\Phi = \frac{z^2}{z^2-1} \,,\qquad \text{mithin}\quad \sin^2\Phi = \frac{-1}{z^2-1}$$

wird. Mit andern Worten: Sie kann nur dann unendlich werden, wenn

$$\operatorname{cotg}\Phi = iz$$

wird. Dies aber ist für ein *reelles* Φ nur dann möglich, wenn z *rein imaginär* wird. Setzt man also für die Zukunft fest, dass

$$(3.)\qquad \Phi \text{ stets } \textit{reell}\ ,$$

und ferner, dass

$$(4.)\qquad \text{der reelle Theil von } z \text{ stets } > 0$$

sein soll, so wird die Function f (1.) fortdauernd *endlich* und überhaupt auch fortdauernd *stetig* bleiben, mithin z. B. *entwickelbar sein nach den Cosinus der Vielfachen von* Φ.

Bezeichnet man diese Entwicklung mit

$$(5.)\qquad f = \frac{1}{(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}} = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h F_h \cos h\Phi\ ,$$

wo die ε_h die auf p. 406 festgesetzte Bedeutung haben sollen, so wird F_h eine nur von z abhängende Function sein, und der Formel entsprechen:

$$(6.)\qquad F_h = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\cos h\Phi\, d\Phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\cos h\Phi\, d\Phi\ .$$

Mittelst dieser Formel überträgt sich die für f geltende Differentialgleichung (2.) leicht auf F_h. Multiplicirt man nämlich jene Gleichung (2.) mit $\frac{\cos h\Phi\, d\Phi}{2\pi}$, und integrirt über $\Phi = 0 \ldots 2\pi$, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (6.), sofort:

$$n(n+1)F_h + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial F_h}{\partial z}\right) + \frac{1}{1-z^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 f}{\partial \Phi^2}\cdot\frac{\cos h\Phi\, d\Phi}{2\pi} = 0\ .$$

Der letzte Term dieser Gleichung reducirt sich aber mittelst partieller Integration auf:

$$\frac{-h^2}{1-z^2}\int_0^{2\pi} f\frac{\cos h\Phi\, d\Phi}{2\pi}\ , \qquad \text{d. i. auf}\quad \frac{-h^2}{1-z^2}F_h\ :$$

so dass man erhält:

$$(7.)\qquad n(n+1)F_h + \frac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\frac{\partial F_h}{\partial z}\right) - \frac{h^2}{1-z^2}F_h = 0\ .$$

Dies ist die Gleichung ($\mathfrak{D}_{nh}$.), deren particulare Integrale $P_{nh}(z)$ und $Q_{nh}(z)$ sind [vgl. p. 407]. Doch ist das Integral $P_{nh}(z)$ illusorisch für den Fall $h > n$, und in diesem Falle zu ersetzen durch $S_{nh}(z)$ oder $T_{nh}(z)$, [Satz p. 420]. Nimmt man $T_{nh}(z)$ als be-

treffenden Ersatz, so folgt also aus (7.), dass F_h die Form haben muss:

$$(8.)\qquad F_h = \alpha\,[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)] + \beta\,Q_{nh}(z)\;,$$

wo α, β *Constanten* sind, und wo innerhalb der eckigen Klammer die erste oder zweite Function zu denken ist, je nachdem $h \leqq n$ oder $h > n$.

Zufolge (6.) ist F_h *endlich* für $z = 1$. Gleiches gilt von $P_{nh}(z)$ und $T_{nh}(z)$, [vgl. (15.) p. 420]; während $Q_{nh}(z)$ für $z = 1$ *unendlich gross* wird [p. 414]. Demgemäss kann $Q_{nh}(z)$ in der Formel (8.) *nicht* vorkommen. Es muss daher $\beta = 0$ sein; jene Formel also die Gestalt haben:

$$(9.)\qquad F_h = \alpha\,[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)]\;.$$

Substituirt man diesen Werth in (5.) und (6.), und schreibt man dabei α_{nh} für α, so erhält man:

$$(10.)\quad f = \frac{1}{(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}} = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \alpha_{nh}[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)]\cos h\Phi\;,$$

$$(11.)\qquad \alpha_{nh}[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos h\Phi\,.\,d\Phi}{(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}}\;.$$

Es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung der Constanten α_{nh}. Aus (11.) folgt, falls man durch $(\sqrt{1-z^2})^h$ dividirt:

$$(\alpha.)\quad \alpha_{nh}[P_n^{(h)}(z) \text{ resp. } T_n^{(h)}(z)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\mathrm{w}^h}\cdot\frac{\cos h\Phi\,.\,d\Phi}{(z + i\mathrm{w}\cos\Phi)^{n+1}}\;,$$

$$\text{wo}\quad \mathrm{w} = \sqrt{1-z^2}\;.$$

Um nun die α_{nh} zu bestimmen, wollen wir diese Formel auf den speciellen Fall anwenden, dass z nahezu $= 1$, mithin w nahezu $= 0$ ist. Alsdann ergiebt sich durch Entwicklung nach Potenzen von w:

$$\frac{1}{(z + i\mathrm{w}\cos\Phi)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{z^{n+1}}\left[1 - \frac{n+1}{1}\left(\frac{i\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right) + \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}\left(\frac{i\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right)^2 - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^h\frac{\Pi(n+h)}{\Pi(h)\,\Pi(n)}\left(\frac{i\mathrm{w}\cos\Phi}{z}\right)^h + \ldots\right].$$

Substituirt man dies in (α.), und beachtet man dabei die bekannten Formeln:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\cos\Phi)^g \cos h\Phi \,.\, d\Phi = 0\ , \qquad \text{für} \quad g < h\ ,$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (\cos\Phi)^h \cos h\Phi \,.\, d\Phi = \left(\frac{1}{2}\right)_h ,$$

so ergiebt sich:

$$(\beta.)\quad \alpha_{nh}[P_n^{(h)}(z) \text{ resp. } T_n^{(h)}(z)] =$$
$$= \frac{1}{z^{n+1}}\left[\frac{(-1)^h \Pi(n+h)}{\Pi(h)\Pi(n)} \cdot \frac{i^h}{z^h}\left(\frac{1}{2}\right)^h + C\frac{\text{w}}{z^{h+1}} + D\frac{\text{w}^2}{z^{h+2}} + \cdots\right],$$

wo die C, D, ... Constanten vorstellen, auf deren Werth es nicht weiter ankommt. Setzt man jetzt $z = 1$, mithin $\text{w} = 0$, so folgt:

$$(\gamma.)\quad \alpha_{nh}[P_n^{(h)}(1) \text{ resp. } T_n^{(h)}(1)] = \frac{(-1)^h \Pi(n+h)}{\Pi(h)\Pi(n)}\left(\frac{i}{2}\right)^h ,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(\delta.)\quad \begin{cases} \alpha_{nh} P_n^{(h)}(1) = \dfrac{(-1)^h \Pi(n+h)}{\Pi(h)\Pi(n)}\left(\dfrac{i}{2}\right)^h , & \text{für} \quad h \leqq n\ , \\ \alpha_{nh} T_n^{(h)}(1) = \dfrac{(-1)^h \Pi(n+h)}{\Pi(h)\Pi(n)}\left(\dfrac{i}{2}\right)^h , & \text{für} \quad h > n\ . \end{cases}$$

Und substituirt man hier endlich für $P_n^{(h)}(1)$ und $T_n^{(h)}(1)$ ihre Werthe [(6.) p. 409 und (17.) p. 421], so folgt:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{cases} \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{\Pi(n-h)}{\Pi(n)}\ , & \text{für} \quad h \leqq n\ , \\ \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{(-1)^{h+n}}{\Pi(n)\Pi(h-n-1)}\ , & \text{für} \quad h > n\ . \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe der α_{nh} in die Formel (10.), so gelangt man, mit Rücksicht auf die in (3.), (4.) gemachten Voraussetzungen, zu folgendem

Resultat. — *Es sei* Φ *eine reelle, z eine complexe Variable, und es werde vorausgesetzt, dass*

$$(12.)\qquad (\text{der reelle Theil von } z) > 0$$

sei. Ueberdies bezeichne n eine beliebig gegebene ganze Zahl. Alsdann findet stets die Formel statt:

$$(13.)\quad \frac{1}{(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}} = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \alpha_{nh} [P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)] \cos h\Phi\ ,$$

wo die Constanten α_{nh} *die Werthe besitzen:*

$$(14.)\quad \begin{cases} \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{\Pi(n-h)}{\Pi(n)}, & \textit{für} \quad h \leqq n, \\ \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{(-1)^{h+n}}{\Pi(n)\Pi(h-n-1)}, & \textit{für} \quad h > n. \end{cases}$$

Dabei ist in (13.) *innerhalb der eckigen Klammer die erste oder zweite Function am Platze, je nachdem* $h \leqq n$ *oder* $h > n$. *Ferner repräsentiren die* ε_h *die auf* p. 406 *festgesetzten Constanten.* Vgl. die Bemerkung p. 429.

Beiläufig bemerkt, folgt aus (13.) sofort:

$$(15.)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos h\Phi \, . \, d\Phi}{(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}} = \alpha_{nh}\,[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)],$$

eine Formel, von der später Gebrauch zu machen ist.

§ 11.

Ueber die Entwicklung von $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

Erster Theil: Geometrische Betrachtungen.

Es seien z und z_1 zwei beliebige Punkte in der z-Ebene. Führt man, an Stelle von z und z_1, zwei neue Variable w und w_1 ein mittelst der Substitutionen:

$$(1.)\quad z = \frac{1+\text{w}}{1-\text{w}}, \qquad z_1 = \frac{1+\text{w}_1}{1-\text{w}_1},$$

woraus z. B. folgt:

$$(2.)\quad \sqrt{1-z^2} = \frac{2i\sqrt{\text{w}}}{1-\text{w}}, \qquad \sqrt{1-z_1^2} = \frac{2i\sqrt{\text{w}_1}}{1-\text{w}_1},$$

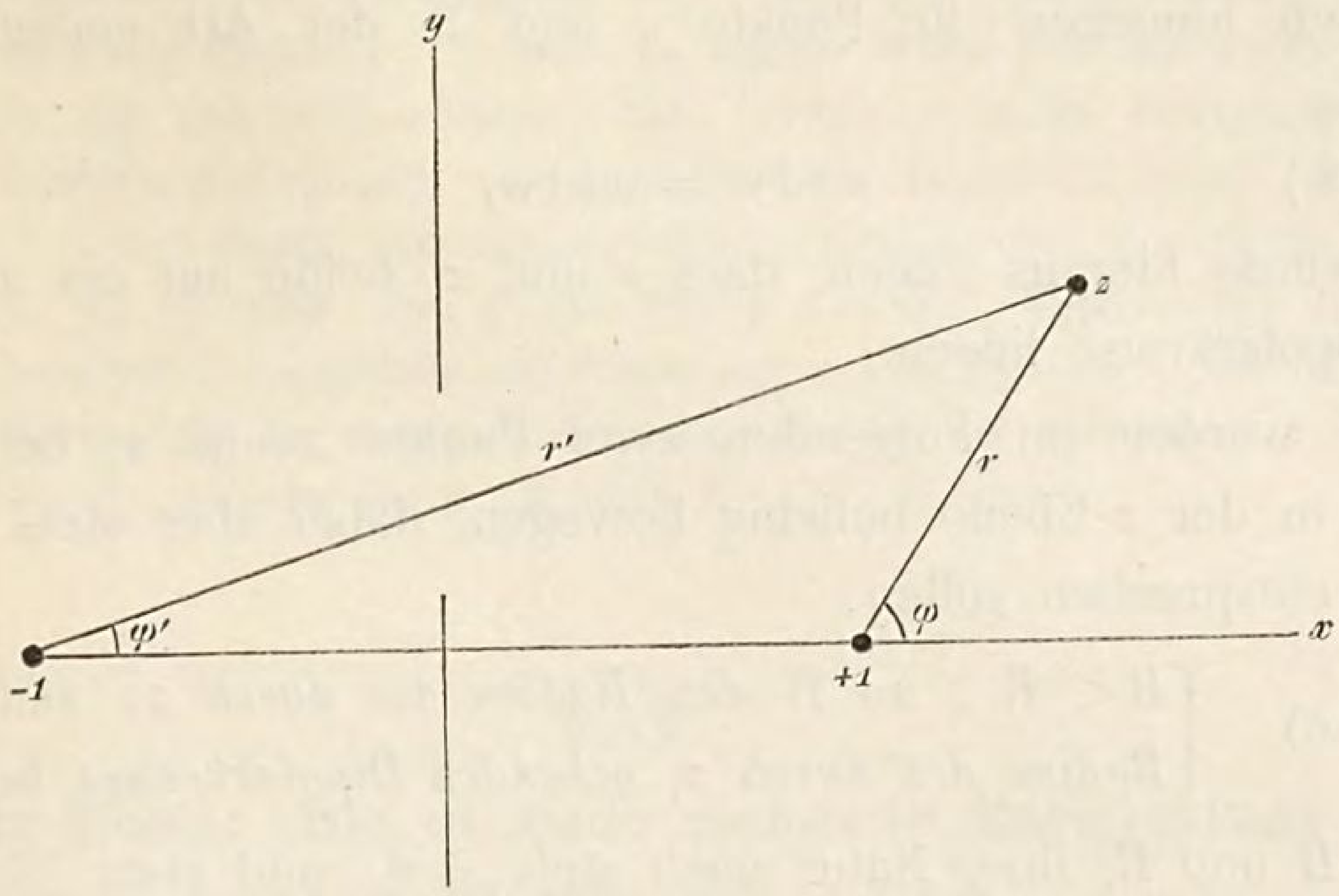
so ergiebt sich sofort:

$$(3.)\quad \text{w} = \frac{z-1}{z+1} = \frac{re^{i\psi}}{r'e^{i\psi'}},$$

wo r und r' die von den Polen $+1$ und -1 nach z laufenden Radien vorstellen, während ψ und ψ' die Azimuthe dieser Radien gegen die reelle Axe d. i. gegen die x-Axe bezeichnen (vgl. die folgende Figur). Aus (3.) folgt sofort:

$$(4.)\quad \text{mod}\,\text{w} = \frac{r}{r'}. \qquad \text{Ebenso wird:} \quad \text{mod}\,\text{w}_1 = \frac{r_1}{r_1'},$$

wo r_1 und r_1' die von $+1$ und -1 nach z_1 laufenden Radien vorstellen.



Diese Formeln führen zu einfachen geometrischen Betrachtungen. Setzt man z. B.

$$(5.)\qquad \text{mod}\,\mathrm{w} = \text{Const.} = K\ ,$$

so wird diese Gleichung [nach (4.)] identisch sein mit $\frac{r}{r'} = K$, also Punkte z liefern, die mit Bezug auf die beiden Pole -1 und $+1$ alle *ein und dasselbe* Abstandsverhältniss haben, und die daher zusammengenommen eine *Kreislinie* bilden. Eine derartige Kreislinie mag in Zukunft *ein den Polen* -1, $+1$ *entsprechender Kreis*, oder kürzer ein *Dipolarkreis* genannt werden. — Der durch die Gleichung (5.) dargestellte Dipolarkreis verwandelt sich für $K = 1$ in die imaginäre Axe, d. i. in die y-Axe, ferner für $K = 0$ in den Pol $+1$, und für $K = \infty$ in den Pol -1.

Nimmt man ferner für K zwei zu einander reciproke Constanten: K und $\frac{1}{K}$, so erhält man zwei Dipolarkreise:

$$(6.)\qquad \text{mod}\,\mathrm{w} = K \quad \text{und} \quad \text{mod}\,\mathrm{w} = \frac{1}{K}\ ,$$

die (wie leicht zu übersehen ist) beide von *gleicher Grösse* sind, von denen nämlich der eine das Spiegelbild des andern in Bezug auf die y-Axe vorstellt. Zwei derartige Kreise können kurzweg als *gleichgrosse* oder *symmetrische* Dipolarkreise bezeichnet werden. Denkt man sich also z. B. zwei Punkte z und z_1, für welche

$$(7.)\qquad (\text{mod}\,\mathrm{w})(\text{mod}\,\mathrm{w}_1) = 1$$

ist, so werden z und z_1 auf zwei zu einander *symmetrischen* Dipolarkreisen gelegen sein.

Sollen hingegen die Punkte z und z_1 der Art gedacht werden, dass

$$(8.)\qquad \text{mod}\, w = \text{mod}\, w_1$$

ist, so würde hieraus folgen, dass z und z_1 beide auf *ein und demselben* Dipolarkreise liegen.

Wir werden im Folgenden zwei Punkte z und z_1 betrachten, die sich in der z-Ebene beliebig bewegen, dabei aber stets der Bedingung entsprechen sollen:

$(\alpha.)$ $\begin{cases} R < R_1, \textit{ wo } R \textit{ den Radius des durch } z, \textit{ und } R_1 \textit{ den} \\ \textit{Radius des durch } z_1 \textit{ gehenden Dipolarkreises bezeichnet.} \end{cases}$

Da R und R_1 ihrer Natur nach stets $\geqq 0$, und stets $\leqq \infty$ sind, so kann man die Formel $(\alpha.)$ auch so schreiben:

$$(A.)\qquad 0 \leqq R < R_1 \leqq \infty\ .$$

Hieraus folgt z. B.:

$$R < \infty\ ;$$

der durch z gehende Dipolarkreis kann also niemals unendlich gross werden, d. i. niemals identisch werden mit der y-Axe. Demgemäss wird also der Punkt z niemals die y-Axe überschreiten können, mithin beständig auf *derselben* Seite der y-Axe bleiben. Um die Vorstellung zu fixiren, setzen wir fest, dass diese Seite die *rechte* sei. Also:

$(\beta.)$ *Der Punkt z soll stets auf der r e c h t e n Seite der y-Axe bleiben. Mit andern Worten: Der reelle Theil von z soll stets p o s i t i v gedacht werden.*

Ferner folgt aus $(A.)$:

$$0 < R_1\ ;$$

der durch z_1 gehende Dipolarkreis kann also niemals den Radius 0 annehmen, und der Punkt z_1 selber kann daher niemals identisch werden mit einem der beiden Pole -1, $+1$. Diese schon in $(\alpha.)$ resp. $(A.)$ enthaltene Bedingung wollen wir noch weiter verstärken, indem wir festsetzen,

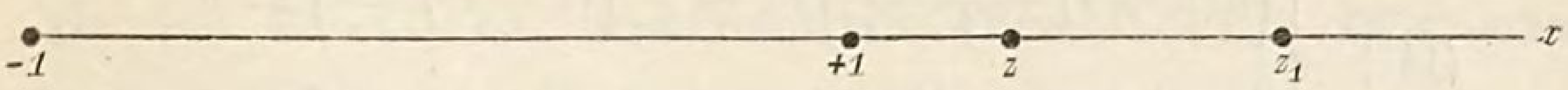
$(\gamma.)$ *dass der Punkt z_1 von der P o l l i n i e stets durch irgend welchen Zwischenraum getrennt bleiben soll.*

Bemerkung. — Denkt man sich die Punkte z, z_1 in zwei Positionen A, A_1 und B, B_1 gegeben, der Art, dass jede dieser beiden Positionen den Bedingungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ Genüge leistet, so kann man die Punkte z, z_1 stets in solcher Weise aus der einen Position in die andere überführen, dass w ä h r e n d dieser Bewegung die genannten Bedingungen von Augenblick zu Augenblick erfüllt bleiben.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme man eine dritte Position C, C_1 zu Hülfe, wo C den Pol $+1$ und C_1 irgend einen (vom Anfangspunkt verschiedenen) Punkt der y-Axe vorstellt. Alsdann ist die Richtigkeit des Satzes leicht erkennbar für die Positionen A, A_1 und C, C_1; ebenso für B, B_1 und C, C_1. U. s. w.

§ 12.

Zweiter Theil: Die in Rede stehende Entwicklung für reelle Werthe von z und z_1.



Es seien

$$(9.)\quad \begin{cases} z \text{ und } z_1 \text{ beide } \textit{reell}, \\ \text{und überdies sei: } 1 \leqq z < z_1\,; \end{cases}$$

was in Einklang steht mit den soeben festgesetzten Bedingungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$. Diese in (9.) charakterisirten Werthe von z, z_1 sind folgendermassen darstellbar:

$$(10.)\quad z = \cos i\vartheta = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}\,, \qquad z_1 = \cos i\vartheta_1 = \frac{e^{\vartheta_1} + e^{-\vartheta_1}}{2}\,,$$

wo alsdann ϑ, ϑ_1 [ebenso wie z, z_1 selber] *reell* sind, und der Relation entsprechen $0 \leqq \vartheta < \vartheta_1$.

Versteht man nun unter Φ eine *reelle* Variable, so wird der Ausdruck

$$(11.)\quad Z = zz_1 + \sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - z_1^2}\cos\Phi\,,$$

zufolge (9.), stets *reell* sein, und stets zwischen den Grenzen bleiben:

$$zz_1 + \sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - z_1^2} \quad \text{und} \quad zz_1 - \sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - z_1^2}\,.$$

Diese Grenzen sind [mit Rücksicht auf (10.)] auch so darstellbar:

$$\cos i(\vartheta - \vartheta_1) \quad \text{und} \quad \cos i(\vartheta + \vartheta_1)\,,$$

folglich beide reell, und [weil $0 \leqq \vartheta < \vartheta_1$ ist] auch beide > 1.

Für alle Werthe des (reellen) Φ wird also Z reell sein und

zwischen zwei Grenzen bleiben, die beide > 1 sind. Mit andern Worten: *Für alle Werthe von* Φ *ist* Z *reell und* > 1. Folglich ist [nach Satz p. 415] $Q_n(Z)$ für alle Werthe von Φ *stetig*, mithin entwickelbar nach den Cosinus der Vielfachen von Φ:

$$(12.) \qquad Q_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty}{}' \varepsilon_h F_h \cos h\Phi ,$$

wo die F_h nur noch von z, z_1 abhängen und der Formel entsprechen:

$$(13.) \qquad F_h = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q_n(Z) \cos h\Phi \, . \, d\Phi \, .$$

Da $Q_n(Z)$ den Differentialgleichungen (11.), (11 *a*.) p. 431 Genüge leistet, so ergiebt sich, auf Grund der Formel (13.), dass F_h folgenden Gleichungen entspricht:

$$(14.) \qquad \begin{cases} \left(n(n+1) - \dfrac{h^2}{1-z^2}\right) F_h + \dfrac{\partial}{\partial z}\left((1-z^2)\dfrac{\partial F_h}{\partial z}\right) = 0 \, , \\ \left(n(n+1) - \dfrac{h^2}{1-{z_1}^2}\right) F_h + \dfrac{\partial}{\partial z_1}\left((1-{z_1}^2)\dfrac{\partial F_h}{\partial z_1}\right) = 0 \, ; \end{cases}$$

vgl. den analogen Uebergang auf p. 434 von (2.) zu (7.).

Diese Gleichungen (14.) sind identisch mit der Differentialgleichung ($\mathfrak{D}_{nh}$.), deren particulare Integrale P_{nh} und Q_{nh} sind [vgl. p. 407]. Doch ist das Integral P_{nh} illusorisch für den Fall $h > n$, und in diesem Falle zu ersetzen durch S_{nh} oder T_{nh} [Satz p. 420]. Nimmt man T_{nh} als betreffenden Ersatz, so folgt aus (14.), dass F_h die Gestalt haben muss:

$$F_h = \mathsf{A}\,[P_{nh}(z) \text{ resp. } T_{nh}(z)] + \mathsf{B}\,Q_{nh}(z) \, ,$$

oder kürzer geschrieben:

$$(15.) \qquad F_h = \mathsf{A}\,[PT]_{nh}(z) + \mathsf{B}\,Q_{nh}(z) \, ,$$

und dass ferner die hier auftretenden A, B die Form haben müssen:

$$(16.) \qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \alpha\,[PT]_{nh}(z_1) + \beta\, Q_{nh}(z_1) \, , \\ \mathsf{B} = \gamma\,[PT]_{nh}(z_1) + \delta\, Q_{nh}(z_1) \, , \end{cases}$$

wo α, β, γ, δ noch unbekannte *Constanten* sind. Dabei ist alsdann in (15.), (16.) innerhalb der eckigen Klammer das P oder das T am Platze, je nachdem $h \leqq n$ oder $h > n$.

Zur Bestimmung von A, B, α, β, γ, δ betrachten wir die durch Combination von (13.) und (15.) entstehende Formel:

$$(17.)\quad F_h = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \mathsf{A}[PT]_{nh}(z) + \mathsf{B}Q_{nh}(z)\,,$$

in welcher z, z_1 beliebig variiren dürfen innerhalb des in (9.) angegebenen Spielraums; so dass also z. B. der Punkt z längs der reellen x-Axe nach 1 rücken darf, und z_1 längs dieser Axe nach Rechts ins Unendliche wandern darf.

Für $z = 1$ reducirt sich Z (11.) auf z_1, mithin die Formel (17.) auf:

$$Q_n(z_1)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos h\Phi\,.\,d\Phi = \mathsf{A}[PT]_{nh}(1) + \mathsf{B}Q_{nh}(1)\,.$$

Nun ist $[PT]_{nh}(1)$ *endlich* [Satz (15.) p. 420], hingegen $Q_{nh}(1)$ *unendlich gross* [Satz (22.) p. 414]. Hieraus folgt, dass $Q_{nh}(1)$ in der vorstehenden Formel *nicht* enthalten sein darf, dass mithin $\mathsf{B} = 0$ ist.

Da nun $\mathsf{B} = 0$ ist, so nimmt die Formel (17.), falls man in ihr für A den Werth (16.) substituirt, die Gestalt an:

$$(18.)\quad F_h = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \{\alpha[PT]_{nh}(z_1) + \beta Q_{nh}(z_1)\}[PT]_{nh}(z)\,.$$

Lässt man jetzt z_1 längs der x-Axe nach Rechts *ins Unendliche* rücken, so wird Z (11.) ebenfalls *unendlich gross*; so dass also die Formel (18.) hierbei die Gestalt annimmt:

$$Q_n(\infty)\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos h\Phi\,.\,d\Phi = \{\alpha[PT]_{nh}(\infty) + \beta Q_{nh}(\infty)\}[PT]_{nh}(z)\,.$$

Nun ist aber $Q_n(\infty) = 0$, ebenso $Q_{nh}(\infty) = 0$ [Satz (27.) p. 415], hingegen $[PT]_{nh}(\infty)$ *von* 0 *verschieden* [Satz (ε.) p. 426]. Somit ergiebt sich, dass $\alpha = 0$ sein muss.

Demgemäss reducirt sich die Formel (18.) auf:

$$(19.)\quad F_h = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \beta_{nh}Q_{nh}(z_1)[PT]_{nh}(z)\,,$$

wo β_{nh} für β geschrieben ist. Diese Formel (19.) ist übrigens auch so darstellbar:

$$(20.)\quad \begin{cases} F_h = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \beta_{nh}(\sqrt{1-z_1^2})^h Q_n^{(h)}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\,, \\ \text{wo} \qquad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\,. \end{cases}$$

Um nun schliesslich die Constanten β_{nh} zu bestimmen, wollen wir den Punkt z_1 nochmals längs der x-Axe nach Rechts *ins Unendliche* rücken lassen, wobei alsdann Z ebenfalls *unendlich gross* wird. Dabei sei beachtet, dass für irgend ein *unendlich grosses* Argument $\mathfrak{z}$ folgende Formeln stattfinden:

$$Q_n(\mathfrak{z}) = \frac{A}{\mathfrak{z}^{n+1}}, \quad [\text{vgl. (24.) } p.\ 414],$$

$$Q_n'(\mathfrak{z}) = -(n+1)\frac{A}{\mathfrak{z}^{n+2}},$$

etc. etc.

$$Q_n^{(h)}(\mathfrak{z}) = (-1)^h \frac{\Pi(n+h)}{\Pi(n)} \cdot \frac{A}{\mathfrak{z}^{n+h+1}},$$

wo A eine Constante vorstellt, auf deren Werth es nicht weiter ankommt. Lässt man also in (20.) das z_1, mithin auch Z *unendlich gross* werden, so ergiebt sich:

$$(\alpha.) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{A\cos h\Phi \,.\, d\Phi}{Z^{n+1}} = \beta_{nh}(iz_1)^h(-1)^h \frac{\Pi(n+h)}{\Pi(n)} \cdot \frac{A}{z_1^{n+h+1}}[PT]_{nh}(z), \\ Z = z_1(z + i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Elimination von Z:

$$(\beta.) \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos h\Phi \,.\, d\Phi}{(z+i\sqrt{1-z^2}\cos\Phi)^{n+1}} = \beta_{nh}(-i)^h \frac{\Pi(n+h)}{\Pi(n)}[PT]_{nh}(z).$$

Zufolge der früheren Formel (15.) p. 438 ist aber die *linke* Seite der Gleichung ($\beta.$)

$$= \alpha_{nh}[PT]_{nh}(z).$$

Somit ergiebt sich:

$$(\gamma.) \quad \beta_{nh}(-i)^h = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n+h)}\alpha_{nh},$$

wo α_{nh} die früher [in (14.) p. 438] angegebene Constante vorstellt:

$$(\delta.) \quad \begin{cases} \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{\Pi(n-h)}{\Pi(n)}, & \text{für } h \leqq n, \\ \alpha_{nh} = (-i)^h \dfrac{(-1)^{h+n}}{\Pi(n)\,\Pi(h-n-1)}, & \text{für } h > n. \end{cases}$$

Man erhält daher schliesslich für die zu berechnende Constante β_{nh} folgenden Werth:

$$(21.)\quad \begin{cases} \beta_{nh} = \dfrac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)}, & \text{für}\quad h \leqq n\,, \\[2ex] \beta_{nh} = \dfrac{(-1)^{h+n}}{\Pi(h+n)\,\Pi(h-n-1)}, & \text{für}\quad h > n\,. \end{cases}$$

Somit gelangen wir also, auf Grund der Formeln (12.), (19.) zu folgendem Satz:

Sind die Voraussetzungen erfüllt:

$$(22.)\quad \begin{cases} z\,,\ z_1\ \textit{beide reell}\,, \\ 1 \leqq z < z_1\,, \end{cases}$$

und setzt man:

$$(23.)\quad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\,,$$

wo Φ *eine reelle Variable vorstellen soll, so finden stets die Formeln statt:*

$$(24.)\quad Q_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\,,$$

$$(25.)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\,,$$

wo die β_{nh} *die in (21.) angegebenen Constanten repräsentiren, während die* ε_h *die auf p. 406 festgesetzten Bedeutungen haben. Dabei ist in (24.) und (25.) innerhalb der eckigen Klammern der Buchstabe P oder T am Platze, jenachdem* $h \leqq n$ *oder* $h > n$.

§ 13.

Dritter Theil: Die in Rede stehende Entwicklung für complexe Werthe von z und z_1.

Es seien z, z_1 irgend zwei den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) p. 440 entsprechende *feste* Puncte. Ferner sei Φ eine *reelle* Variable und

$$(26.)\quad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi\,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(27.)\quad Z = z' + z''\cos\Phi\,,$$

wo z' und z'' die Bedeutungen haben:

$$(28.)\quad z' = zz_1 \quad \text{und} \quad z'' = \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\,.$$

Alsdann repräsentiren z', z'' [ebenso wie z, z_1] *feste* Punkte in der

z-Ebene, hingegen Z einen von Φ abhängenden und mit Φ zugleich *in Bewegung begriffenen* Punkt.

Wäre z' zufällig $= 0$, hätte also die Formel (27.) die Gestalt $Z = z'' \cos\Phi$, so würde offenbar der Punkt Z, während Φ von 0 bis 2π bis 4π u. s. w. wächst, hin- und herpendeln längs der *geraden Linie* $(-z'', +z'')$ d. i. längs derjenigen geraden Linie, deren Endpunkte in $-z''$ und $+z''$ liegen. Analoges gilt aber auch von der in Wirklichkeit vorliegenden Formel (27.):

$$Z = z' + z'' \cos\Phi \ .$$

In der That bemerkt man, dass der durch diese Formel sich bestimmende Punkt Z, falls Φ im Wachsen (oder auch im Abnehmen) begriffen ist, hin- und herpendeln wird längs der *geraden Linie* $(z' - z'', z' + z'')$, d. i. längs derjenigen geraden Linie, deren Endpunkte in $z' - z''$ und $z' + z''$ liegen, und deren Mittelpunkt (oder Halbirungspunkt) also in z' sich befindet*).

Diese gerade Linie $(z' - z'', z' + z'')$ *hat die merkwürdige Eigenschaft, dass sie von den beiden Polen* [d. i. von den beiden Punkten $+1$ und -1] *stets durch irgend welche Zwischenräume getrennt ist, immer vorausgesetzt, dass die Punkte* z *und* z_1 *den Bedingungen* (α.), (β.), (γ.) *p. 440 entsprechen.*

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir [ebenso wie in (1.), (2.) p. 438]:

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}, \qquad z_1 = \frac{1 + w_1}{1 - w_1},$$

$$\sqrt{1 - z^2} = \frac{2i\sqrt{w}}{1 - w}, \qquad \sqrt{1 - z_1^{\,2}} = \frac{2i\sqrt{w_1}}{1 - w_1},$$

wodurch die Formel (26.) übergeht in:

$$Z = \frac{(1 + w)(1 + w_1) - 4\sqrt{w}\sqrt{w_1}\cos\Phi}{(1 - w)(1 - w_1)} \ .$$

Hieraus folgt:

*) Auch in Zukunft werde ich, wenn A, B irgend zwei Punkte sind, die *Verbindungslinie* derselben kurzweg mit (A, B) bezeichnen. Sind ferner *drei* Punkte A, B, C gegeben, so soll unter (A, B, C) die von A über B nach C gehende *gebrochene Linie* verstanden werden.

$$Z - 1 = 2\,\frac{\mathrm{w} + \mathrm{w}_1 - 2\sqrt{\mathrm{w}}\sqrt{\mathrm{w}_1}\cos\Phi}{(1-\mathrm{w})(1-\mathrm{w}_1)}\,,$$

$$Z + 1 = 2\,\frac{1 + \mathrm{w}\mathrm{w}_1 - 2\sqrt{\mathrm{w}}\sqrt{\mathrm{w}_1}\cos\Phi}{(1-\mathrm{w})(1-\mathrm{w}_1)}\,,$$

mithin:

$$(29.)\qquad \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{(\sqrt{\mathrm{w}} - \sqrt{\mathrm{w}_1}\,e^{i\Phi})(\sqrt{\mathrm{w}} - \sqrt{\mathrm{w}_1}\,e^{-i\Phi})}{(\sqrt{\mathrm{w}}\sqrt{\mathrm{w}_1} - e^{i\Phi})(\sqrt{\mathrm{w}}\sqrt{\mathrm{w}_1} - e^{-i\Phi})}\,.$$

Hier haben wir rechter Hand einen Bruch mit zwei Factoren im Zähler und und zwei Factoren im Nenner. *Der erste Factor des Zählers* kann nur dann verschwinden, wenn $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_1} = e^{2i\Phi}$ ist, also [weil Φ stets *reell* sein soll] nur dann, wenn $\mathrm{mod}\,\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{w}_1} = 1$, d. h. $\mathrm{mod}\,\mathrm{w} = \mathrm{mod}\,\mathrm{w}_1$ ist. Mit andern Worten [vgl. (8.)]: *Der erste Factor des Zählers* kann nur dann verschwinden, wenn die Punkte z und z_1 beide auf *demselben* Dipolarkreise liegen. Gleiches ergiebt sich, wie man leicht übersieht, für den *zweiten Factor des Zählers*.

Ferner kann *der erste Factor des Nenners* nur dann verschwinden, wenn $\mathrm{w}\mathrm{w}_1 = e^{2i\Phi}$ ist, also nur dann, wenn $(\mathrm{mod}\,\mathrm{w})(\mathrm{mod}\,\mathrm{w}_1) = 1$ ist. Mit andern Worten [vgl. (7.)]: *Der erste Factor des Nenners* kann nur dann verschwinden, wenn die Punkte z und z_1 auf zwei *zu einander symmetrischen* Dipolarkreisen liegen. Gleiches ergiebt sich für den *zweiten Factor des Nenners*.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass jener in (29.) für

$$(30.)\qquad \frac{Z-1}{Z+1}$$

angegebene Werth nur dann verschwinden kann, wenn z und z_1 auf *demselben* Dipolarkreise liegen, und nur dann unendlich werden kann, wenn z und z_1 auf zwei *zu einander symmetrischen* Dipolarkreisen sich befinden. Der eine wie der andere Fall ist aber *unmöglich*, zufolge der Bedingung (α.): $R < R_1$.

Der Ausdruck (30.) kann daher *niemals* $= 0$, und auch *niemals* $= \infty$ werden. Mit andern Worten: Z selber kann *niemals* $= \pm 1$ werden. Oder geometrisch ausgedrückt: *Der Punkt Z kann niemals, welchen Werth man der reellen Variable Φ auch zuertheilen mag, in einen der beiden Pole hineinfallen. Folglich wird die gerade Linie*

$$(31.)\qquad (z' - z'',\quad z' + z'')$$

längs welcher der Punkt Z, bei wachsendem Φ, hin- und herpendelt, von den beiden Polen stets durch irgend welche Zwischenräume getrennt sein. Dabei haben wir (wie zu Anfang dieses Paragraphen hervorgehoben wurde) *beständig vorausgesetzt, dass die Punkte z, z_1 den Bedingungen* (α.), (β.), (γ.) *entsprechen.*

Dies ist der zu beweisende Satz. Uebrigens würde derselbe, wie man leicht erkennt, auch dann gültig sein, wenn von den drei Bedingungen (α.), (β.), (γ.) nur die *erste* festgesetzt worden wäre. Der Uebersichtlichkeit willen erscheint es aber zweckmässig, diese Bedingungen (α.), (β.), (γ.) nicht von einander zu trennen, sondern sie stets *solidarisch* aufrecht zu erhalten.

Bemerkung. — Im Einklang mit den Bedingungen (α.), (β.), (γ.), an denen stets festgehalten werden soll, kann man die Punkte z, z_1 z. B. auch in diejenige Lage versetzen, welche ihnen zu Anfang des vorhergehenden Paragraphen zuertheilt wurde, also in diejenige Lage, welche den Voraussetzungen entspricht:

$$\begin{cases} z,\ z_1 \text{ beide } reell, \\ 1 \leqq z < z_1 . \end{cases}$$

In diesem Falle wird alsdann die gerade Linie (31.):

$$(z' - z'',\ z' + z''),$$

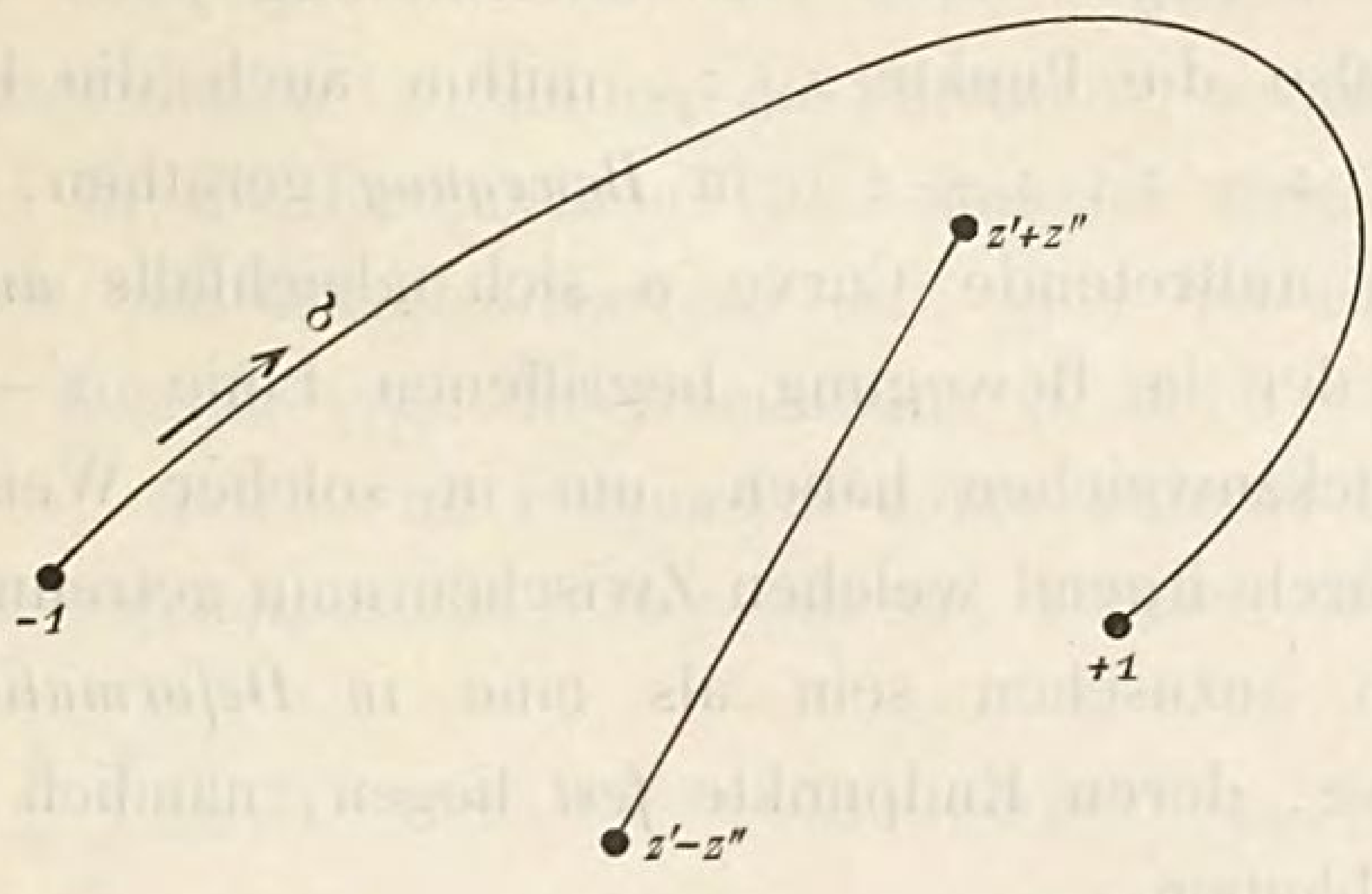
ihrer ganzen Länge nach, auf der x-Axe, und zwar rechts vom Pole 1 liegen, und von beiden Polen durch *gewisse Zwischenräume* getrennt sein; wie solches aus den einfachen Betrachtungen zu Anfang des vorhergehenden Paragraphen sofort sich ergiebt. —

So dient also die Untersuchung dieses speciellen Falles zur Bestätigung des allgemeinen Satzes (31.).

Wir gehen über zur Betrachtung der Function $Q_n(\sigma, \zeta)$, wo ζ ein variabler Punkt der z-Ebene sein soll*). Diese Function ist, mit alleiniger Ausnahme der Curve σ, auf der z-Ebene überall stetig [Satz (7.) p. 416]. Die Curve σ läuft auf beliebigem Wege von einem Pol zum andern, und kann daher, weil diese Pole von der geraden Linie $(z' - z'', z' + z'')$ durch *Zwischenräume* getrennt sind [vgl. (31.)], in solcher Weise construirt werden, dass sie von jener Linie ebenfalls durch einen gewissen *Zwischenraum* geschieden ist.

*) Wir dürfen diesen variablen Punkt nicht z nennen. Denn der Buchstabe z ist bei der gegenwärtigen Betrachtung von uns bereits zur Bezeichnung eines gewissen festen Punktes verwendet worden [vgl. z. B. (26.)].

Alsdann aber wird die Function $Q_n(\sigma, \zeta)$ im *Bereich* jener Linie stetig sein*). Also der Satz:



Entsprechen die Punkte z, z_1 den Bedingungen (α.), (β.), (γ.), *so lassen sich die beiden Pole stets durch eine Curve σ verbinden, die von der geraden Linie* ($z' - z''$, $z' + z''$) *durch irgend welchen Zwischenraum getrennt ist. Und die dieser Curve σ entsprechende Function*

$$(32.) \qquad Q_n(\sigma, \zeta)$$

wird alsdann im Bereich jener Linie stetig sein.

Sie wird also die Eigenschaft der Stetigkeit z. B. auch besitzen für solche Punkte ζ, die *auf* der genannten Linie liegen. D. h. sie wird stetig sein für alle aus der Formel

$$Z = z' + z'' \cos \Phi \ ,$$

bei wachsendem Φ, sich ergebenden Punkte Z. Also der Satz:

Entsprechen die Punkte z, z_1 den Bedingungen (α.), (β.), (γ.), *so werden sich die beiden Pole stets durch eine Curve σ verbinden lassen, welche von der geraden Linie* ($z' - z''$, $z' + z''$) *durch irgend welchen Zwischenraum getrennt ist. Und die dieser Curve σ entsprechende Function*

$$(33.) \qquad Q_n(\sigma, Z) = Q_n(\sigma, \ z' + z'' \cos \Phi)$$

wird alsdann eine stetige Function von Φ sein, mithin z. B. entwickelbar sein nach den Cosinus der Vielfachen von Φ.

*) Unter dem *Bereich* einer gegebenen Linie verstehe ich einen *schmalen Flächenstreifen* von solcher Lage und Gestalt, dass sämmtliche Punkte der gegebenen Linie *innerhalb* (nicht am Rande) dieses Flächenstreifens liegen.

Die Sätze (31.), (32.), (33.) sind gültig für jedwede den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) entsprechende Lage der Punkte z, z_1. Lässt man diese Lage, unter Aufrechterhaltung jener Bedingungen, sich *ändern*, also die Punkte z, z_1, mithin auch die Punkte z', z'' und die Linie $(z' - z'', z' + z'')$ in *Bewegung* gerathen, so wird die in (32.), (33.) auftretende Curve σ sich gleichfalls *ändern*. Denn sie wird vor der in Bewegung begriffenen Linie $(z' - z'', z' + z'')$ beständig zurückzuweichen haben, um in solcher Weise von derselben stets durch irgend welchen Zwischenraum getrennt zu bleiben. Sie wird also anzusehen sein als eine *in Deformation begriffene* elastische Curve, deren Endpunkte *fest* liegen, nämlich stets in den beiden Polen bleiben.

Eine solche den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) entsprechende *Bewegung* der Punkte z, z_1 mag nun wirklich eintreten. Sie mag ausgehen von einer gegebenen *Anfangsposition*, und fortdauern bis zu irgend welcher *Endposition*.

(34.) Und zwar mögen die Punkte z, z_1 zur Zeit der *Anfangsposition* die im vorhergehenden Paragraphen besprochene Lage besitzen, also den Voraussetzungen entsprechen:

$$z, \; z_1 \text{ beide } \textit{reell}, \qquad 1 \leqq z < z_1 ;$$

was in Einklang ist mit den Bedingungen (α.), (β.), (γ.). Ferner mag die elastische Curve σ zu jener Zeit *zusammenfallen mit der Pollinie* λ. Sie wird alsdann, wie leicht zu übersehen, zu jener Zeit von der geraden Linie $(z' - z'', z' + z'')$ durch einen *gewissen Zwischenraum* getrennt sein.

Zu jener Zeit der *Anfangsposition* liegt nämlich die gerade Linie $(z' - z'', z' + z'')$ auf der x-Axe, rechts vom Pole 1, von demselben getrennt durch einen gewissen Zwischenraum [vgl. die Bemerkung p. 448]. Durch ebendenselben Zwischenraum wird sie also auch von der Curve σ getrennt sein, falls man diese Curve, wie in (34.) festgesetzt wurde, mit der Pollinie λ zusammenfallen lässt. — Q. e. d.

Andrerseits sei die *Endposition* in *ganz beliebiger Weise* gegeben. Genauer ausgedrückt:

(35.) $\left\{\begin{array}{l}\text{Die } \textit{Endposition} \text{ der Punkte } z, z_1 \text{ soll } \textit{willkürlich} \\ \text{gegeben sein, jedoch der Art, dass den Bedingungen} \\ (\alpha.), (\beta.), (\gamma.) \text{ entsprochen wird.}\end{array}\right.$

Dass unter diesen Umständen die Punkte z, z_1 aus der Anfangsposition (34.) in die Endposition (35.) mittelst einer *Bewegung* gelangen können, *die den Bedingungen* $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ *entspricht*, unterliegt keinem Zweifel [vgl. die Bemerkung p. 441]. Und diese Bewegung ist es, welche im Folgenden näher untersucht werden soll.

Für die *Anfangsposition* (34.) gilt die Formel (25.):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \beta_{nh}Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\,,$$

eine Formel, die man auch so schreiben kann:

$$(36.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi Q_n(\sigma, Z)\cos h\Phi\,.\,d\Phi = \beta_{nh}Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\,;$$

denn man hat zu beachten, dass die hier allein in Betracht kommende *Anfangslage* der elastischen Curve σ repräsentirt ist durch die Pollinie λ [vgl. (34.)], und dass $Q_n(\lambda, Z)$ identisch ist mit $Q_n(Z)$.

Lässt man nun die Punkte z, z_1 aus der *Anfangsposition* in die *Endposition* übergehen, so werden die zu beiden Seiten der Gleichung (36.) stehenden Functionen von z, z_1 einander gleich *bleiben*, falls nur *jede dieser Functionen*, während der genannten Bewegung, *in stetiger Weise sich fortsetzt.* [Dies ergiebt sich aus einem bekannten *Cauchy*'schen Satz.]

Eine solche stetige Fortsetzung erfolgt [weil die Punkte z, z_1 fortdauernd den Bedingungen $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ unterworfen sein sollen] bei der Function *rechter* Hand ganz von selber. Denn $P_{nh}(z)$ ist auf der z-Ebene *allenthalben* stetig. Ferner ist $T_{nh}(z)$ überall stetig, ausser im Pole -1 [Satz (15.) p. 420], dieser Pol aber für den Punkt z nicht erreichbar [zufolge der Bedingung $(\beta.)$]. Endlich ist $Q_{nh}(z_1)$ auf der z-Ebene überall stetig, ausser in der Pollinie [Satz (27.) p. 415], diese Linie aber für den Punkt z_1 nicht erreichbar [zufolge der Bedingung $(\gamma.)$].

Aber auch die *linke* Seite der Formel (36.) wird sich in stetiger Weise fortsetzen, falls man nur über die elastische Curve σ in geeigneter Weise disponirt. Während nämlich z und z_1 sich bewegen,

wird die gerade Linie $(z'-z'', z'+z'')$ ebenfalls in Bewegung begriffen sein, dabei aber stets *fern* bleiben von den beiden Polen [vgl. (31.)]. Demgemäss kann man die Verbindungslinie der beiden Pole, nämlich die elastische Curve σ, sich so bewegen lassen, dass sie von jener geraden Linie $(z'-z'', z'+z'')$ stets durch irgend welchen Zwischenraum getrennt bleibt. Alsdann aber wird die Function

$$Q_n(\sigma, \zeta)$$

in jedem Augenblick im *Bereich* der Linie $(z'-z'', z'+z'')$ stetig sein [vgl. (32.)], also in stetiger Weise variiren nicht nur *längs* dieser Linie, sondern auch beim Uebergange derselben aus *einer* Lage in die *nächstfolgende*. Hieraus aber folgt, dass die *linke* Seite der Formel (36.), bei der in Rede stehenden Bewegung, von Augenblick zu Augenblick in stetiger Weise sich ändert.

Alles zusammengefasst, ergiebt sich also, dass die Formel (36.) von Augenblick zu Augenblick gültig bleibt, und dass sie also z. B. auch gültig sein wird zur Zeit der *Endposition* von z, z_1, σ. — Dabei ist es allerdings unangenehm, dass die Bewegung der Curve σ nicht gut von Augenblick zu Augenblick verfolgbar, mithin auch die schliessliche Endposition dieser Curve nicht gut angebbar ist. Diesen Uebelstand einstweilen bei Seite lassend, können wir das erhaltene Resultat so aussprechen:

Für die Endposition (35.) *der Punkte* z, z_1, *gilt die Formel:*

$$(37.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Q_n(\sigma, Z)\cos h\Phi \,.\, d\Phi = \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\ ,$$

wo σ *eine noch unbekannte Curve vorstellt. Jedoch weiss man, dass diese Curve die beiden Pole verbindet, und dass sie von der geraden Linie* $(z'-z'', z'+z'')$ *durch irgend welchen Zwischenraum getrennt ist.*

Aus dieser Eigenschaft der Curve σ folgt sofort [Satz (33.)], dass die in (37.) enthaltene Function $Q_n(\sigma, Z)$ entwickelbar ist nach den Cosinus der Vielfachen von Φ. Und diese Entwicklung wird, auf Grund der Formel (37.), ohne Weiteres angebbar sein, nämlich folgendermassen lauten:

$$(38.)\qquad Q_n(\sigma, Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z)\cos h\Phi\ ;$$

wofür man, mit Rücksicht auf (6.) p. 416, auch schreiben kann:

$$(39.)\quad Q_n(Z) + \mathfrak{M} \,.\, 2\pi i P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty}{}' \varepsilon_h \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\, [PT]_{nh}(z) \cos h\Phi \;,$$

wo alsdann $\mathfrak{M}$ eine *unbekannte* ganze Zahl vorstellt.

Die Formeln (38.), (39.) beziehen sich, ebenso wie (37.), auf die *Endposition* der Punkte z, z_1. Diese Endposition ist aber, nach (35.), abgesehen von den Bedingungen (α.), (β.), (γ.), eine *ganz beliebige*. Demgemäss führt die Formel (39.) zu folgendem Satz:

Versteht man unter Φ *eine reelle Variable, ferner unter* z, z_1 *irgend zwei den Bedingungen* (α.), (β.), (γ.) p. 440 *entsprechende Punkte, und setzt man:*

$$(40.)\quad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi \;,$$

so gilt die Formel:

$$(41.)\quad Q_n(Z) + \mathfrak{M} \,.\, 2\pi i P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty}{}' \varepsilon_h \beta_{nh} Q_{nh}(z_1)\, [PT]_{nh}(z) \cos h\Phi \;,$$

wo die ε_h, β_{nh}, $[PT]_{nh}$ *dieselben Bedeutungen haben, wie im Satze p.* 445.

Dabei bezeichnet das in der Formel (41.) *enthaltene* $\mathfrak{M}$ *eine unbekannte ganze Zahl, deren Werth offenbar nur abhängen kann von den übrigen in jener Formel enthaltenen Argumenten, also nur abhängen kann von* z, z_1 *und* Φ.

§ 14.

Vierter Theil: Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$. Schliessliches Resultat.

Steht irgend ein Punkt Z zu zwei anderen Punkten z und z_1 in der Beziehung:

$$Z = zz_1 \;,$$

so sind, wie man leicht erkennt, die beiden Dreiecke

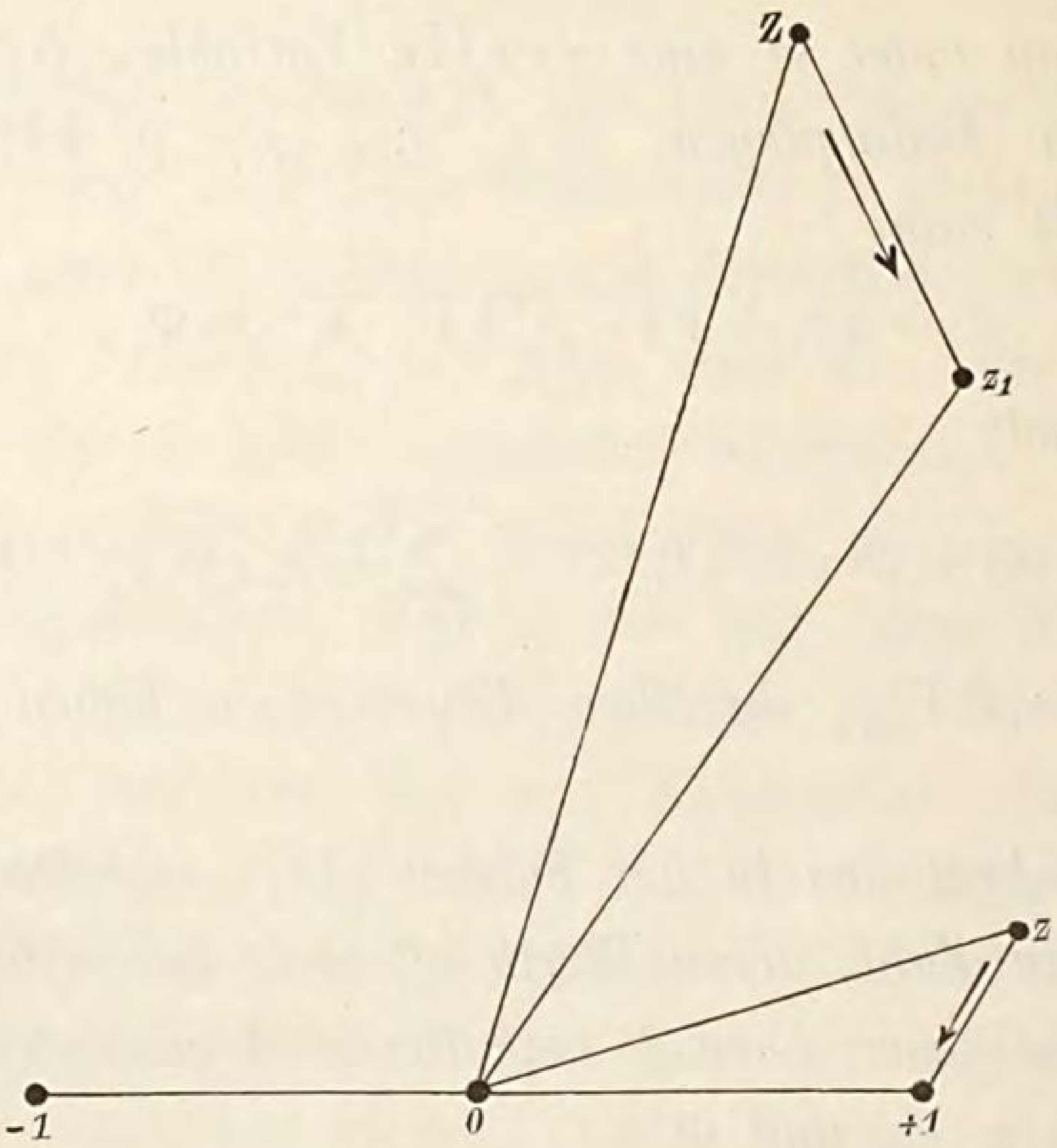
$$0\,1\,z \quad \text{und} \quad 0\,z_1 Z$$

einander *ähnlich*, vgl. die folgende Figur. Sind also z. B. z und z_1 gegeben, so hat man, um Z zu finden, nur nöthig, über der Linie $0\,z_1$ ein dem Dreieck $0\,1\,z$ *ähnliches* Dreieck zu construiren. Die dritte Ecke dieses letztern wird alsdann der gesuchte Punkt Z sein. Diese einfache Ueberlegung führt sofort zu folgendem Satz:

Setzt man

$$(\sigma.) \qquad Z = z z_1 ,$$

und lässt man, bei festgehaltenem z_1, *den Punkt* z *geradlinig nach* 1 *wandern, so wird gleichzeitig der Punkt* Z *geradlinig nach* z_1 *gehen.* Diese simultanen Bewegungen der beiden Punkte sind in der nachstehenden Figur angedeutet durch die beigesetzten Pfeile.



Dies vorangeschickt, kehren wir zurück zu unsern eigentlichen Betrachtungen. Wir haben zuletzt die Formel gefunden:

$$(42.) \quad Q_n(Z) + \mathfrak{M}\,.\,2\pi i\,P_n(Z) = \underbrace{\sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \beta_{nh}\, Q_{nh}(z_1)\,[PT]_{nh}(z) \cos h\Phi}_{f(z,\, z_1,\, \Phi)} ,$$

wo Z die Bedeutung hat:

$$(42a.) \quad Z = z z_1 + \sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-z_1^2}\,\cos\Phi = z' + z''\cos\Phi ,$$

und $\mathfrak{M}$ eine *unbekannte* ganze Zahl vorstellt.

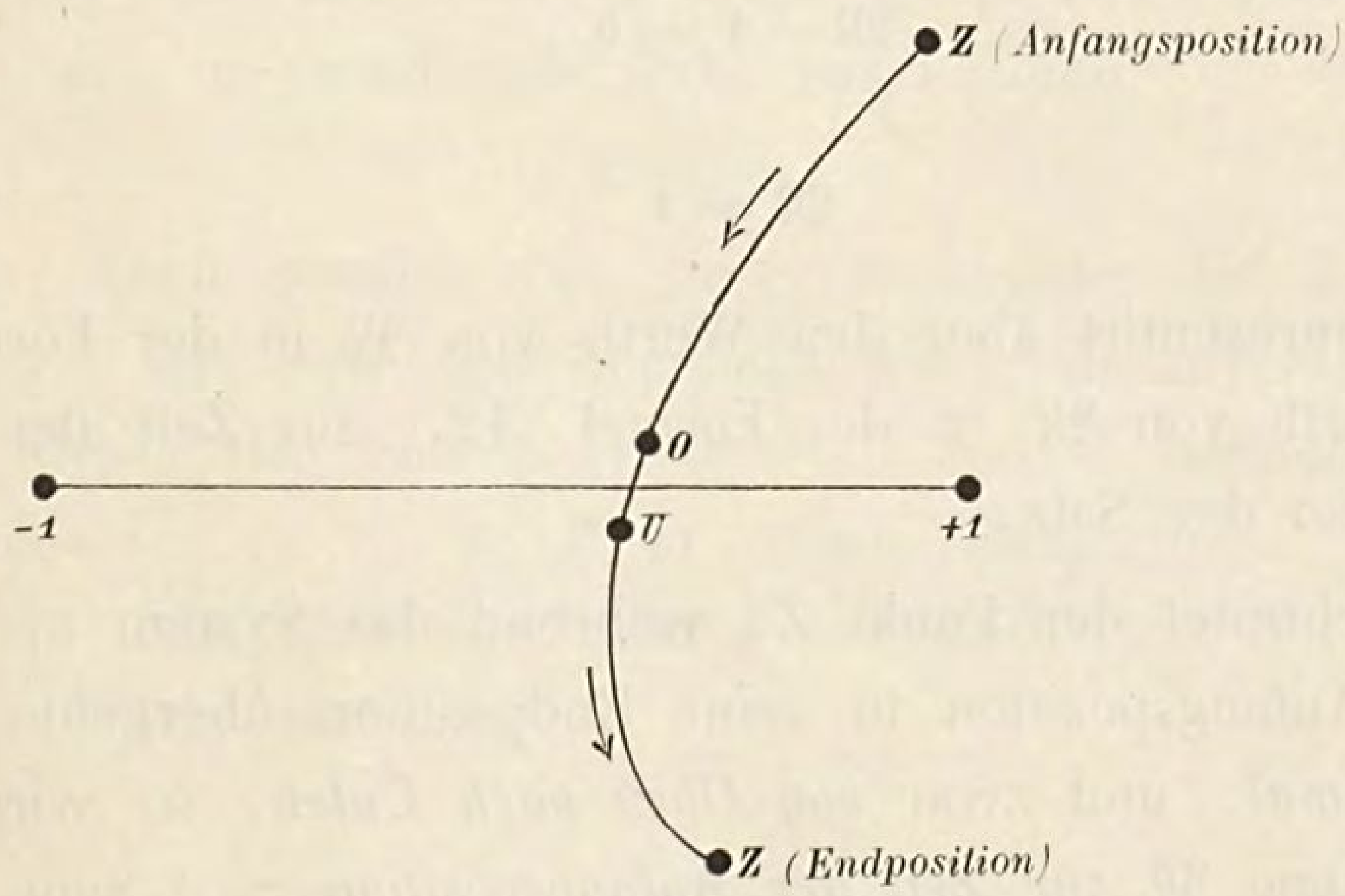
Zufolge des Satzes (41.) wird diese Formel (42.) in Kraft bleiben, wenn man die Argumente z, z_1, Φ, Z, unter Aufrechterhaltung der Bedingungen (α.), (β.), (γ.), von einer gegebenen *Anfangsposition* zu irgend welcher *Endposition* übergehen lässt. Eine derartige Bewegung wollen wir nun in der That eintreten lassen, und zwar unter *Festhaltung des Punktes* z_1. Auch mag die Endposition dahin specialisirt werden, dass bei ihr $z = 1$ und $\Phi = \frac{\pi}{2}$, mithin [vgl. (42*a*.)] $Z = z_1$ sein soll. Wir notiren die Hauptsache:

$$(43.)\quad \begin{cases} \text{Anfangsposition:} & z\,,\ z_1\,,\ \Phi\,,\ Z \\ \text{Endposition:} & 1\,,\ z_1\,,\ \frac{\pi}{2}\,,\ z_1 \end{cases}$$

Während der ganzen Bewegung soll der Punkt z_1 *festgehalten* werden.

Da z_1 *fest* bleibt, so ist die *rechte* Seite $f(z, z_1, \Phi)$ der Formel (42.) nur noch eine Function von z, Φ, und zwar eine *stetige* Function von z, Φ [wie sich solches leicht ergiebt aus der auf p. 451 über $T_{nh}(z)$ gemachten Bemerkung]. Diese *rechte* Seite der Formel (42.) wird daher, während der in Rede stehenden Bewegung, Schritt für Schritt in *stetiger* Weise sich ändern. Gleiches gilt mithin auch von der *linken* Seite. Ueberschreitet also der Punkt Z in irgen einem Augenblick die Pollinie, und wächst also in diesem Augenblick $Q_n(z)$ um $\pm 2\pi i P_n(Z)$ an, so muss in demselben Augenblicke die Zahl $\mathfrak{M}$ wachsen um ∓ 1. Dabei gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, je nachdem der Uebergang vom *obern zum untern Ufer* der Pollinie, oder *in umgekehrtem Sinne* erfolgt [vgl. (8.) p. 417].

Im Allgemeinen wird der Punkt Z, während das System z, z_1, Φ, Z aus der Anfangspositon in die Endposition übergeht, die Pollinie *irgend welche Anzahl von Malen überschreiten*. Wir wollen zuvörderst annehmen, dass nur *eine* solche Ueberschreitung stattfände, und dass diese *von oben nach unten* erfolgte, etwa von O nach U.



Bezeichnet man die Zeit der Anfangsposition mit t_A, sowie die Zeitaugenblicke, in denen der Punkt Z in O und U eintrifft, respective mit t_O und t_U, endlich die Zeit der Endposition mit t_E, so wird die zur Zeit der Anfangsposition geltende Formel (42.):

$$(t_A.)\qquad Q_n(Z) + \mathfrak{M}\,.\,2\pi i\,P_n(Z) = f(z,\, z_1,\, \Phi)\ ,$$

ohne Aenderung der Zahl $\mathfrak{M}$ fortbestehen während des Zeitraumes $t_A t_O$. Sodann aber wird im Zeitelement $t_O t_U$ die Zahl $\mathfrak{M}$ um -1 wachsen. Und die so entstehende neue Formel

$$Q_n(Z) + (\mathfrak{M} - 1)\, 2\pi i\, P_n(Z) = f(z, z_1, \Phi)$$

wird nun ihrerseits, *ohne Aenderung der Zahl* $(\mathfrak{M} - 1)$, in Kraft bleiben während des Zeitraums $t_U t_E$, und speciell im Augenblick t_E [vgl. (43.)] die Gestalt annehmen:

$$(t_E.) \quad Q_n(z_1) + (\mathfrak{M} - 1)\, 2\pi i\, P_n(z_1) = f\left(1, z_1, \frac{\pi}{2}\right).$$

Der hier auftretende Ausdruck $f\left(1, z_1, \frac{\pi}{2}\right)$ hat, wie aus (42.) ersichtlich ist, den Werth:

$$\varepsilon_0 \beta_{n0} Q_{n0}(z_1),$$

d. i. den Werth:

$$Q_n(z_1);$$

denn es ist $\varepsilon_0 = 1$, ferner $\beta_{n0} = 1$, und $Q_{n0} = Q_n$ [vgl. p. 406, ferner (21.) p. 445 und (II.) p. 407]. Somit geht die Formel $(t_E.)$ über in:

$$Q_n(z_1) + (\mathfrak{M} - 1)\, 2\pi i\, P_n(z_1) = Q_n(z_1);$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{M} - 1 = 0,$$

mithin:

$$\mathfrak{M} = 1.$$

Dieses $\mathfrak{M}$ repräsentirt aber den Werth von $\mathfrak{M}$ in der Formel $(t_A.)$, d. i. den Werth von $\mathfrak{M}$ in der Formel (42.) zur Zeit der *Anfangsposition.* Also der Satz:

Durchschreitet der Punkt Z, während das System z, z_1, Φ, Z aus seiner Anfangsposition in seine Endposition übergeht, die Pollinie nur *einmal*, und zwar *von Oben nach Unten*, so wird das in (42.) enthaltene $\mathfrak{M}$ *zur Zeit der Anfangsposition* $= 1$ sein.

In ganz ähnlicher Weise wird man, wie nun leicht zu übersehen ist, zu folgendem allgemeinern Satze gelangen:

Durchschreitet der Punkt Z, während das System z, z_1, Φ, Z aus seiner Anfangsposition in seine Endposition übergeht, die Pollinie im Ganzen $(\mathfrak{N}_O + \mathfrak{N}_U)$ Male, und zwar $\mathfrak{N}_O$ Male von Oben nach Unten,

und $\mathfrak{N}_U$ *Male von Unten nach Oben, so wird das in* (42.) *enthaltene* $\mathfrak{M}$ *zur Zeit der Anfangsposition den Werth besitzen:*

$$(44.)\qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_O - \mathfrak{N}_U\,.$$

Dabei ist, wie immer, vorausgesetzt, dass die Bedingungen (α.), (β.), (γ.) *beständig aufrecht erhalten bleiben.*

Man kann aber die Bewegung der Argumente z, z_1, Φ, Z aus der Anfangs- in die Endposition folgendermassen bewerkstelligen.

I. — Man denke sich zuvörderst das System z, z_1, Φ, Z in seiner *Anfangsposition*, und lasse nun (ohne sonst etwas zu ändern) das reelle Φ, von seinem Anfangswerthe aus, zu $\frac{\pi}{2}$ wachsen oder abnehmen*). Hierbei wird der Punkt

$$(45.)\qquad Z = z' + z''\cos\Phi = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi$$

in *geradliniger Bahn* fortlaufen, nämlich längs der Linie ($z' - z''$, $z' + z''$) hingleiten, und schliesslich in die Lage hineingelangen:

$$(46.)\qquad Z = z' = zz_1\,.$$

Bei dieser Bewegung bleiben z, z_1 ungeändert, mithin die Bedingungen (α.), (β.), (γ.) unverletzt.

II. — Sodann halte man den Punkt z_1 und den Werth $\Phi = \frac{\pi}{2}$ *fest*, lasse aber den Punkt z in *geradliniger* Bahn zum Pole 1 wandern. Hierbei wird der Punkt Z [Satz (σ.) p. 454], von seiner Position (46.) aus, in *geradliniger Bahn* zur Position

$$(47.)\qquad Z = z_1$$

übergehen. Auch werden bei dieser Bewegung die Bedingungen (α.), (β.), (γ.), wie man leicht übersieht, wiederum unverletzt bleiben.

Nach Ablauf der beiden Processe I. und II. befindet sich alsdann das System z, z_1, Φ, Z in seiner *Endposition* [vgl. (43.)]. Zugleich sieht man, dass der Punkt Z bei Ausführung der genannten Processe die *gebrochene Linie***)

$$(48.)\qquad (Z,\ z',\ z_1)$$

durchläuft, wo unter Z, z', z_1 die *Anfangspositionen* dieser drei Punkte zu verstehen sind.

*) Nämlich *wachsen* oder *abnehmen*, je nachdem der gegebene Anfangswerth von Φ *kleiner* oder *grösser* als $\frac{\pi}{2}$ ist.

**) Vgl. die Note p. 446.

Zufolge des Satzes (44.) wird daher die in (42.) enthaltene Zahl $\mathfrak{M}$ *zur Zeit der Anfangsposition* den Werth haben:

$$(49.)\qquad \mathfrak{M} = \mathfrak{N}_O - \mathfrak{N}_U ,$$

wo $\mathfrak{N}_O$ und $\mathfrak{N}_U$ angeben, wie oft jene gebrochene Linie (48.) die Pollinie von Oben nach Unten, respective von Unten nach Oben überschreitet.

Nun wird offenbar die gebrochene Linie (48.) die Pollinie entweder *gar nicht*, oder *zweimal* oder nur *einmal* überschreiten. Findet *gar keine* Ueberschreitung statt, so ist $\mathfrak{N}_O = 0$ und $\mathfrak{N}_U = 0$, mithin auch:

$$(A.)\qquad \mathfrak{M} = 0 .$$

Finden *zwei* Ueberschreitungen statt, so wird (wie die geometrische Anschauung zeigt) die eine von Oben nach Unten, die andere von Unten nach Oben erfolgen, mithin $\mathfrak{N}_O = 1$ und $\mathfrak{N}_U = 1$, und folglich

$$(B.)\qquad \mathfrak{M} = 0$$

sein.

Findet endlich nur eine *einmalige* Ueberschreitung statt, so wird, falls dieselbe *von Oben nach Unten* erfolgt, $\mathfrak{N}_O = 1$, $\mathfrak{N}_U = 0$, mithin

$$(C.)\qquad \mathfrak{M} = 1 ,$$

und andererseits, falls dieselbe *von Unten nach Oben* erfolgt, $\mathfrak{N}_O = 0$, $\mathfrak{N}_U = 1$, mithin

$$(C'.)\qquad \mathfrak{M} = -1$$

sein.

Diese Angaben (*A*.), (*B*.), (*C*.), (*C'*.) bestimmen die in der Formel (42.) enthaltene Zahl $\mathfrak{M}$ zur Zeit der *Anfangsposition*. Jene Anfangsposition war aber, abgesehen von den Bedingungen (α.), (β.), (γ.), eine *ganz beliebige*. Demgemäss gelangt man auf Grund der Formeln (42.), (*A*.), (*B*.), (*C*.), (*C*.') zu folgendem

Resultat. — *Versteht man unter* Φ *eine reelle Variable, ferner unter* z, z_1 *irgend zwei den Bedingungen* (α.), (β.), (γ.) *p.* 440 *entsprechende Punkte, und setzt man:*

$$(50.)\qquad Z = zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi ,$$

so gilt die Formel:

$$(51.)\quad Q_n(Z) + \mathfrak{M} \,.\, 2\pi i\, P_n(Z) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \varepsilon_h \beta_{nh} Q_{nh}(z_1) [PT]_{nh}(z) \cos h\Phi\ ,$$

wo ε_h, β_{nh} $[PT]_{nh}$ *dieselben Bedeutungen haben wie in den früheren Sätzen* (p. 445 und p. 453). *Es besitzen also die* ε_h *die auf p.* 406 *angegebenen Werthe. Ferner ist*

$$(52.)\quad \begin{cases} \beta_{nh} = \dfrac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)}\ , & \textit{für}\ \ h \leqq n\ , \\[2ex] \beta_{nh} = \dfrac{(-1)^{h+n}}{\Pi(h+n)\,\Pi(h-n-1)}\ , & \textit{für}\ \ h > n\ . \end{cases}$$

Und endlich ist unter $[PT]_{nh}$ *die Function* P_{nh} *oder* T_{nh} *zu verstehen, je nachdem* $h \leqq n$ *oder* $h > n$ *ist.*

Die in (51.) *enthaltene Zahl* $\mathfrak{M}$ *ist je nach Umständen* $= 0$ *oder* $= 1$ *oder* $= -1$. *Um hierüber entscheiden zu können, construire man den Punkt* $z' = zz_1$ *und die gebrochene Linie*

$$(53.)\qquad (Z,\ z',\ z_1)\ .$$

Alsdann wird $\mathfrak{M} = 0$ *sein, wenn diese gebrochene Linie die Pollinie entweder g a r n i c h t oder z w e i m a l überschreitet. Hingegen wird* $\mathfrak{M} = \pm 1$ *sein, falls die gebrochene Linie die Pollinie e i n m a l überschreitet, und zwar* $= +1$ *oder* $= -1$, *jenachdem diese einmalige Ueberschreitung v o n O b e n n a c h U n t e n oder aber v o n U n t e n n a c h O b e n erfolgt.* — Vgl. übrigens die Bemerkung auf p. 429.

Es entsteht schliesslich noch die Frage, ob die soeben zur Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$ gegebene Regel unter allen Umständen brauchbar und ausreichend sei, — ob also die Anzahl der Punkte, in denen die gebrochene Linie (53.) die Pollinie *überschreitet*, unter allen Umständen einen der Werthe 0, 1, 2 besitzt. Es wäre ja z. B. denkbar, dass die Punkte Z und z' beide *auf* die Pollinie fallen können; alsdann aber würde ein Theil der gebrochenen Linie mit der Pollinie zusammenfallen, mithin von bestimmten Ueberschreitungspunkten der einen Linie durch die andere nicht weiter die Rede sein. Oder es wäre vielleicht auch möglich, dass die gebrochene Linie unter Umständen durch einen der beiden Pole hindurchgeht. Und alsdann würde es zweifelhaft sein, ob dieses Hindurchgehen durch den Pol als eine *Ueberschreitung der Pollinie* aufzufassen sei oder nicht.

Um über derartige Schwierigkeiten hinwegzukommen, sei zuvörderst hervorgehoben, dass $Q_n(Z)$ für einen Punkt Z, der *auf* der

Pollinie liegt, *gar keinen* bestimmten Werth hat [wie solches aus dem Satze p. 447 sofort sich ergiebt]. Soll also der Werth von $Q_n(Z)$ überhaupt angebbar, respective in eine Reihe entwickelbar sein, so muss der Punkt Z von der Pollinie durch irgend welchen, wenn auch noch so kleinen Zwischenraum getrennt sein.

Beachtet man nun überdies, dass stets an den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) festzuhalten ist, und dass also der Punkt z_1 ebenfalls durch einen gewissen Zwischenraum von der Pollinie getrennt sein wird, so gelangt man zu folgendem Ausspruch:

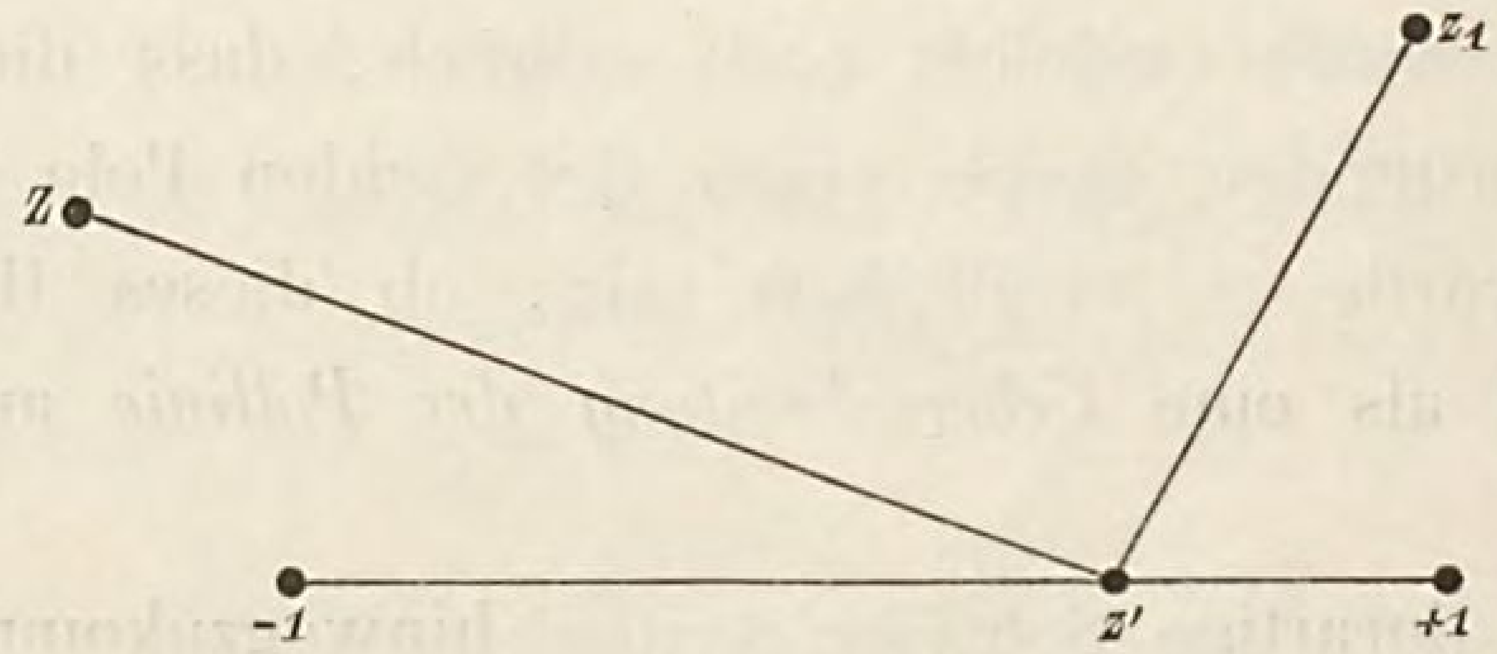
(*A*.) { Die beiden Endpunkte Z und z_1 der gebrochenen Linie (53.) liegen stets *ausserhalb* der Pollinie.

Andererseits sei daran erinnert [vgl. p. 457], dass die gebrochene Linie (53.) eine Bahn vorstellt, welche der Punkt Z durchlaufen würde, falls man den Argumenten z, z_1, Φ eine gewisse den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) entsprechende Bewegung zuertheilen wollte. Bei derartigen Bewegungen aber kann der Punkt Z [nach Satz (31.) p. 447] niemals in einen der beiden Pole hineingerathen. Folglich wird jene gebrochene Linie niemals durch einen der beiden Pole hindurchgehen. Mit andern Worten:

(*B*.) { Die beiden Endpunkte der Pollinie werden stets *ausserhalb* der gebrochenen Linie (53.) liegen.

Aus den beiden Sätzen (*A*.) und (*B*.) folgt nun aber sofort, dass die Anzahl von Malen, in denen die gebrochene Linie (53.) die Pollinie überschreitet, stets *in ganz bestimmter Weise* durch eine der Zahlen 0, 1, 2 ausdrückbar ist, — mit Ausnahme eines einzigen Falles.

Dieser Fall tritt dann ein, wenn z' *auf* der Pollinie liegt, überdies aber Z und z_1 beide auf *derselben* Seite der Pollinie, z. B. beide auf ihrer *oberen* Seite sich befinden:



Alsdann nämlich wird jene Anzahl von Malen, in denen die gebrochene Linie die Pollinie überschreitet, *nach Belieben* $= 0$ oder $= 2$ zu setzen sein, jenachdem man den Punkt z' auf dem *obern* oder *untern* Ufer der Pollinie sich vorstellt. Hierdurch entsteht, glücklicher Weise, für die Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$ keinerlei Unsicherheit. Denn diese Zahl $\mathfrak{M}$ ist ja, nach unserer Regel, *ein und dieselbe*, einerlei ob die Anzahl jener Ueberschreitungen $= 0$ oder $= 2$ ist.

Alles zusammengefasst, gelangen wir also zu folgendem Ausspruch:

Der Satz (51.) *ist selbstverständlich nur dann anwendbar, wenn* $Q_n(Z)$ *einen bestimmten Werth hat; und dies wird nur dann der Fall sein, wenn der Punkt Z von der Pollinie durch irgend welchen, wenn auch noch so kleinen Zwischenraum getrennt ist. Solches aber vorausgesetzt, wird die von uns* [bei (53.)] *zur Bestimmung der Zahl* $\mathfrak{M}$ *gegebene Regel unter allen Umständen brauchbar und ausreichend sein.*

Anhang.

Es wird gezeigt, dass sämmtliche Kugelfunctionen $P_n^{(h)}$, $Q_n^{(h)}$, $S_n^{(h)}$, $T_n^{(h)}$ darstellbar sind als Differentialquotienten einfacher trigonometrischer Ausdrücke.

Es mögen f, u, v, U, V folgende Bedeutungen haben:

$$(1.)\qquad f = \frac{1}{(\cos\omega - i\sin\omega\cos\varphi)^{n+1}},$$

$$(2.)\qquad \begin{cases} u = \int_\sigma f\cos h\varphi\,.\,d\varphi\,, \\ v = \int_\sigma f\sin h\varphi\,.\,d\varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} U = \dfrac{u}{(\sin\omega)^h}\,; \\ V = \dfrac{v}{(\sin\omega)^h}\,. \end{cases}$$

Hier soll n eine positive ganze Zahl, und $i = \sqrt{-1}$ sein; während h eine *complexe Constante* vorstellt und ω, φ *complexe Variable* sind. Dabei sind die Integrationen hinerstreckt zu denken in der φ-Ebene über irgend eine *geschlossene Curve* σ.

Wir wollen nun diese Ausdrücke u, v, U, V einer näheren Untersuchung unterwerfen, indem wir dabei als B a s i s *unserer Untersuchung den Umstand benutzen, dass der Ausdruck* f (1.) *der Differentialgleichung*

$$(3.)\quad n(n+1)f+\frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\omega\frac{\partial f}{\partial\omega}\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=0$$

Genüge leistet [vgl. (2.) p. 434].

Aus (3.) folgt durch Multiplication mit $\cos h\varphi\,.\,d\varphi$, und Integration über σ:

$$(4.)\quad n(n+1)u+\frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\omega\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)+\frac{1}{\sin^2\omega}\int_\sigma\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cos h\varphi\,.\,d\varphi=0\;,$$

wo u die in (2.) angegebene Bedeutung hat. Diese Gleichung (4.) aber kann mit Rücksicht auf die Identität:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cos h\varphi=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varphi}\cos h\varphi+hf\sin h\varphi\right)-h^2 f\cos h\varphi\;,$$

und mit Rücksicht auf die hieraus entspringende Formel:

$$\int_\sigma\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\cos h\varphi\,.\,d\varphi=-h^2\int_\sigma f\cos h\varphi\,.\,d\varphi=-h^2 u\;,\qquad [\text{vgl. } (2.)]\,,$$

auch so geschrieben werden:

$$(5.)\quad \left(n(n+1)-\frac{h^2}{\sin^2\omega}\right)u+\frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\omega\frac{\partial u}{\partial\omega}\right)=0\;,$$

oder, falls man $\cos\omega=\mu$ setzt, auch so:

$$(6.)\quad \left(n(n+1)-\frac{h^2}{1-\mu^2}\right)u-2\mu\frac{\partial u}{\partial\mu}+(1-\mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\mu^2}=0\;;$$

dies ist die Gleichung ($\mathfrak{D}_{nh}$.) p. 407.

Führt man jetzt, mittelst der in (2.) festgesetzten Relation:

$$u=(\sin\omega)^h U=(1-\mu^2)^{\frac{h}{2}}U\;,$$

U an Stelle von u ein, so gewinnt die Differentialgleichung (6.) folgende Gestalt:

$$(7.)\quad (n-h)(n+h+1)U-(2h+2)\mu\frac{\partial U}{\partial\mu}+(1-\mu^2)\frac{\partial^2 U}{\partial\mu^2}=0\;;$$

und diese Gleichung mag, ähnlich wie früher p. 407, mit ($\mathfrak{D}_n^{(h)}$.) bezeichnet werden.

Analoges ergiebt sich in analoger Weise für v und V. *Die Ausdrücke*

$$(8.)\quad \begin{cases} U = \left(\dfrac{1}{\sin\omega}\right)^h \displaystyle\int_\sigma \frac{\cos h\varphi \,.\, d\varphi}{(\cos\omega - i\sin\omega\cos\varphi)^{n+1}}\,, \\ V = \left(\dfrac{1}{\sin\omega}\right)^h \displaystyle\int_\sigma \frac{\sin h\varphi \,.\, d\varphi}{(\cos\omega - i\sin\omega\cos\varphi)^{n+1}}\,, \end{cases}$$

werden also, welche Lage und Gestalt man der geschlossenen Curve σ *in der* φ*-Ebene auch zuertheilen mag, stets Integrale sein der Differentialgleichung* ($\mathfrak{D}_n^{(h)}$.):

$$(9.)\quad (n-h)(n+h+1)F - (2h+2)\mu\frac{\partial F}{\partial\mu} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2} = 0\,.$$

Dabei bezeichnet h *eine beliebig gegebene* *c o m p l e x e C o n s t a n t e*, *hingegen* n *eine positive ganze Zahl.*

Die in (8.) angegebenen, über die Curve σ sich hinerstreckenden Integrationen sind wirklich ausführbar, falls man nur über jene Curve σ in geeigneter Weise verfügt. Wir führen zu diesem Zwecke, an Stelle von ω, zuvörderst eine *neue* Variable ein, die wir (aus besondern Gründen) einstweilen mit φ_0 bezeichnen, und die zu ω in der Beziehung stehen soll:

$$(10.)\qquad \sin\omega\sin\varphi_0 = 1\,,$$

$$(10a.)\qquad \cos\omega = \frac{i\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\,,\qquad \cos\varphi_0 = \frac{\cos\omega}{i\sin\omega}\,.$$

In solcher Weise erhalten wir für U (8.) den Ausdruck:

$$U = (\sin\varphi_0)^h(\sin\varphi_0)^{n+1}\int_\sigma \frac{\cos h\varphi\,.\,d\varphi}{(i\cos\varphi_0 - i\cos\varphi)^{n+1}}\,,$$

oder, was dasselbe ist, den Ausdruck:

$$(11.)\quad U = i^{n-1}(\sin\varphi_0)^{n+h+1}\int_\sigma \frac{\dfrac{\cos h\varphi}{\sin\varphi}\,d(\cos\varphi)}{(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^{n+1}}\,.$$

Um nun die Integration wirklich auszuführen, wollen wir *zwei* Ebenen benutzen, die φ-Ebene und die z-Ebene, und in der einen irgend zwei Punkte φ_0 und φ, in der andern ebenfalls irgend zwei Punkte z_0 und z uns vorstellen. Zwischen diesen Punkten mögen die Relationen stattfinden:

$$(\alpha.)\qquad z = \cos\varphi \quad\text{und}\quad z_0 = \cos\varphi_0\,.$$

Alsdann ist: $dz = -\sin\varphi\,.\,d\varphi$, mithin:

$$(\beta.)\qquad d\varphi = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

und folglich:

$$(\gamma.)\qquad \varphi - \varphi_0 = -\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Durch $(\alpha.)$ ist z eine *eindeutige* Function von φ. Um aber auch umgekehrt φ zu einer *eindeutigen* Function von z zu machen, bedarf es noch weiterer Festsetzungen, die sich leicht treffen lassen im Anschluss an die aus $(\alpha.)$ entsprungene Formel $(\gamma.)$. Ist nämlich, wie wir annehmen wollen, z_0 verschieden von ± 1, und denkt man sich um z_0 eine geschlossene Curve s von solcher Kleinheit herumgelegt, dass *keiner* der Punkte $z = \pm 1$ innerhalb s liegt, so wird jenes φ, auf Grund der Formel $(\gamma.)$, eine innerhalb s *eindeutige und stetige* Function von z sein, und zugleich für $z = z_0$ in φ_0 übergehen, falls man nur die Integrationscurve $z_0 \ldots z$ auf das Innere der Curve s beschränkt, und zugleich das Vorzeichen von $\sqrt{1-z^2}$ in geeigneter Weise determinirt. Solches festgesetzt, wird also φ, mithin z. B. auch

$$(\delta.)\qquad \frac{\cos h\varphi}{\sin\varphi}$$

eine innerhalb s *eindeutige und stetige* Function von z sein.

Demgemäss entspricht jetzt dem Punkte z_0 ein bestimmter Punkt φ_0 in der φ-Ebene, ebenso der Curve s eine bestimmte Curve σ in jener φ-Ebene. Denkt man sich nun die Formel (11.) in Anwendung gebracht auf diesen Punkt φ_0 und auf diese Curve σ, so kann man dieselbe, mit Rücksicht auf $(\alpha.)$, auch so schreiben:

$$(12.)\qquad U = i^{n-1}(\sin\varphi_0)^{n+h+1} \int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

wo

$$(12a.)\qquad f(z) = \frac{\cos h\varphi}{\sin\varphi}$$

eine Function von z repräsentirt, die [vgl. $(\delta.)$] innerhalb der um z_0 herumgelegten Curve s überall *eindeutig und stetig* ist. Nach bekanntem Satze ist daher:

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = 2\pi i f(z_0),$$

woraus durch n-malige Differentiation nach z_0 sich ergiebt:

$$\int_s \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{\Pi(n)} \cdot \frac{d^n f(z_0)}{dz_0{}^n} .$$

Somit folgt aus (12.):

$$(13.)\qquad U = \frac{2\pi i^n}{\Pi(n)} (\sin\varphi_0)^{n+h+1} \frac{d^n f(z_0)}{dz_0{}^n} ,$$

oder, falls man für z_0 und $f(z_0)$ ihre eigentlichen Bedeutungen [vgl. (α.) und (12a.)] substituirt:

$$(14.)\qquad U = \frac{2\pi i^n}{\Pi(n)} (\sin\varphi_0)^{n+h+1} \frac{d^n\left(\dfrac{\cos h\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)}{(d\cos\varphi_0)^n} .$$

In analoger Weise wird man für V die analoge Formel erhalten:

$$(15.)\qquad V = \frac{2\pi i^n}{\Pi(n)} (\sin\varphi_0)^{n+h+1} \frac{d^n\left(\dfrac{\sin h\varphi_0}{\sin\varphi_0}\right)}{(d\cos\varphi_0)^n} .$$

Bezeichnet man daher diese Ausdrücke U, V, nach Abscheidung ihrer constanten Factoren, mit $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, und setzt man zugleich für φ_0 den Buchstaben ψ, so gelangt man auf Grund des vorhergehenden Satzes (8.), (9.) zu folgendem Resultat:

Satz. — *Die mit der complexen Constanten h behafteten Ausdrücke:*

$$(16.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U} = (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\dfrac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) , \\ \mathfrak{V} = (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\dfrac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right) , \end{cases}$$

in denen D für $\dfrac{d}{d\cos\psi}$ steht, können, falls man

$$(17.)\qquad \sin\omega\sin\psi = 1 , \qquad \cos\omega = \frac{i\cos\psi}{\sin\psi} , \qquad \cos\psi = \frac{\cos\omega}{i\sin\omega} ,$$

und überdies

$$(18.)\qquad \cos\omega = \mu$$

setzt, nach Belieben als Functionen von ψ oder als Functionen von ω, oder auch als Functionen von μ angesehen werden.

Bequemt man sich zur letzten Auffassungsweise, so werden $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Integrale sein der Differentialgleichung ($\mathfrak{D}_n^{(h)}$.):

$$(19.)\qquad (n-h)(n+h+1)F - (2h+2)\mu\frac{\partial F}{\partial\mu} + (1-\mu^2)\frac{\partial^2 F}{\partial\mu^2} = 0 .$$

Zusatz. — *Ist insbesondere h eine positive ganze Zahl, und zugleich* $\leqq n$, *so wird das Integral* $\mathfrak{V}$ *illusorisch sein, nämlich identisch verschwinden. An seine Stelle tritt in diesem Fall, als Integral der Differentialgleichung* (19.), *folgender Ausdruck:*

$$(20.) \qquad \mathfrak{W} = (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\psi \frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) .$$

Beweis des Zusatzes. — Es sei h eine *positive ganze Zahl, die* $\leqq n$ *ist*, und ε eine *sehr kleine positive Constante*. Zufolge des so eben bewiesenen Satzes (19.) ist nun

$$(\alpha.) \qquad \mathfrak{V} = (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\frac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right)$$

ein Integral der Gleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$, und ebenso

$$(\beta.) \qquad \mathfrak{V}_1 = (\sin\psi)^{n+h+\varepsilon+1} D^n \left(\frac{\sin(h+\varepsilon)\psi}{\sin\psi}\right)$$

ein Integral der Gleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h+\varepsilon)}.)$.

Da h eine *positive ganze Zahl* sein soll, so ist bekanntlich $\frac{\sin h\psi}{\sin\psi}$ eine *ganze rationale* Function von $\cos\psi$:

$$\frac{\sin h\psi}{\sin\psi} = A(\cos\psi)^{h-1} + B(\cos\psi)^{h-3} + \ldots .$$

Hieraus aber folgt, *weil h überdies* $\leqq n$ *sein soll*, sofort:

$$(\gamma.) \qquad D^n \left(\frac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right) = 0 ,$$

also [nach $(\alpha.)$] auch:

$$\mathfrak{V} = 0 ; \qquad q. e. d. \textit{ primo loco}.$$

Was ferner $\mathfrak{V}_1$ betrifft, so ergiebt sich aus $(\beta.)$ durch Entwickelung nach Potenzen von ε, und mit Rücksicht auf $(\gamma.)$:

$$(\delta.) \quad \mathfrak{V}_1 = \varepsilon(\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\psi \frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) + \varepsilon^2 \mathfrak{F} + \varepsilon^3 \mathfrak{G} + \ldots$$

wo $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, ... Functionen von ψ sind. Da nun $\mathfrak{V}_1$ der Differentialgleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h+\varepsilon)}.)$ Genüge leistet, so gilt Gleiches auch von $\frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{V}_1$. *Der Ausdruck:*

$$(\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\psi \frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) + \varepsilon\mathfrak{F} + \varepsilon^2 \mathfrak{G} + \ldots$$

ist also ein Integral der Gleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h+\varepsilon)}.)$. Hieraus aber folgt, wenn man ε zu Null herabsinken lässt, dass der Ausdruck

$$(\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\psi \frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)$$

ein Integral der Gleichung $(\mathfrak{D}_n^{(h)}.)$ ist. — *Q. e. d. secundo loco.*

Ist, wie wir hinfort annehmen wollen, h eine *positive ganze Zahl*, so sind uns gewisse Integrale der in (19.) angegebenen Differentialgleichung ($\mathfrak{D}_n^{(h)}$.) von früher her bekannt, nämlich die Integrale:

$$(21.)\qquad P_n^{(h)}(\mu)\,,\quad Q_n^{(h)}(\mu)\,,\quad S_n^{(h)}(\mu)\,,\quad T_n^{(h)}(\mu)\,,$$

von denen indessen die beiden letzten nur dann Gültigkeit haben, wenn $h > n$ ist, [vgl. den Satz p. 420]. Durch diese schon von früher her bekannten Integrale (21.) müssen daher die in (16.), (20.) aufgeführten Integrale $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, von denen das letzte nur Gültigkeit hat für $h \leqq n$, in linearer Weise ausdrückbar sein. In solcher Weise ergeben sich für $h > n$ die Formeln:

$$(22.)\qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{U} &= A S_n^{(h)}(\mu) + A' T_n^{(h)}(\mu)\,, \\ \mathfrak{V} &= B S_n^{(h)}(\mu) + B' T_n^{(h)}(\mu)\,, \end{aligned}\right\}\quad h > n\,,$$

und andrerseits für $h \leqq n$ folgende Formeln:

$$(23.)\qquad \left.\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathsf{A} P_n^{(h)}(\mu) + \mathsf{A}' Q_n^{(h)}(\mu)\,, \\ \mathfrak{W} &= \mathsf{B} P_n^{(h)}(\mu) + \mathsf{B}' Q_n^{(h)}(\mu)\,, \end{aligned}\right\}\quad h \leqq n\,,$$

wo A, A', B, B', A, A', B, B' noch unbekannte Constanten sind.

Um diese Constanten zu bestimmen, führen wir neben φ, ω, μ noch eine *vierte* Variable η ein, indem wir setzen:

$$(24.)\qquad \eta = e^{i\psi}\,.$$

Alsdann folgt aus (17.), (18.):

$$(25.)\qquad \mu = \cos\omega = \frac{i\cos\psi}{\sin\psi} = \frac{1+\eta^2}{1-\eta^2}\,,\qquad \text{und}\qquad \sin\omega\sin\psi = 1\,.$$

Demgemäss ergeben sich folgende drei Systeme *zusammengehöriger Werthe* von ψ, η, μ:

$$(26.)\qquad \begin{cases} \psi = 0\,, \\ \eta = 1\,, \\ \mu = \infty\,, \end{cases}\qquad \begin{cases} \psi = i[\infty]\,, \\ \eta = 0\,, \\ \mu = 1\,, \end{cases}\qquad \begin{cases} \psi = -i[\infty]\,, \\ \eta = \infty\,, \\ \mu = -1\,, \end{cases}$$

wobei unter dem eingeklammerten $[\infty]$ das *positive reelle* Unendlich zu verstehen ist.

Bestimmung der Constanten A, A', B, B'.

Multiplicirt man die *erste* der Formeln (22.) mit $(1-\mu^2)^h$, und setzt man sodann μ einmal $= 1$, das andere Mal $= -1$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf p. 420, (12.), (13.):

$$[(1-\mu^2)^h \mathfrak{U}]_{\mu=1} = A \,.\, 2^h \Pi(h-1)\,,$$
$$[(1-\mu^2)^h \mathfrak{U}]_{\mu=-1} = A' . (-1)^{h+n} 2^h \Pi(h-1)\,,$$

oder, falls man für $\mathfrak{U}$ seine eigentliche Bedeutung (16.) eintreten lässt, und zugleich beachtet, dass [nach (17.), (18.)] $1-\mu^2 = (\sin\omega)^2 = \left(\frac{1}{\sin\psi}\right)^2$ ist:

$$A = \frac{1}{2^h \Pi(h-1)}\left[(\sin\psi)^{n-h+1} D^n \left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\mu=1},$$
$$A' = \frac{(-1)^{h+n}}{2^h \Pi(h-1)}\left[(\sin\psi)^{n-h+1} D^n \left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\mu=-1}.$$

Genau dieselben Formeln ergeben sich, wie man sofort übersieht, auf Grund der *zweiten* Gleichung (22.), auch für B, B', nur mit dem Unterschiede, dass in diesen Formeln $\sin h\psi$ an Stelle von $\cos h\psi$ auftritt.

Ersetzt man also die Suffixe $\mu = 1$ und $\mu = -1$ durch die damit [nach (26.)] äquivalenten Suffixe $\eta = 0$ und $\eta = \infty$, so erhält man für A, A', B, B' folgende Formeln:

$$(27.)\quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2^h \Pi(h-1)}(X)_{\eta=0}\,, & A' = \dfrac{(-1)^{h+n}}{2^h \Pi(h-1)}(X)_{\eta=\infty}\,, \\ B = \dfrac{1}{2^h \Pi(h-1)}(Y)_{\eta=0}\,, & B' = \dfrac{(-1)^{h+n}}{2^h \Pi(h-1)}(Y)_{\eta=\infty}\,, \end{cases}$$

wo X und Y die Bedeutungen haben:

$$(28.)\quad \begin{cases} X = (\sin\psi)^{n-h+1} D^n \left(\dfrac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right), \\ Y = (\sin\psi)^{n-h+1} D^n \left(\dfrac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right); \end{cases}$$

dabei dient D als Abkürzung für $\frac{d}{d\cos\psi}$.

Führt man [mittelst (24.)] η für ψ ein, so ergiebt sich:

$$(29.)\quad \begin{cases} X = \left(\dfrac{\eta-\eta^{-1}}{2i}\right)^{n-h+1} D^n \left(\dfrac{i(\eta^h+\eta^{-h})}{\eta-\eta^{-1}}\right), \\ Y = \left(\dfrac{\eta-\eta^{-1}}{2i}\right)^{n-h+1} D^n \left(\dfrac{\eta^h-\eta^{-h}}{\eta-\eta^{-1}}\right), \end{cases}$$

und gleichzeitig:

$$(30.)\quad D = \frac{2d}{d(\eta+\eta^{-1})}.$$

Aus diesen Formeln (29.), (30.) erkennt man aber leicht [nämlich mittelst der Substitution $\eta = \zeta^{-1}$], dass

$$(X)_{\eta=0} = (-1)^{n-h}(X)_{\eta=\infty} ,$$
$$(Y)_{\eta=0} = (-1)^{n-h+1}(Y)_{\eta=\infty}$$

ist. Demgemäss folgt aus (27.):

$$(31.) \qquad \begin{cases} A = A' , \\ B = -B' ; \end{cases}$$

so dass also jetzt *nur noch A' und B' zu bestimmen sind.*

Nun ist ferner zufolge (29.):

$$(X)_{\eta=\infty} = \left[\left(\frac{\eta}{2i}\right)^{n-h+1} D^n\left(\frac{i\eta^h}{\eta}\right)\right]_{\eta=\infty} ,$$
$$(Y)_{\eta=\infty} = \left[\left(\frac{\eta}{2i}\right)^{n-h+1} D^n\left(\frac{\eta^h}{\eta}\right)\right]_{\eta=\infty} ,$$

mithin:

$$(X)_{\eta=\infty} = i(Y)_{\eta=\infty} ,$$

also nach (27.):

$$(32.) \qquad A' = iB' ;$$

sodass also jetzt *nur noch A' zu bestimmen ist.*

Zur Berechnung von A' mögen die Ausdrücke

$$D = \frac{d}{d\cos\psi} = \frac{2d}{d(\eta+\eta^{-1})} = \frac{2d}{(1-\eta^{-2})d\eta} ,$$
$$(\sin\psi)^{n-h+1} = \left(\frac{\eta-\eta^{-1}}{2i}\right)^{n-h+1} = \left(\frac{\eta}{2i}(1-\eta^{-2})\right)^{n-h+1} ,$$
$$\frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = \frac{i(\eta^h+\eta^{-h})}{\eta-\eta^{-1}} = i\eta^{h-1}\frac{1+\eta^{-2h}}{1-\eta^{-2}}$$

entwickelt werden nach fallenden Potenzen von η. Man erhält in solcher Weise:

$$(\alpha.) \qquad D = 2(1-\eta^{-2}+\eta^{-4}-\eta^{-6}+-\ldots)\frac{d}{d\eta} ,$$
$$(\beta.) \qquad (\sin\psi)^{n-h+1} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-h+1}\eta^{n-h+1}(1+\mathfrak{a}\eta^{-2}+\mathfrak{b}\eta^{-4}+\ldots) ,$$
$$(\gamma.) \qquad \frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = i\eta^{h-1}+\mathfrak{A}\eta^{h-3}+\mathfrak{B}\eta^{h-5}+\ldots ,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ..., $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... *Constanten* sind, auf deren Werth es nicht weiter ankommt.

Aus (γ.) folgt mit Rücksicht auf (α.) successive:

$$D\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = i\,.\,2\,(h-1)\,\eta^{h-2} + \mathfrak{A}'\eta^{h-4} + \mathfrak{B}'\eta^{h-6} + \dots$$

$$D^2\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = i\,.\,2^2\,(h-1)(h-2)\,\eta^{h-3} + \mathfrak{A}''\eta^{h-5} + \mathfrak{B}''\eta^{h-7} + \dots$$

etc. etc.

$$(\delta.)\quad D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = i\,.\,2^n\,(h-1)(h-2)\dots(h-n)\,\eta^{h-n-1} + \mathfrak{A}^{(n)}\eta^{h-n-3} + \mathfrak{B}^{(n)}\eta^{h-n-5} + \dots\,,$$

also z. B., falls man n bis $(h-1)$ wachsen lässt:

$$(\varepsilon.)\quad D^{h-1}\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = i\,.\,2^{h-1}\,(h-1)(h-2)\dots 2\,.\,1 + \mathfrak{A}^{(h-1)}\eta^{-2} + \mathfrak{B}^{(h-1)}\eta^{-4} + \dots$$

Hieraus aber folgt durch nochmalige Ausführung der Operation D [mit Rücksichtnahme auf (α.)]:

$$(\zeta.)\quad D^h\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = 0 + \mathfrak{A}^{(h)}\eta^{-3} + \mathfrak{B}^{(h)}\eta^{-5} + \dots$$

Dabei sind sämmtliche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... *Constanten.* Uebrigens sind die beiden letzten Formeln (ε.), (ζ.) vorläufig unnöthig, und hier nur für *spätere* Zwecke notirt.

Multiplicirt man die beiden Formeln (β.), (δ.) mit einander, und setzt sodann $\eta = \infty$, so erhält man mit Rücksicht auf (28.):

$$(X)_{\eta=\infty} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-h+1} i\,.\,2^n(h-1)(h-2)\dots(h-n)\,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(X)_{\eta=\infty} = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-h}\cdot\frac{2^{h-1}\,\Pi(h-1)}{\Pi(h-n-1)}\,.$$

Somit folgt aus (27.):

$$(33.)\quad A' = i^{n-h}\frac{1}{2\,\Pi(h-n-1)} = \frac{1}{2\,i^{h-n}\,\Pi(h-n-1)}\,;$$

so dass man also durch Hinzuziehen der Formeln (31.), (32.) für die vier Constanten A, A', B, B' folgende Werthe erhält.

$$(34.)\quad \begin{cases} A = A' = \dfrac{1}{2\,i^{h-n}\,\Pi(h-n-1)}\,, \\ B = iA\,, \quad \text{und} \quad B' = -iA\,. \end{cases}$$

Bestimmung der Constanten A, A', B, B'.

Nach (23.) ist:

$$(35.)\quad \left.\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathsf{A} P_n^{(h)}(\mu) + \mathsf{A}' Q_n^{(h)}(\mu)\,, \\ \mathfrak{W} &= \mathsf{B} P_n^{(h)}(\mu) + \mathsf{B}' Q_n^{(h)}(\mu)\,, \end{aligned}\right\} \text{ für } h \leqq n\,.$$

Dividirt man die *erste* dieser beiden Formeln durch μ^{n-h}, und macht sodann $\mu = \infty$, so folgt mit Rücksicht auf (9.) p. 410 und auf (26.) p. 414:

$$\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)^{n-h} \mathfrak{U}\right]_{\mu=\infty} = \mathsf{A}\frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)\Pi(n-h)}\,,$$

oder, falls man für $\mathfrak{U}$ seinen eigentlichen Werth (16.) substituirt, und beachtet, dass [nach (25.)] $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\cos\omega} = \frac{\sin\psi}{i\cos\psi}$ ist:

$$\left[\frac{(\sin\psi)^{2n+1}}{(i\cos\psi)^{n-h}} D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\psi=0} = \mathsf{A}\frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)\Pi(n-h)}\,;$$

wo der beigefügte Suffix $\psi = 0$ äquivalent ist mit dem früheren Suffix $\mu = \infty$ [vgl. (26.)]. Aus der letzten Formel folgt sofort:

$$(36.)\quad \mathsf{A} = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-h} \cdot \frac{2^n \Pi(n)\Pi(n-h)}{\Pi(2n)}\left[(\sin\psi)^{2n+1} D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\psi=0}.$$

Und in ganz analoger Weise wird sich offenbar aus der *zweiten* Formel (35.) folgender Werth für B ergeben:

$$(37.)\quad \mathsf{B} = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-h} \cdot \frac{2^n \Pi(n)\Pi(n-h)}{\Pi(2n)}\left[(\sin\psi)^{2n+1} D^n\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\psi=0}.$$

Nun ergiebt sich durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von ψ:

$$(\alpha.)\quad D = \frac{d}{d\cos\psi} = -\frac{1}{\sin\psi}\cdot\frac{d}{d\psi} = -\left(\frac{1}{\psi} + \mathfrak{a}\psi + \mathfrak{b}\psi^3 + \dots\right)\frac{d}{d\psi}\,,$$

$$(\beta.)\quad \frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = \frac{1}{\psi} + \mathfrak{A}\psi + \mathfrak{B}\psi^3 + \dots\,,$$

$$(\gamma.)\quad \psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = 1 + \mathfrak{A}\psi^2 + \mathfrak{B}\psi^4 + \dots\,,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... *Constanten* sind. Aus (β.) folgt mit Rücksicht auf (α.):

$$D\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \frac{1}{\psi^3} + \mathfrak{A}'\frac{1}{\psi} + \mathfrak{B}'\psi + \dots$$

$$D^2\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \frac{1.3}{\psi^5} + \mathfrak{A}''\frac{1}{\psi^3} + \mathfrak{B}''\frac{1}{\psi} + \dots$$

etc. etc.

$$(\delta.)\quad D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)=\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{\psi^{2n+1}}+\mathfrak{A}^{(n)}\frac{1}{\psi^{2n-1}}+\mathfrak{B}^{(n)}\frac{1}{\psi^{2n-3}}+\ldots$$

In analoger Weise ergiebt sich andrerseits aus $(\gamma.)$ mit Rücksicht auf $(\alpha.)$:

$$(\varepsilon.)\qquad D^n\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)=\mathfrak{K}+\mathfrak{L}\psi^2+\mathfrak{M}\psi^4+\ldots\,,$$

wo die $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, ..., ebenso wie sämmtliche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... *Constanten* sind.

Substituirt man jetzt diese Werthe $(\delta.)$, $(\varepsilon.)$ respective in (36.), (37.), so ergiebt sich:

$$\mathsf{A}=\left(\frac{1}{i}\right)^{n-h}\cdot\frac{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-h)}{\Pi(2n)}\,.\,1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\,,$$

d. i.

$$(38.)\qquad \mathsf{A}=\left(\frac{1}{i}\right)^{n-h}\Pi(n-h)\,,$$

und andrerseits:

$$(39.)\qquad \mathsf{B}=0\,.$$

Um ferner A', B' zu finden, multipliciren wir die *erste* Gleichung (35.) mit $(1-\mu^2)^h$, und setzen sodann $\mu=-1$. Alsdann ergiebt sich mit Rücksicht auf p. 418, (3.):

$$[(1-\mu^2)^h\,\mathfrak{U}]_{\mu=-1}=\mathsf{A}'\,[(1-\mu^2)^h\{S_n^{(h)}(\mu)-T_n^{(h)}(\mu)\}]_{\mu=-1}\,,$$

also mit Rücksicht auf p. 413, (17.), (18.):

$$[(1-\mu^2)^h\,\mathfrak{U}]_{\mu=-1}=\mathsf{A}'\,(-1)^{h+n+1}\,2^h\,\Pi(h-1)\,,$$

oder, falls man für $\mathfrak{U}$ seinen Werth (16.) substituirt, und beachtet, dass [nach (25.)] $1-\mu^2=(\sin\omega)^2=\left(\frac{1}{\sin\psi}\right)^2$ ist:

$$(40.)\quad \mathsf{A}'=\frac{(-1)^{h+n+1}}{2^h\,\Pi(h-1)}\left[(\sin\psi)^{n-h+1}\,D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\eta=\infty}\,;$$

wobei der Suffix $\mu=-1$ ersetzt worden ist durch den mit ihm äquivalenten Suffix $\eta=\infty$ [vgl. (26.)]. In analoger Weise ergiebt sich aus der *zweiten* Formel (35.):

$$(41.)\quad \mathsf{B}'=\frac{(-1)^{h+n+1}}{2^h\,\Pi(h-1)}\left[(\sin\psi)^{n-h+1}\,D^n\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\eta=\infty}\,.$$

Nun ist nach p. 469, 470, nämlich nach den dortigen Formeln $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$ und $(\zeta.)$:

$$(\alpha.)\qquad D = 2(1 - \eta^{-2} + \eta^{-4} - \eta^{-6} + \ldots)\frac{d}{d\eta}\,,$$

$$(\beta.)\qquad (\sin\psi)^{n-h+1} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-h+1} \eta^{n-h+1}(1 + \mathfrak{a}\eta^{-2} + \mathfrak{b}\eta^{-4} + \ldots)\,,$$

$$(\gamma.)\qquad \frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = i\eta^{h-1} + \mathfrak{A}\eta^{h-3} + \mathfrak{B}\eta^{h-5} + \ldots$$

und ferner:

$$D^h\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \mathfrak{A}^{(h)}\eta^{-3} + \mathfrak{B}^{(h)}\eta^{-5} + \ldots.$$

Aus dieser letzten Formel folgt mit Rücksicht auf $(\alpha.)$:

$$D^{h+1}\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \mathfrak{A}^{(h+1)}\eta^{-4} + \mathfrak{B}^{(h+1)}\eta^{-6} + \ldots$$

$$D^{h+2}\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \mathfrak{A}^{(h+2)}\eta^{-5} + \mathfrak{B}^{(h+2)}\eta^{-7} + \ldots$$

etc. etc.

$$(\delta.)\qquad D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \mathfrak{A}^{(n)}\eta^{h-n-3} + \mathfrak{B}^{(n)}\eta^{h-n-5} + \ldots$$

Multiplicirt man aber diese Formel $(\delta.)$ mit $(\beta.)$, und setzt sodann $\eta = \infty$, so folgt:

$$\left[(\sin\psi)^{n-h+1} D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\eta=\infty} = 0\,,$$

also nach (40.) auch:

$$(42.)\qquad \mathsf{A}' = 0\,.$$

Was ferner B' betrifft, so ist nach (24.): $\eta = e^{i\psi}$, mithin $\psi = \frac{\log\eta}{i}$. Demgemäss folgt aus $(\gamma.)$:

$$\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi} = [\eta^{h-1} + \mathfrak{R}\eta^{h-3} + \mathfrak{S}\eta^{h-5} + \ldots]\log\eta\,,$$

wo die $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, ... *Constanten* sind. Hieraus ergiebt sich, falls man die Operation $D(\alpha.)$ im Ganzen h-mal hintereinander ausführt:

$$D^h\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = [\mathfrak{R}^{(h)}\eta^{-3} + \mathfrak{S}^{(h)}\eta^{-5} + \ldots]\log\eta$$
$$+ [2^h\Pi(h-1)\eta^{-1} + \mathfrak{K}^{(h)}\eta^{-3} + \mathfrak{L}^{(h)}\eta^{-5} + \ldots]\,,$$

und falls man jetzt die Operation D von Neuem $(n-h)$-mal ausführt:

$$(\varepsilon.)\qquad D^n\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) =$$
$$= \eta^{-n+h-1}\left\{\begin{array}{l}[\mathfrak{R}^{(n)}\eta^{-2} + \mathfrak{S}^{(n)}\eta^{-4} + \ldots]\log\eta \\ + \left[\frac{2^n\Pi(n-h)\Pi(h-1)}{(-1)^{n-h}} + \mathfrak{K}^{(n)}\eta^{-2} + \mathfrak{L}^{(n)}\eta^{-4} + \ldots\right]\end{array}\right\};$$

dabei sind sämmtliche $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, ... und $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, ... *Constanten.*

Multiplicirt man jetzt die Formel (ε.) mit (β.), und setzt $\eta = \infty$, so ergiebt sich:

$$\left[(\sin\psi)^{n-h+1} D^n \left(\psi \frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right)\right]_{\eta=\infty} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-h+1} \cdot \frac{2^n \Pi(n-h)\Pi(h-1)}{(-1)^{n-h}},$$

also nach (41.):

$$\mathsf{B}' = \left(\frac{1}{2i}\right)^{n-h+1} (-1)\, 2^{n-h}\Pi(n-h),$$

d. i.

$$(43.)\qquad \mathsf{B}' = \left(\frac{1}{i}\right)^{n-h-1} \frac{\Pi(n-h)}{2}.$$

Durch Zusammenstellung der Formeln (38.), (39.), (42.), (43.) ergiebt sich:

$$(44.)\qquad \begin{cases} \mathsf{A} = \dfrac{\Pi(n-h)}{i^{n-h}}, & \mathsf{A}' = 0, \\ \mathsf{B} = 0, & \mathsf{B}' = \dfrac{\Pi(n-h)}{2i^{n-h-1}}. \end{cases}$$

Schliessliches Resultat der im Anhange angestellten Untersuchungen.

Substituirt man in den Formeln (22.), (23.) für $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ihre eigentlichen Bedeutungen (16.), (20), und zugleich für A, A', B, B', A, A', B, B' die in (34.), (44.) gefundenen Werthe, so gelangt man zu folgendem Satz:

Satz. — *Sind die Variablen ψ und ω mit einander verbunden durch die Relationen:*

$$(\text{I.})\qquad \sin\omega\sin\psi = 1, \qquad \cos\omega = \frac{i\cos\psi}{\sin\psi}, \qquad \cos\psi = \frac{\cos\omega}{i\sin\omega},$$

und wird überdies $\cos\omega = \mu$ gesetzt, so gelten, falls $h > n$ ist, die Formeln:

$$(\text{II.})\qquad \begin{cases} (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\dfrac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \dfrac{S_n^{(h)}(\mu) + T_n^{(h)}(\mu)}{2i^{h-n}\Pi(h-n-1)}, \\ (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\dfrac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right) = \dfrac{i[S_n^{(h)}(\mu) - T_n^{(h)}(\mu)]}{2i^{h-n}\Pi(h-n-1)}, \end{cases} \qquad (h>n),$$

von denen die letzte [vgl. p. 418 (5.)] *auch so geschrieben werden kann:*

$$(\text{III.})\qquad (\sin\psi)^{n+h+1} D^n \left(\frac{\sin h\psi}{\sin\psi}\right) = \frac{i\, Q_n^{(h)}(\mu)}{2i^{h-n}\Pi(h-n-1)}, \qquad (h>n).$$

Und andererseits gelten alsdann für den Fall, dass $h \leqq n$ ist, folgende Formeln:

$$
\text{(IV.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&(\sin\psi)^{n+h+1} D^n\left(\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \frac{\Pi(n-h)}{i^{n-h}} P_n^{(h)}(\mu) \, , \\
&(\sin\psi)^{n+h+1} D^n\left(\psi\frac{\cos h\psi}{\sin\psi}\right) = \frac{\Pi(n-h)}{i^{n-h}} \cdot \frac{i}{2} Q_n^{(h)}(\mu) \, .
\end{aligned}
\right. \qquad (h \leqq n) \, ,
$$

Dabei steht D überall zur Abkürzung für $\frac{d}{d\cos\psi}$, mithin D^n zur Abkürzung für $\frac{d^n}{(d\cos\psi)^n}$.

Diese Formeln zeigen, dass die Functionen $S_n^{(h)}$, $T_n^{(h)}$, $h > n$, und überdies sämmtliche Functionen $P_n^{(h)}$, $Q_n^{(h)}$ darstellbar sind als Differentialquotienten einfacher trigonometrischer Ausdrücke.

Dabei sei noch bemerkt, dass diese Formeln vom Verfasser *sorgfältig controlirt* worden sind, indem derselbe, auf Grund dieser Formeln, die in Rede stehenden Functionen für $h = 0, 1, 2$ und $n = 0, 1, 2, 3$ wirklich berechnet hat, wobei sich zwischen den so erhaltenen Resultaten und den wahren Werthen der genannten Functionen volle Uebereinstimmung ergab.

Inhaltsübersicht.

		Seite
Einleitung		403
§ 1.	Zur vorläufigen Orientirung über die Functionen $P_n(z)$, $Q_n(z)$, $S_n(z)$, $T_n(z)$	407
§ 2.	Bemerkungen über die Functionen $P_n(z)$, namentlich über ihre Werthe für $z = \pm 1$ und für $z = \infty$	408
§ 3.	Bemerkungen über die Functionen $Q_n(z)$, namentlich über ihre Werthe für $z = \pm 1$ und für $z = \infty$	410
§ 4.	Ueber die aus $Q_n(z)$ durch Abänderung der Integrationscurve entstehende Function $Q_n(\sigma, z)$	415
§ 5.	*Vollständige Integration der Differentialgleichung der Kugelfunctionen*	418
§ 6.	Die Functionen $S_n^{(h)}(z)$, $T_n^{(h)}(z)$ und $S_{nh}(z)$, $T_{nh}(z)$ für $h > n$. Ihre Werthe für $z = \pm 1$ und für $z = \infty$	420
§ 7.	Zusammenstellung derjenigen Werthe, welche die Functionen $P_{nh}(z)$, $Q_{nh}(z)$, $S_{nh}(z)$, $T_{nh}(z)$ annehmen für ein unendlich grosses z	425
§ 8.	Ueber die Entwicklung von $(z + i\sqrt{1 - z^2}\cos\Phi)^n$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ	426
§ 9.	*Ueber die Entwicklung von* $P_n(zz_1 + \sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - z_1^2}\cos\Phi)$ *nach den Cosinus der Vielfachen von* Φ	430
§ 10.	Entwicklung des Ausdrucks $\dfrac{1}{(z + i\sqrt{1 - z^2}\cos\Phi)^{n+1}}$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ	434
§ 11.	*Ueber die Entwicklung von* $Q_n(zz_1 + \sqrt{1 - z^2}\sqrt{1 - z_1^2}\cos\Phi)$ *nach den Cosinus der Vielfachen von* Φ. Erster Theil: Geometrische Betrachtungen	438
§ 12.	Zweiter Theil: Die Entwicklung für *reelle* Werthe von z und z_1	441
§ 13.	Dritter Theil: Die Entwicklung für *complexe* Werthe von z und z_1	445
§ 14.	Vierter Theil: Bestimmung der Zahl $\mathfrak{M}$. Schliessliches Resultat	453
Anhang:	Es wird gezeigt, dass sämmtliche Kugelfunctionen $P_n^{(h)}$, $Q_n^{(h)}$, $S_n^{(h)}$, $T_n^{(h)}$ darstellbar sind als Differentialquotienten einfacher trigonometrischer Ausdrücke	461

Verbesserung.

In der dritten Zeile auf Seite 424 ist $(-1)^3$ statt $(-3)^3$ zu setzen.

ZUR GESCHICHTE

DES MENSCHLICHEN RÜCKENMARKES

UND

DER NERVENWURZELN

VON

WILHELM HIS,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VI.

Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1886.

Vom Verfasser übergeben den 3. August 1886.
Der Abdruck vollendet den 4. October 1886.

ZUR GESCHICHTE

DES MENSCHLICHEN RÜCKENMARKES

UND

DER NERVENWURZELN.

VON

WILHELM HIS.

MIT 1 TAFEL.

Zu verschiedenen Malen habe ich Gelegenheit gehabt, über die erste Entstehung der Nervenwurzeln und der weissen Substanz mich auszusprechen, zuletzt in einem vor drei Jahren erschienenen Aufsatze[1]. Die Klärung der allgemeinen Vorstellungen scheint auf diesem Gebiete langsam vor sich gehen zu sollen. Immerhin ist nun auch Kölliker nach seinen am Schwanz der Froschlarve gemachten Beobachtungen zur Ueberzeugung von einem peripherischen Auswachsen der Nervenfasern gelangt[2]. Vor kaum Jahresfrist hatte sich derselbe der Hensen'schen Hypothese zugewendet[3] und die auffällige Bemerkung gemacht, die Annahme, dass Nerven als Bündel feinster Axencylinder mit freien Enden in die Peripherie wachsen, stütze sich, genau besehen, auf keine directe Beobachtung. Ich hatte geglaubt, über diesen Punkt keine Zweifel mehr gelassen zu haben und komme nunmehr um so lieber auf die Sache zurück, als mir die letzte Zeit neues und vorzügliches Material zugeführt hat. Es gehören dahin insbesondere zwei vortrefflich erhaltene menschliche Embryonen, deren einen von 6,9 mm N. Länge ich Herrn Dr. Brennecke in Sudenburg-Magdeburg verdanke, während mir der andere 10,9 mm lange von Herrn Prof. Dohrn in Neapel geschenkt worden ist. Die beiden, als Br_3 und als N bezeichneten Embryonen sind nach vorangegangener Hämatoxylin- und Eosinfärbung in Scheiben von je 10 μ, bez. für die frontal getroffene Schlussstrecke von Br_3 in solche von

[1]) Monogr. über die Hühnchenentw. 1868. pg. 106 u. ff. und 168 u. ff. und Unsere Körperform pg. 95 u. 117. Anatomie menschl. Embryonen I. S. 40. Archiv f. Anat. Physiol. Anat. Abth. 1880. S. 474 und 1883. S. 163 (in den folgenden Citaten blos als »Archiv« bezeichnet).

[2]) Kölliker, Histol. Studien an Batrachierlarven. Zeitschr. f. wissensch. Zool. Bd. XLIII, pg. 1 u. ff.

[3]) Derselbe, Die Bedeutung der Zellenkerne für die Vorgänge der Vererbung. Ebendas. Bd. XLII, pg. 37 u. ff.

5 μ, zerlegt worden. Mit den in früheren Arbeiten behandelten Embryonen *Lg* und *R* bilden die neuen Stücke eine Reihe, welche für die Anfangsentwickelung entscheidende Anschauungen gewährt. Dazu kommen ergänzend hinzu die Embryonen *Bl*, *A* und *B* und für die Zeit des zweiten Monats S_1, *Sch*, S_2, *Zw* und *Lo*. Hievon sind *A* und *B* etwas vorgerückter als Br_3, S_1 etwas weiter als *N*. Die dicken Schnitte meiner älteren Präparate beanspruchen als Uebersichtspräparate auch neben den feinen neueren Schnitten immer noch ihren Werth, da bei ihnen die Massengruppirung deutlicher denn bei diesen hervortritt; auch zeichnen sich bei den feucht geschnittenen Präparaten die äusseren Formen entschieden schärfer, als bei den der Paraffineinschmelzung unterworfenen.

Bei *Lg* (215 mm lang) ist das Rückenmark erst theilweise geschlossen, die Anlage rein zellig, von Nervenwurzeln und von Längssträngen keine Spur vorhanden.

Bei *R* (55 mm lang) ist das Rückenmark durchweg geschlossen, die ersten Anlagen von einem Markgerüst und von motorischen Wurzelfasern treten auf, dagegen fehlen noch sensible Fasern, sowie Längs- und Commissurenfasern.

Bei Br_3 sind die ersten sensiblen Fasern ins Mark eingedrungen, die vordere Commissur und die Längsstränge beginnen sich zu bilden, das Rückenmark hat noch keine Blutgefässe und die peripherischen Nerven reichen nur bis in die Wurzel der Extremitäten hinein.

Bei *N* sind alle Hauptanlagen vorhanden; die Zahl der motorischen und der sensiblen Fasern, die Ausbildung der Längsstränge und diejenige der vorderen Commissur hat erheblich zugenommen, und in das Rückenmark sind nunmehr auch Blutgefässe eingetreten; die Nervenstämme sind bis in die Extremitäten vorgedrungen, ohne indessen schon deren Peripherie erreicht zu haben.

Nach ihrem ungefähren Alter und nach ihrer Länge ordnen sich die in diesem Aufsatz benutzten Embryonen also:

Lg	2.15 mm	ca. 2 Wochen	*N*	10.9 mm	ca. 4½ Wochen
Bl	4.25 -	- 3—3½ -	S_1	12.5 -	
R	5.5 -		*Sch*	13.8 -	- 5 -
Br_3	6.9 -	- 4 -	S_2	15.5 -	- 5½ -
B	7 -		*Zw*	18.5 -	- 7½ -
A	7.5 -		*Lo*	24 -	- 8½ -

Als Material für die histologische Entwicklung des Nervensystems sind menschliche Embryonen erheblich günstiger denn irgend welche von den thierischen Embryonen, die ich bis jetzt zu untersuchen Gelegenheit gehabt habe.

Die primäre Gruppirung der Zellen des Rückenmarkes bis zum Beginn der fünften Woche.

Schon an der ungeschlossenen Medullarplatte (*Lg*) sind die Zellen vorwiegend, obwohl nicht ausschliesslich, radiär gestellt, und zwar zeigt sich eine büschelförmige Gruppirung der Art, dass kleine Complexe radiär angeordneter Zellen dicht zusammengedrängt sind und von benachbarten Complexen durch rundliche oder durch ovale Zwischenräume getrennt bleiben; dabei findet sich auch vielfach eine pinselförmige Divergenz der demselben Büschel angehörigen Zellen; die übrig bleibenden Lücken sind stellenweise frei, stellenweise sind sie von anders gestalteten Zellen eingenommen. Eine derartige büschelförmige Gruppirung radiär gestellter Zellen mit spaltförmigen Lücken kehrt an der Innenplatte des Medullarrohres noch in späteren Perioden wieder und giebt derselben ein eigenthümlich durchbrochenes Ansehen (Fig. 6 und 7, S. 497 u. 500).

Bevor noch das Medullarrohr geschlossen ist, tritt ein Gegensatz ein in der Lagerungsweise der inneren und äusseren Zellen. Jene sind dichter zusammengerückt denn letztere, und sie erscheinen nun als die vorwiegenden Vertreter der radiär angeordneten Formen. Das Verhältniss findet seine naturgemässe Erklärung in der Biegung der Platte, insofern hierdurch die inneren Schichten eine Zusammendrängung, die äusseren eine Auflockerung erfahren müssen. Aus derselben Ursache erklärt es sich, dass von den der Medianzone angehörigen Zellen die äusseren zur Seite rücken, derart, dass der ventrale Zusammenhang der beiden Seitenhälften nur noch durch die Zellen der Innenplatte hergestellt erscheint[1]).

Mit zunehmender Zahl der Zellen nimmt nicht allein die Dichtigkeit ihrer Lagerung zu, sondern es macht sich auch hinsichtlich der Axenstellung eine strengere Gesetzmässigkeit geltend. Die grosse Mehrzahl der Kerne ist von ovaler Gestalt und so orientirt, dass der

[1]) Archiv 1883, p. 165.

lange Durchmesser eine radiäre Stellung einnimmt. Nur die äusserste Lage derselben zeigt abweichende Richtungen, schräg und quer zu derjenigen der nach Innen liegenden. Daneben enthält sie, besonders in ihrem dorsalen Abschnitte auch solche Kerne, die auf dem Querschnitte kreisrund erscheinen. Dieselben gehören, wie Längsschnitte zeigen, solchen Zellen an, welche mit ihrer Hauptaxe longitudinal orientirt sind.

Noch ist bei Embryo *R* die räumliche Trennung äusserer und innerer Zellenlagen kaum andeutungsweise ausgesprochen, dagegen ist dieselbe bei Embryo Br_3 deutlich eingeleitet. Jederseits erscheint ein äusserer Streifen abweichend gelagerter Zellen von der compacten Hauptmasse mehr oder minder scharf geschieden, als ob er davon abgesprengt worden wäre. Diesen abgesprengten Streifen bezeichne ich als Mantelschicht; derselbe erreicht die Mittelebene des Markes weder auf dessen dorsaler noch auf seiner ventralen Seite. Vorn sowohl als hinten reichen die Zellen der Innenplatte bis zur Oberfläche des Markes. Die Mächtigkeit der Mantelschicht ist in verschiedenen Tiefen eine verschiedene. In ihrem hinteren Drittel ist die Schicht 2 bis 3 Zellen breit; dann folgt eine Strecke, innerhalb deren nur noch ein bis zwei Zellen neben einander liegen und vorn verdickt sich die Schicht so, dass sie mehr als die halbe Breite der Medullarplatte einnimmt und 6 bis 8 Zellen neben einander fasst. Der aufgetriebene vordere Theil der Mantelschicht repräsentirt die bekannte Anlage der motorischen Vordersäulen, ihr hinterer Theil geht späterhin in die Hintersäulen der grauen Substanz über und das schmale Schaltstück in den Hals der Hinterhörner.

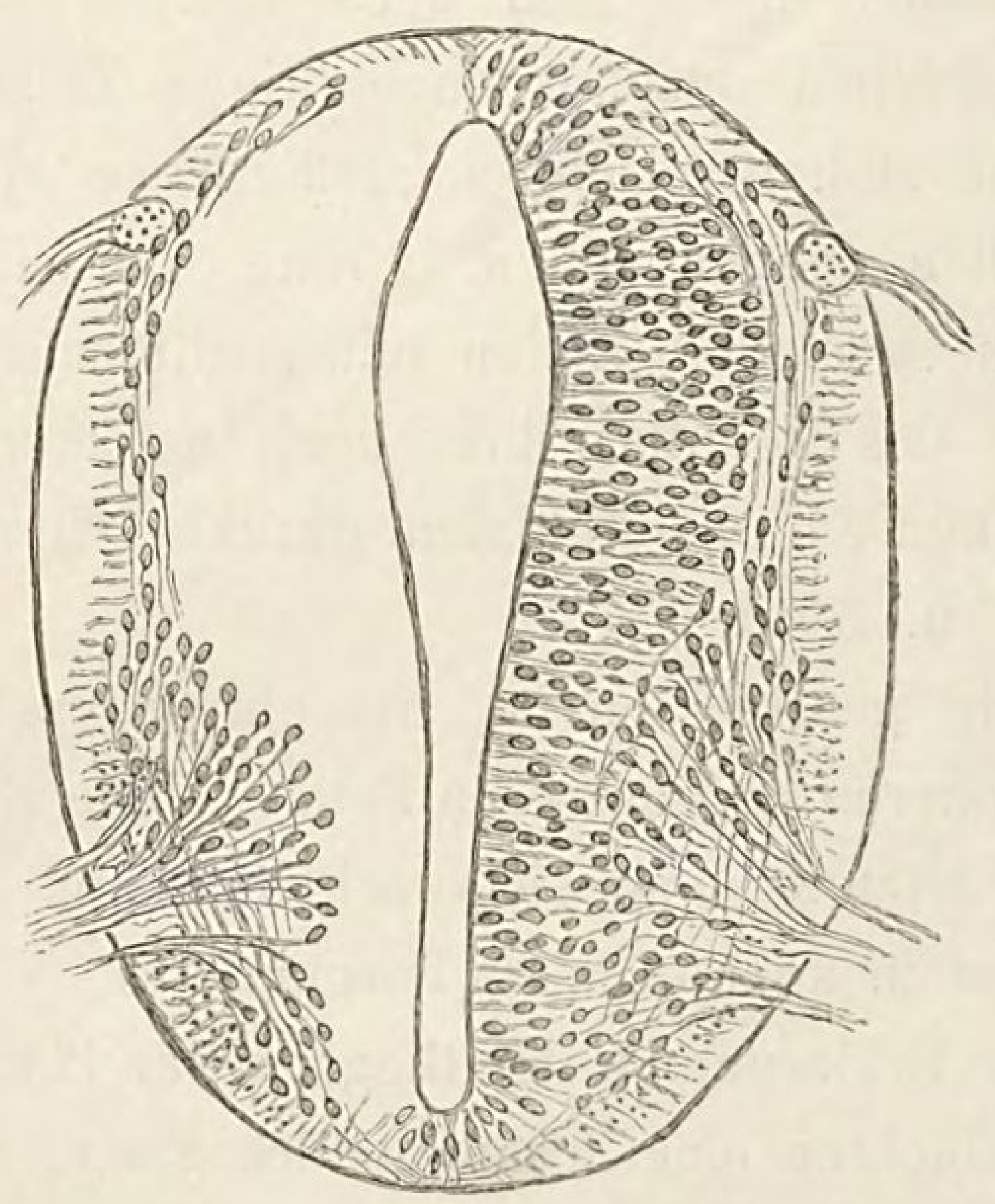


Fig. 1. Durchschnitt durch das Rückenmark von Embryo Br_3. Links ist nur die Mantelschicht dargestellt. (Zu vergl. Fig. 1 der Tafel.)

Innerhalb der motorischen Vordersäulen sind die Zellen nicht gleichmässig vertheilt, sondern stellenweise dichter, stellenweise mehr auseinanderliegend. Im Allgemeinen lassen sich drei Hauptgruppen motorischer Zellen unterscheiden, welche theilweise durch austretende Wurzelbündel von einander getrennt sind. Diese Gruppen sind: eine ventrale, eine dorsale und eine mittlere, von denen die letztere die mächtigste ist. Die Kerne der Zellen sind vorwiegend in der Richtung der convergirend austretenden Wurzeln gestellt.

Die compact gefügte Innenplatte bewahrt ihre grösste Mächtigkeit (bis zu 8 Zellen) in ihrer dorsalen Hälfte, sie verjüngt sich innerhalb der motorischen Säulen zu etwa vier Zellenlagen, und am dünnsten ist sie im dorsalen und im ventralen Verbindungsstück der beiden Markhälften. Ich werde diese Verbindungsstücke in der nachfolgenden Beschreibung als Deckplatte und als Bodenplatte des Centralkanales bezeichnen.

Bildung eines Markgerüstes (Myelospongium oder Neuroglia).

Schon auf der jugendlichen Stufe von *Lg* entsenden die Rückenmarkszellen, wie ich anderweitig gezeigt habe, Ausläufer, welche zum Theil unter einander in Verbindung treten. Ob diese Ausläufer bleibend, oder ob sie noch amöboid retractil sind, lasse ich unentschieden. Jedenfalls aber entwickeln sich von den Stufen von *Bl* und von *R*, d. h. vom Beginn der vierten Woche ab, die Anfänge jenes Gerüstes, das späterhin zum Träger der Nervenfasern wird und das man als Neuroglia zu bezeichnen pflegt. Die Neuroglia ist, wie wir später zeigen werden, keine einheitliche Bildung, und insofern ist es vielleicht besser, für das primär auftretende Gerüst einen besondern Namen zu wählen. Die Bezeichnung einer Markspongiosa hat schon Schwalbe gebraucht und ich nehme dieselbe auf. Als Ausgangspunkt des Markgerüstes erscheinen von Zellkörpern ausgehende radiär gestellte Verlängerungen, deren wir innere und äussere unterscheiden können. Von den dem Centralkanal näher liegenden Zellen erstrecken sich ungetheilte und relativ breite Fortsätze bis zur Grenzfläche hin, und sie bilden hier, indem sie unter einander zusammentreffen, eine

hautartige Schicht, die Membrana limitans interna. Möglicherweise entwickeln sich schon ziemlich früh Wimpern, ich finde an meinen Durchschnitten vielfach einen krümmligen Saum, der viel-

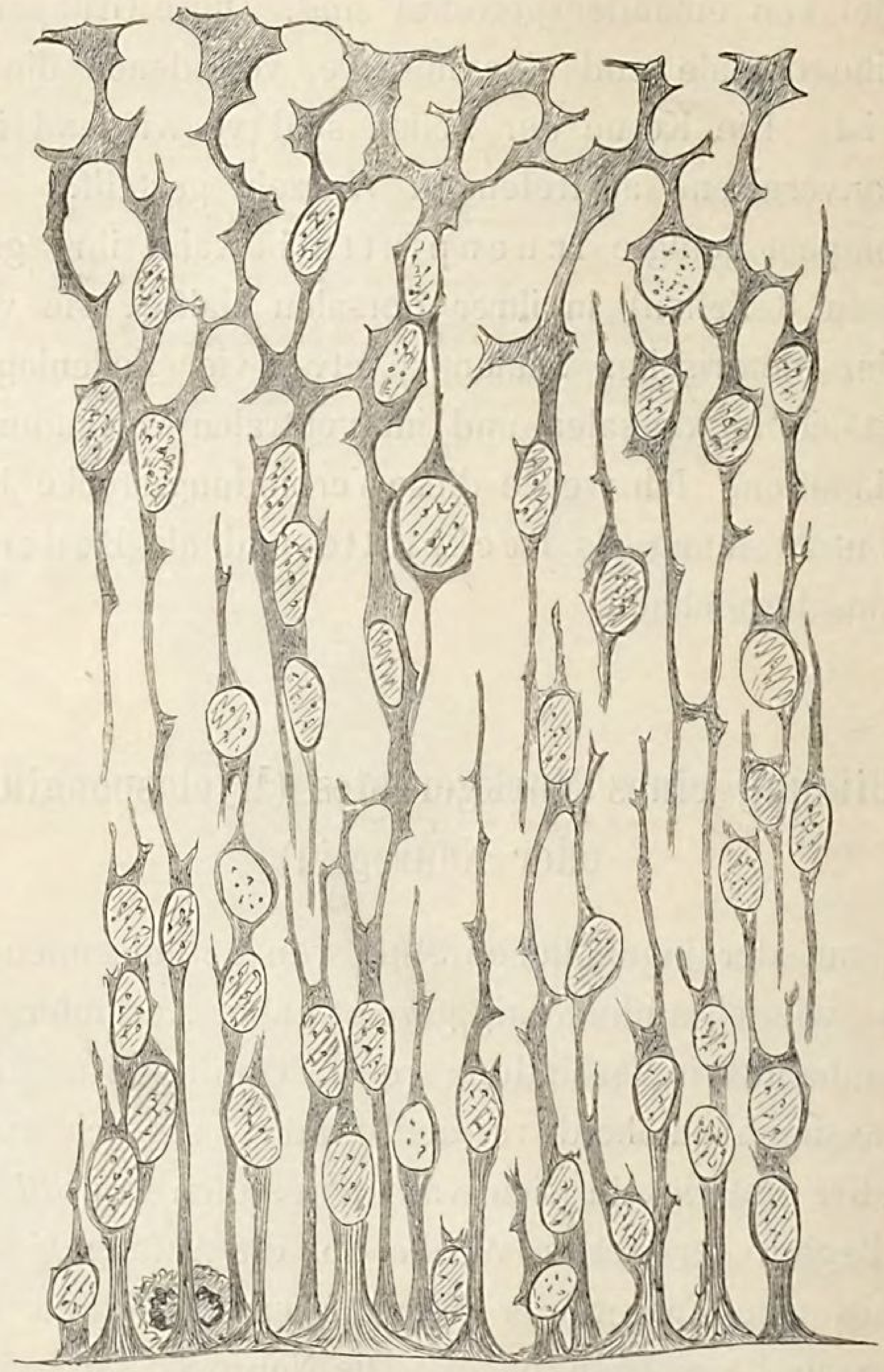


Fig. 2. Gerüst aus der dorsalen Rückenmarkshälfte von Embryo *Bl* (gez. mit System Leitz $^1/_{20}$). Vergr. c. 1100.

leicht als verunstalteter Wimpersaum deutbar ist. Kittpräparate sind indessen für derartige Entscheidungen wenig günstig. Manche von den inneren Zellfortsätzen sind nur kurz, andere etwas länger, jenachdem die zugehörigen Kerne in kleinerem oder grösserem Abstande von der inneren Markfläche stehen. Mit starken Systemen untersucht zeigen sie alle eine deutlich ausgeprägte fibrilläre Streifung.

Das äussere System von Zellfortsätzen zeigt eine grössere Mannigfaltigkeit des Verhaltens. Manche von den gerüstbildenden Zellen entsenden einfache Ausläufer, welche weiterhin gablig sich spalten, andere Zellen sind dreistrahlig und geben nach derselben Hauptrichtung zwei Ausläufer ab. Die Ausläufer sind stellenweise blattartig verbreitert und sie stehen unter einander in vielfachen Verbindungen. Die äusseren Enden derselben überragen das Kerngebiet und bilden eine dünne Belegschicht, als Vorstufe einer weissen Rückenmarkssubstanz. Im dorsalen Markabschnitte erreichen die radiären Ausläufer die Wand des umgebenden Kanales, die M. limitans meningea und sie schliessen sich zu einer eigentlichen Grenzhaut, einer M. limitans medullaris zusammen. In den vorderen zwei Markdritteln laufen dagegen die Enden frei aus und bleiben von der limitans meningea durch einen Spaltraum geschieden. Die Breite der aus Radiärfasern gebildeten kernfreien Belegschicht beträgt bei Embryo *R* an den breitesten Stellen 10—12 μ. Auf dem Querschnitt gesehen, ist die Faserung eine vorwiegend frontale, die äussersten Enden der Fasern sind hinten leicht ventralwärts, vorn leicht dorsalwärts umgebogen, für die innern Zellenfortsätze gilt das Umgekehrte; es beschreiben somit sowohl die vorderen als die hinteren Fasersysteme flache Bogen[1]).

Die Frontal- und die Querschnitte vom Embryo Br_3 geben auch ihrerseits vorzügliche Bilder über das Markgerüst, auch da erscheinen die inneren Verlängerungen der gerüstbildenden Zellen breit, ungetheilt und fibrillär gestreift, während das Kaliber der äusseren Fortsätze wechselt, stellenweise verdünnt, stellenweise blattartig verbreitert ist. Auch da kehren die gabligen Theilungen der Fortsätze und ihre stellenweisen Verbindungen wieder. Als ein vielfach verzweigtes Gerüst mit verschieden gestalteten Lücken überragt die Belegschicht die Zone der kernhaltigen Zellenleiber. Einzelne Theile des Gerüstes sind zu der Zeit von Nervenfasern bereits durchsetzt, andere dagegen sind noch völlig frei von eingelagerten Fasern.

Auf späteren Entwicklungsstufen nimmt das die Kernzone überragende Markgerüst an Breite erheblich zu. Dabei erhalten sich aber auch in den peripheren Abschnitten desselben radiäre Hauptzüge von

[1]) Archiv 1883. Taf. V. Fig. 3 bis 5.

Fasern. In bestimmten Abständen von einander stehend, verleihen sie der weissen Masse ein blättriges Gefüge und aus ihrer Richtung sind Rückschlüsse über die eingetretene Verschiebung der Massen zu ziehen (Fig. 6 bis 10, S. 497—505).

Die Bildung des Markgerüstes geht derjenigen von Nervenfasersträngen zeitlich voraus. Letztere entwickeln sich in die von jenem freigelassenen Zwischenräume herein.

Das der weissen Substanz angehörige Markgerüst ist noch bei dem Embryo *Zw*, d. h. gegen Schluss des zweiten Monats, abgesehen von Blutgefässen, frei von kernhaltigen Zellenleibern. Bei *Lo* sind sparsame Zellen in ihm zerstreut und im Verlaufe des dritten Monats treten solche etwas reichlicher auf. Von den Zellen der grauen Substanz können in der Zeit diese Zellen nicht mehr abgeleitet werden, man kann sie nur als Abkömmlinge von Wanderzellen deuten, welche von den Blutgefässen aus, oder doch mit diesen in das Mark gelangt sind und die sich hier ausgebreitet haben. Die in neuester Zeit von Ranvier und von Gierke[1]) wieder eingehend beschriebenen Deiters-schen Pinselzellen können, wenigstens insoweit sie der weissen Substanz angehören, unmöglich mit den gerüstbildenden Zellen der ectodermalen Markanlage identificirt werden, sie sind meines Erachtens Bindegewebszellen, welche dem primären Gerüst angelagert sind. In Betreff der in der grauen Substanz auftretenden Zellen wird es noch besonderer Untersuchung bedürfen, um zu entscheiden, welche der primären und welche der secundären Anlage angehören.

Die vorderen Wurzelfasern, die Bogenschicht und die vordere Commissur.

Die ersten im Mark auftretenden unzweifelhaften Nervenfasern sind vordere Wurzelfasern. Wie ich dies in meinem früheren Aufsatze[2]) beschrieben habe, so sind bei Embryo *R* die Wurzeln als kleine Büschel kernloser Fäden angelegt und sie lassen sich in der

[1]) Ranvier, Laboratoire d'Histologie du Collège de France, Travaux de l'année 1883. p. 101. Gierke in: Archiv für mikr. Anat. Bd. 25. S. 441. Besonders bemerkenswerth sind die Figuren 11 bis 15 von Taf. XXI.

[2]) Archiv 1883. S. 183.

vorderen Markhälfte zu Zellen zurückverfolgen, welche im Allgemeinen nahe bei den Austrittsstellen stehen und deren Kerne gegen die letzteren hin convergiren. Ein ähnliches Bild gewähren auch die Schnitte von Br_3, nur ist hier die Zahl der austretenden Fasern und demgemäss der Bezirk der zugehörigen Zellen entschieden grösser geworden. Besonders ist zu constatiren, dass viele von den austretenden Wurzelfasern aus tieferen Schichten stammen. Kleine Bündelchen derselben drängen sich zwischen den äusseren Zellengruppen hindurch, um die Oberfläche zu erreichen, allwo ihrer jeweilen wieder mehrere nach einer gemeinsamen Austrittsstelle hin convergiren.

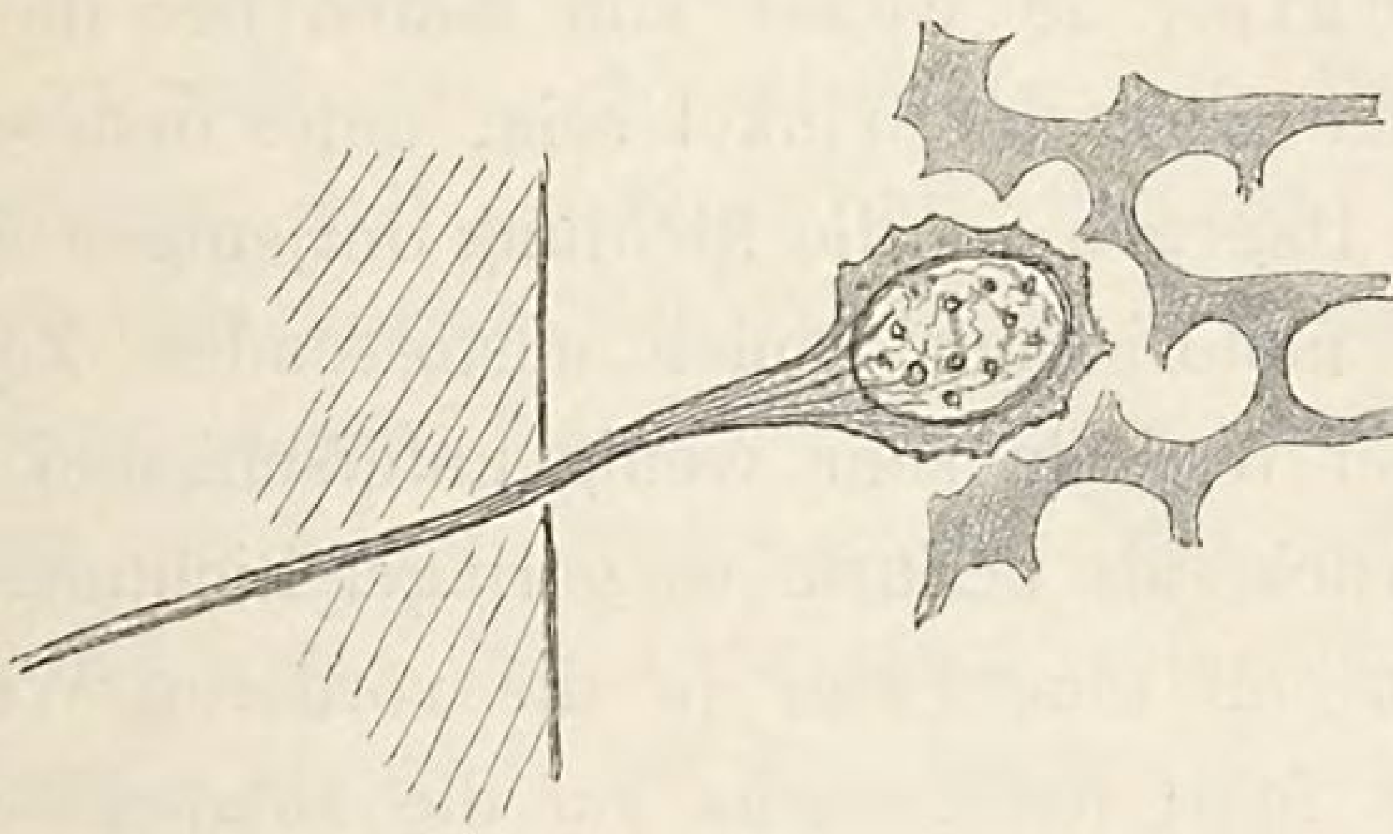


Fig. 3. Motorische Zelle von Embryo *R;* dieselbe überragt den Rand des Rückenmarks. Letzterer ist an der Figur durch einige Gerüstbalken bezeichnet. (Gez. mit System Leitz $^1/_{20}$.) Vergr. c. 1100.

Die von den Zellen abgehenden Nervenfasern beginnen in der Nähe des einen Kernpoles mit conisch verbreiterter Basis und sie zeigen beim Ursprung eine deutlich fibrilläre Streifung. Ausser dem einen Axencylinder sind andere Fortsätze kaum andeutungsweise vorhanden. Der Zellenleib überragt den Kern nur um Weniges und da wo man Gelegenheit hat, denselben etwas frei zu sehen, zeigt er sich mit mehreren stumpfen Spitzen besetzt. Demnach fällt die Ausbildung der verzweigten Fortsätze der Zeit nach erheblich später, als die des Axencylinderfortsatzes.

Neben der Mehrzahl von Fasern, welche aus den Zellen der motorischen Säule in die Wurzelbündel eintreten, finden sich stets auch einzelne, welche ventralwärts gerichtet sind, und die mit den Fasern der Bogenschicht in die vordere Commissur eintreten. Solche rückläufige Axencylinder entstammen vorzugsweise, aber nicht aus-

schliesslich der ventralen Zellengruppe der Vordersäule. Der Uebertritt motorischer Axencylinderfortsätze in die vordere Commissur ist übrigens eine auch für das ausgebildete Rückenmark constatirte Thatsache.

Sämmtliche Zellen der äusseren Mantelschicht entsenden Fasern, und zwar schlagen die Fasern aus den dorsalwärts liegenden Zellen alle die Richtung nach vorn ein und sie beschreiben dabei mehr oder minder flache Bogenlinien. Indem sie die Säule der motorischen Zellen erreichen, durchkreuzen sie dieselbe und sie sind theilweise bis über die Mittellinie des Markes hinaus verfolgbar. Diese Fasern nebst den zugehörigen Zellen bilden die Bogenschicht oder Formatio arcuata. Je weiter von hinten her die Fasern kommen, um so steiler wird der Winkel sein, unter dem sie die Wurzelbündel kreuzen. Dagegen ist die Richtung derjenigen Fasern, welche von den an die motorischen Säulen anstossenden Zellen kommen, von derjenigen der Wurzeln sehr wenig unterschieden, und man bekommt den Eindruck, als bedürfe es geringer Richtungsunterschiede, um zu bestimmen, ob eine Faser in die vorderen Wurzeln gelangt oder nicht. Das führt andererseits auf die Möglichkeit einer functionellen Verwandtschaft hinterer und vorderer Mantelschichtzellen. Ich vermag indessen kein thatsächliches Material zur Entscheidung der Frage beizubringen, inwieweit Fasern, die aus der hintern Markhälfte in die vordere Commissur übergehen, jenseits zu motorischen Wurzelfasern werden.

Die Formatio arcuata bildet sich aus den Zellen, welche der Oberfläche mehr oder minder parallel gestellt sind und aus den denselben entstammenden Fasern. Die hintersten Fasern entspringen hinter der Eintrittsstelle der sensiblen Nervenwurzeln; ihre Menge nimmt von hinten nach vorn zu, bis sie die motorische Säule erreichen. Hier zertheilen sich die Fasern, ein Theil derselben durchsetzt die Säule, andere umgreifen sie von Innen, einzelne auch von Aussen her. Ventralwärts von der motorischen Säule sammeln sich die noch vorhandenen Fasern, und ein Theil derselben überschreitet die Mittellinie und bildet den ersten Anfang zu einer Commissura anterior. Bei *Br*$_3$ ist die Zahl der Bogenfasern innerhalb der motorischen Säule erheblich grösser denn die der Commissurenfasern, die Commissur nimmt zur Zeit nur einen Theil von jenen auf. Was die

Entwickelungsfolge betrifft, so zeigt Embryo *R* noch keine Andeutung einer vorderen Commmissur, bei Br_3 ist sie als eine sehr dünne faserarme Schicht vorhanden, und schon bei *N* und bei S_1 hat sie an Mächtigkeit und an Faserzahl erheblich gewonnen.

Vorderstrangfasern.

Von der Zeit ab, da eine vordere Commissur angelegt ist, ist auch ein Anfang von Vordersträngen zu erkennen. Die ersten Längsfasern treten bei Br_3 in dem dreieckigen Feld auf zwischen dem vorderen Ende der motorischen Säule und dem ventralen Abschnitte der Innenplatte. Auf dem Querschnitte geben sie sich als Gruppen von Punkten zu erkennen, die zwischen den Maschen des Markgerüstes eingelagert sind. Längsschnitte dagegen zeigen die Fasern zu kleinen Büscheln angeordnet mit leicht wellenförmigem Verlaufe; die Entwickelung dieser Längsbündel nimmt rasch zu und bei S_1 und *N* nehmen die Vorderstränge einen nicht unbedeutenden Theil des Querschnittes ein. Der Uebergang von Commissurenfasern in Vorderstrangfasern ist schon bei Br_3, noch viel ausgiebiger aber bei *N* und bei den nachfolgenden Stufen zu sehen. Dagegen habe ich mich nicht davon überzeugen können, dass Fasern der Bogenschicht in den Vorderstrang derselben Seite eintreten; soweit dieselben das vordere Ende der motorischen Säule erreichen, sammeln sie sich alle in dem Eingangsschenkel der vorderen Commissur. Die Commissur enthält somit zu der Zeit, wenn nicht ausschliesslich, so doch jedenfalls vorwiegend Fasern, welche aus den Zellen der hinteren Markhälfte in den Vorderstrang der entgegengesetzten Seite übergehen.

Spinalganglien, hintere Wurzelfasern und Hinterstränge.

In einem früheren Aufsatze habe ich die Gründe zusammengestellt, welche damals für ein Hereinwachsen der sensiblen Wurzeln aus den Ganglien in das Rückenmark sprachen[1]). Es waren dies 1) die von Waller und von Bernard experimentell nachgewiesene trophische Abhängigkeit der Wurzelfasern vom Ganglion, 2) das frühe

[1]) Archiv 1881. S. 477.

Auftreten einer Faserung innerhalb des mit dem Rückenmark unverbundenen Ganglions, 3) die gegen das Rückenmark hin sich zuspitzende Anfangsform des obersten Wurzelstückes, 4) der Umstand, dass die sensiblen Fasern im Rückenmark eine andere Faserrichtung haben als ausserhalb desselben. Obige Wahrscheinlichkeitsgründe bin ich nunmehr im Fall, durch einen directen Beweis zu ersetzen. Die spinalen Ganglienzellen des Embryo sind bipolare Gebilde, ihre dorsalwärts gerichteten Fortsätze treten als Wurzelfasern in das Rückenmark ein, die ventralen gesellen sich den motorischen Wurzeln bei und dringen in deren Begleitung nach der Peripherie vor.

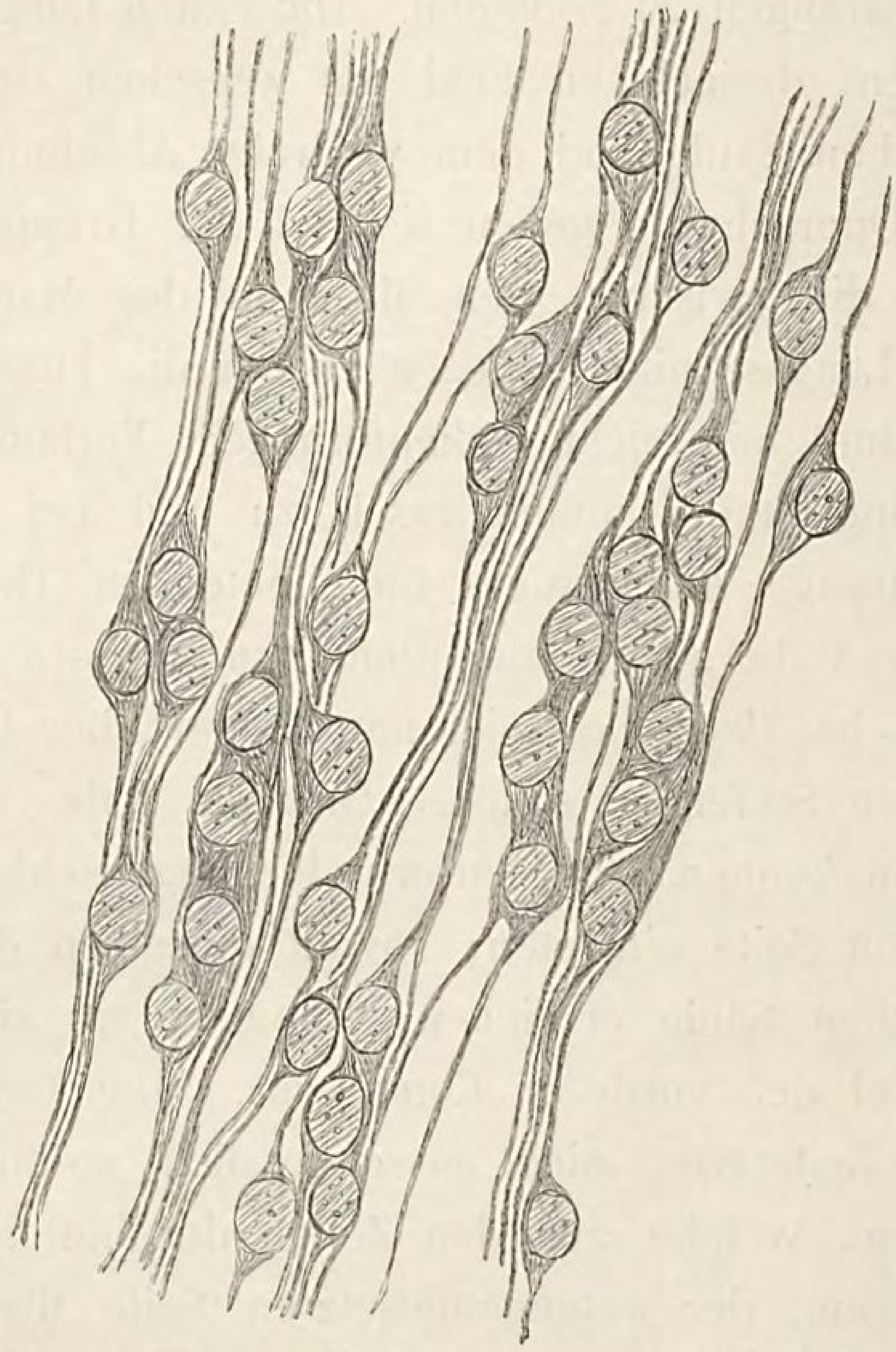


Fig. 4. Zellen- u. Fasergruppe aus einem Spinalganglion von Embryo *N*. Gez. mit Syst. F von Zeiss. Vergr. ca. 500.

Ehe noch sensible Wurzelfasern in Verbindung mit dem Mark erkennbar sind (so insbesondere bei Embryo *R*), zeigen die Ganglien eine meridianartige Streifung und bei starker Vergrösserung erkennt man als deren Ursache das Vorhandensein von gestreckten Ausläufern der Ganglienzellen. Es sind dies die ersten Anfänge von Wurzelfasern, die aber noch ohne Verbindung mit Rückenmark und Peripherie sind. Bei Embryo Br_3 hat sich der ventrale Anschluss für einen Theil der Fasern, bei *N* jedenfalls für deren grosse Mehrzahl eingeleitet. Die Verhältnisse von Zellen und von Fasern sind an den Schnitten dieser beiden Embryonen mit unanfechtbarer Schärfe verfolgbar, indem die Ganglien noch keine Bindesubstanzdurchwachsung erfahren haben und ihre Elemente in ziemlich loser Zusammenlagerung enthalten. Die Ganglienzellen und deren Kerne sind nach

der Axe des Gesammtganglions orientirt und jene entsenden, sowohl an ihrem dorsalen als an ihrem ventralen Ende je einen Ausläufer, von denen jeder unter conischer Verschmälerung in eine Faser sich fortsetzt. Die Zellen liegen gruppenweise beisammen und die aus derselben Gruppe kommenden Fasern sammeln sich zu kleinen zusammenhängenden Bündelchen. Durch breite Zwischenräume sind die einzelnen Zellengruppen und Faserbündel von einander getrennt, hier und da findet ein Faseraustausch benachbarter Bündel statt oder ein Zusammentreffen zuvor getrennter Gruppen.

Bei den Zellen, welche eine reine Profilansicht gestatten, zeigt es sich, dass die Fortsätze dem Zellenleib seitenständig ansitzen. Die beiderseitigen Fasern liegen die eine in der Verlängerung der anderen, aber der Zellenleib ist ihrer Verbindungslinie seitlich angefügt. Am meisten excentrisch liegt der Kern, dann folgt eine mehr oder minder breite Protoplasmazone und diese verjüngt sich an ihren beiden Enden, um mit conischem Ansatzstück in die Nervenfasern überzugehen. Auf etwas späteren Stufen liegen die Zellen gedrängter zusammen, ich finde indessen das eben beschriebene typische Bild noch an den Ganglienzellen von *Zw* wieder, wogegen bei *Lo* schon eine weitgreifende Durchwachsung mit parablastischen Zellen und die Bildung von besonderen Scheiden erfolgt ist. Erst von da ab scheint sich die Umbildung der bipolaren Zellen in unipolare mit zugehörigen T-Fasern zu vollziehen[1]).

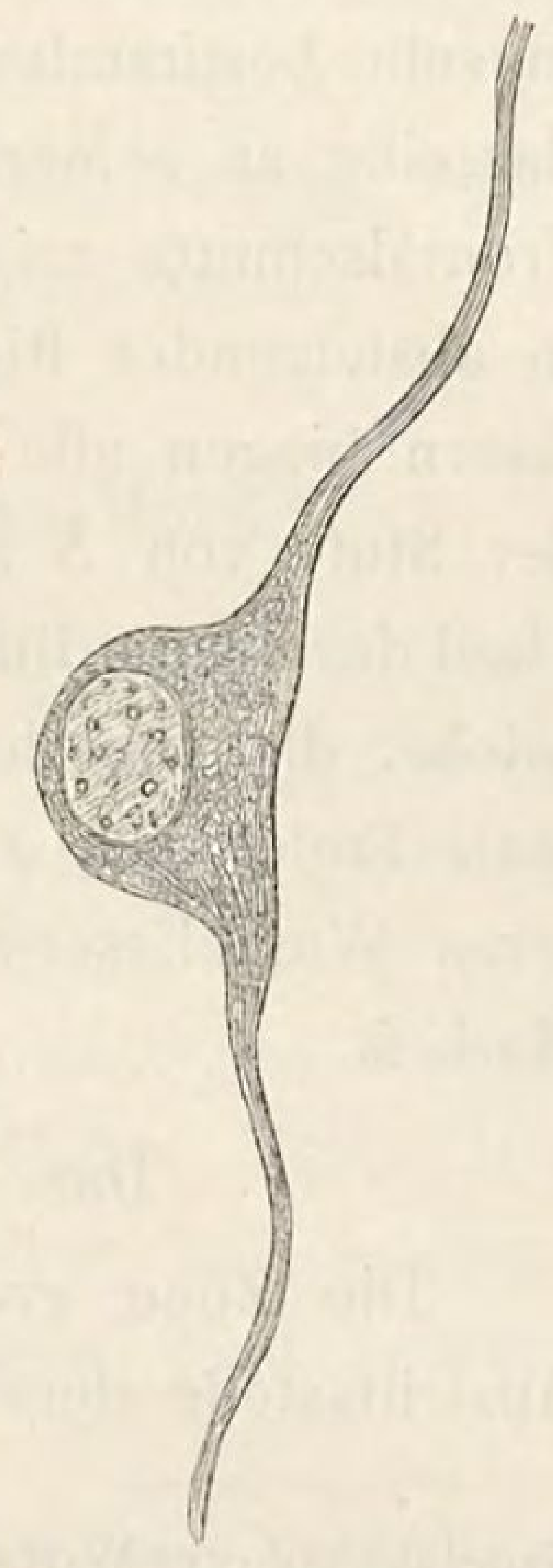


Fig. 5. Einzelne Zelle aus einem Spinalganglion von Embryo *N*. Syst. Leitz $^1/_{20}$. Vergr. c. 1100.

Die dorsalen Fortsätze der Spinalganglienzellen dringen als sensible Wurzeln in das Rückenmark ein und zwar geschieht dies suc-

[1]) In den Spinalganglien von Plagiostomen hat bekanntlich Rud. Wagner schon im Jahre 1846 bipolare Ganglienzellen entdeckt, und kurze Zeit darauf sind Robin und Bidder selbstständig auf denselben Fund gekommen. Wagner hat das von ihm aufgefundene Verhalten in seiner principiellen Wichtigkeit wohl zu würdigen gewusst, und er war auch überzeugt davon, dass es ein durchgreifendes sei. Er verhehlte sich keineswegs die Schwierigkeit des Nachweises der bipolaren Zellen in den

cessive, derart, dass ihrer Anfangs nur sehr wenige, dann aber immer grössere Mengen den Hinterstrang des Rückenmarks erreichen. Bei *R* vermag ich noch keine sensiblen Fasern im Rückenmark zu sehen, bei Br_3 sind nur wenige da und sie bilden nach ihrem Eintritt ein unscheinbares Bündel, das als erste Anlage eines Hinterstranges zu bezeichnen ist. Aus diesem kleinen kreisrunden Bündelchen ist der die Wurzelfasern aufnehmende Hinterstrang bei *N* zu einem breiten ovalen Bündel geworden, welches von seiner Umgebung in sehr bestimmter Weise sich abhebt. Die Wurzelfasern erreichen dasselbe an seinem vorderen Saume und zwar geschieht, wie dies Frontalschnitte zeigen, der Uebergang der Fasern sowohl in auf- als in absteigender Richtung. Die zuerst in's Mark tretenden Wurzelfasern biegen alle in den Längsstrang um, dagegen vermag ich von der Stufe von *N* ab auch solche zu erkennen, welche im vorderen Theil des ovalen Bündels direct gegen die Zellenmassen hingehen, sowie solche, die von dem Längsbündel aus die letzteren erreichen. Niemals findet sich auch nur andeutungsweise eine Beziehung von hinteren Wurzelfasern oder von Hinterstrangfasern zu den Zellen des Markes.

Das Auftreten von Seitenstrangfasern.

Die Zone zwischen der Eintrittsstelle der sensiblen und der Austrittsstelle der motorischen Wurzeln besteht in ihrem die Zellen-

Ganglien höherer Wirbelthiere und er legte dem Vorhandensein der festen Scheiden die Schuld davon bei. Man sollte eben bei der Dissociation der Ganglien meistens nur verstümmelte Formen von Zellen, apolare und unipolare bekommen. Unter Wagner's Abbildungen befindet sich (Neurologische Untersuchungen Taf. II. Fig. 6) eine Zelle, welche in eine unzweifelhaft T-förmige Faser übergeht. Die späteren Untersucher konnten bei höheren Wirbelthieren keine bipolaren Zellen wiederfinden, sondern nur unipolare, so besonders auch Schwalbe in seiner sorgfältigen Arbeit. Mit solchen unipolaren Zellen war aber physiologisch nichts anzufangen und auch anatomisch schienen sie widersinnig, nachdem einmal durch Holl's Zählungen gezeigt war, dass die Menge der in ein Ganglion eintretenden Fasern derjenigen der austretenden gleich ist. Ranvier's Entdeckung der T-förmigen Nervenfasern innerhalb der Spinalganglien musste sonach als erlösender Act begrüsst werden, obwohl es nicht an Stimmen gefehlt hat, welche diesen Elementen nur eine untergeordnete Bedeutung zugeschrieben haben. Durch obige Ergebnisse an den Spinalganglien des Embryo ergiebt sich nun in der That die Bipolarität als ein allgemeiner Charakter aller diesen Ganglien angehörigen Zellen. Die von mir gesehenen Formen schliessen sich am nächsten an diejenigen an, welche Freud für Petromyzon beschrieben hat.

leiber überragenden Theil aus einem schmalen Streifen von Gerüstsubstanz, und es finden sich in ihr bei Br_3 nur geringe Mengen von Längsfasern. Es sind dies Faserzüge, welche unmittelbar hinter den vordern Wurzelfasern liegen und die dem Gebiet des spätern Vorderseitenstrangs angehören. Von da aus nach rückwärts enthält bei Br_3 das Seitenstranggerüst nur vereinzelte und ihrer Natur nach zweifelhafte Längsfäserchen; bei Embryo *N* dagegen ist die hinter den motorischen Wurzeln befindliche Anlage der Vorderseitenstränge bereits sehr faserreich, auch sieht man Büschel von Fasern, welche aus der motorischen Zellensäule sich abzweigen und schräg dorsalwärts als Markstrahlen in die Seitenstrangbahnen einbiegen.

Das Einwachsen der Blutgefässe in das Mark[1]).

Gehirn und Rückenmark liegen nach erfolgtem Schluss in einem glattwandigen Kanal, dessen Wand sie nur stellenweise berühren. Es wird diese Wand von Bindesubstanz gebildet und sie erfährt im Laufe der Entwickelung eine zunehmende Verdichtung. Ihre glatte Innenschicht habe ich als Membrana limitans meningea bezeichnet. Die dorsale Oberfläche des Rückenmarkes haftet dieser Haut bis in eine verhältnissmässig späte Zeit unmittelbar an, wogegen seine Seiten- und Vorderfläche frei und durch einen Zwischenraum von der Kanalwand getrennt bleiben.

Unmittelbar jenseits von der meningealen Grenzhaut treten Blutgefässe auf, welche am Rumpf von den Intervertebralgefässen, am Kopf von den Aorten aus gespeist werden. Im Schädel erscheinen sie zuerst an der Basis, im Wirbelgebiet an der Vorderfläche des Rückenmarkes, sie breiten sich aber weiterhin rasch um die Höhlenwand herum aus. Bei Embryo *R* finde ich noch keine Blutgefässe in der Umgebung des Markes, bei Br_3 dagegen liegen geräumige Capillaren dicht unter der Grenzhaut und sie umgreifen das Mark bis jenseits von der Eintrittsstelle hinterer Wurzeln. Im Rückenmark selbst sind zu der Zeit noch keine Gefässe vorhanden.

1) Für das Hühnchen habe ich das Hereinwachsen der Blutgefässe in das Mark und die Sonderung der Rückenmarkshäute schon vor längerer Zeit beschrieben. Häute und Höhlen des Körpers. Basel 1865. S. 15. Die Vorgänge sind von den beim menschlichen Embryo zu beobachtenden kaum verschieden.

Als Anastomosenketten meningealer Gefässe entwickeln sich zwei neben der Mittellinie verlaufende Längsgefässe, die Aa. spinales anteriores. Dieselben sind paarig angelegt, hängen aber stellenweise durch Queranastomosen unter einander zusammen. Ein zweites Längsgefässsystem, das man als das der Aa. spinales posteriores bezeichnen kann, bildet sich unmittelbar vor der Eintrittsstelle der hinteren Wurzeln. Von diesen beiden Systemen aus entstehen Gefässsprossen, welche in das Innere des Rückenmarks eindringen (Fig. 2 der Taf.). Zuerst treten zwei Reihen von vorderen Stämmchen auf, die nach der Terminologie von Adamkiewicz als Arteriae sulci[1]) zu bezeichnen sind. So finden wir die Verhältnisse bei Embryo *N*. In nahezu parallelem Verlaufe dorsalwärts gehend, erreichen die beiderseitigen Stämmchen das Rückenmark. Nach ihrem Eintritt etwas divergirend gehen sie jederseits vom Rande der vorderen Commissur, lateralwärts von der radiär gestreiften Innenplatte zwischen ihr und der Bogenschicht nach rückwärts und ihre Endzweige reichen zu der Zeit bis das in Niveau der eintretenden sensibeln Wurzeln. Frontalschnitte zeigen das Vorhandensein verticaler Anastomosen zwischen den in horizontaler Richtung vordringenden Aa. sulci. Die Innenplatte bleibt nicht gefässfrei, es treten auch in sie Capillarschlingen ein, die bis in die Nähe des Centralkanales vordringen können. Kurz nach dem Eintritt in das Rückenmark giebt jede A. sulci bei Embryo *N* Seitenäste ab, die seitlich in die motorische Säule eintreten und die zur Zeit noch eine schräg dorsale Richtung einschlagen. Bei der späteren Dislocation der Vorderhörner werden diese Aeste rückläufig und als solche zeigen sie die Figuren von Adamkiewicz.

Die beiden Aa. sulci dringen von sehr früher Zeit ab in diejenigen Bezirke des Markes vor, welche sie bleibend zu versorgen haben, denn nach der Beschreibung von Adamkiewicz sind dieselben die Hauptgefässe der grauen Rückenmarkssubstanz; sie versorgen, indem sie von der Gegend der vorderen Commissur ausstrahlen, den grösseren Theil der Vorder- und die vordere Hälfte der Hintersäulen. Die beiderseitigen Aa. sulci werden weiterhin in

[1]) Sitzungsber. der k. Akad. d. W. in Wien. Bd. LXXXIV. III. Abth. 1881. Novbr.

der Mittellinie zusammengeschoben und sie verschmelzen mit einander, gleich den Aa. spinales anteriores. Der Zeitpunkt, in dem dies geschieht, fällt in die 6. bis 7. Woche, bei Embryo *Sch* finde ich die Stämme noch paarig, bei *Zw* dagegen unpaar angelegt. In dieser Zeit haben die Vorderstränge des Rückenmarks an Ausdehnung bedeutend gewonnen und sie sind sich in der Mittellinie bis beinahe zur Berührung entgegengerückt.

Bald nach den Aa. sulci wachsen auch von den Aa. spinales posteriores aus Gefässsprossen in das Rückenmark ein, sie erreichen dasselbe in einiger Entfernung vor der Eintrittsstelle der hinteren Wurzeln, gehen in transversaler Richtung durch die Zellengruppen dieser Gegend hindurch und dringen bis in das hintere Ausbreitungsgebiet der Aa. sulci vor. Diese Gefässe, deren Bildung bei Embryo *N* eben erst beginnt, entsprechen offenbar den Aa. cornu posterioris laterales. Beim Erwachsenen sollen sie nicht in regelmässiger Reihenfolge auftreten. Bei Embryo *N* zeigen sich da, wo diese Seitenstämme den Endzweigen der Aa. sulci näher treten, mitten in der Rückenmarkssubstanz gedrängt beisammenliegende Gefässzellen.

Noch etwas später als die zuletzt genannten Stämmchen treten solche auf, welche mit den vorderen Wurzelfasern ins Rückenmark eindringen. Ihnen folgen dann fernere Gefässe aus der Vasocorona (Adamkiewicz). Zuletzt bilden sich die von der Dorsalseite herkommenden Gefässe, deren Erscheinen, soweit ich aus meinen Präparaten ersehe, nicht vor Beginn des 3. Monats fällt.

Da, wo die dem Rückenmark zustrebenden Gefässe im Entstehen begriffen sind, erweisen sie sich als spitz zulaufende Sprossen, aus spindelförmigen Zellen gebildet. Die in das Mark eintretenden Gefässsprossen bahnen sich ihren Weg wohl unzweifelhaft zunächst in den vorhandenen Lücken des Markgerüstes, diese werden aber, wenn die Gefässe einmal vorhanden sind, ausgeweitet und zwar mehr als zu deren Aufnahme nöthig ist. Es bilden sich mit anderen Worten frühzeitig perivasculäre Kanäle aus, deren glatte Wand aus dem zur Seite gedrängten Myelospongium besteht.

Es ist klar, dass mit dem Auftreten der Blutgefässe im Rückenmark für das letztere eine neue Periode der Ausbildung beginnt. Hatten bis dahin die compact zusammengedrängten Zellen der Innenplatte in respiratorischer Hinsicht unter weit ungünstigeren Verhält-

nissen sich befunden, als die der Aussenzonen, so wird von nun ab das Blut mitten in die dichtesten Zellencomplexe hereingeführt und es ist sicherlich kein zufälliges Zusammentreffen, wenn von dieser Zeit ab die innere Masse mehr und mehr sich auflockert und an Umfang gewinnt, und wenn dabei immer reichlichere Zellen von der geschlossenen Masse der Innenplatte sich loslösen und dem faserbildenden Gebiete beimengen.

Umlagerung der primären Bestandtheile des Markes.

Auf den Stufen der Embryonen Br_3, *B* und *A* haben wir zu unterscheiden vermocht:

1) an **zelligen Anlagen**:
die vorwiegend aus radiärgestellten Zellen bestehende Innenplatte und die Mantelschicht. Letztere zerfiel in die motorische Säule, in die Hinter-Säule und das schmale Schaltstück;

2) an **Fasergebieten**:
die aus der motorischen Säule ausstrahlenden vorderen Wurzeln, die ersten Anlagen für die Vorderstränge und für die vordere Commissur, ferner die hinteren Wurzeln und die Hinterstranganlage (als ovales Bündel), die ersten Spuren einer Seitenstranganlage und die Bogenfasern.

Die Bogenfasern beginnen als Zellenausläufer der hintern Hälfte der Mantelschicht und sie bilden mit den zugehörigen Zellen die Bogenschicht oder Formatio arcuata. Sie stellen ein von hinten nach vorn sich erstreckendes Commissurensystem dar, dessen vorderste Bahnen in die Comm. anterior eintreten. Die motorischen Säulen werden von den Bogenfasern zum Theil durchsetzt, zum Theil aber auch medialwärts umgriffen.

Bei den Embryonen *N* und S_1 sind die aufgezählten Bildungen noch schärfer denn zuvor geschieden und zugleich haben sie Lagen- und Grössenveränderungen erfahren. Der Centralkanal läuft nunmehr in vier scharfe Rinnen aus, seine Wand ist demnach geknickt und sie bildet jederseits zwei gegen die Lichtung vortretende Längswülste, einen schmalen hinteren und einen breitern vorderen, an deren jedem wieder zwei Flächen unterscheidbar sind. Vorn sowohl als hinten stehen die correspondirenden Abschnitte der Innenplatte beinahe

parallel und begrenzen je einen engen Schlitz; der hintere Schlitz ist kaum halb so tief als der vordere, sein Grund ist gablig gespalten, indem die Deckplatte bis zur Berührung ihrer beiden Seitenhälften gegen denselben eingebogen erscheint. Die mit der Deckplatte zusammengedrängten hinteren Abschnitte der Innenplatte überragen nach rückwärts das ovale Hinterstrangbündel. Dieses ist nebst der zugehörigen Hintersäule der Innenplatte schräg angelagert, sein lateral-

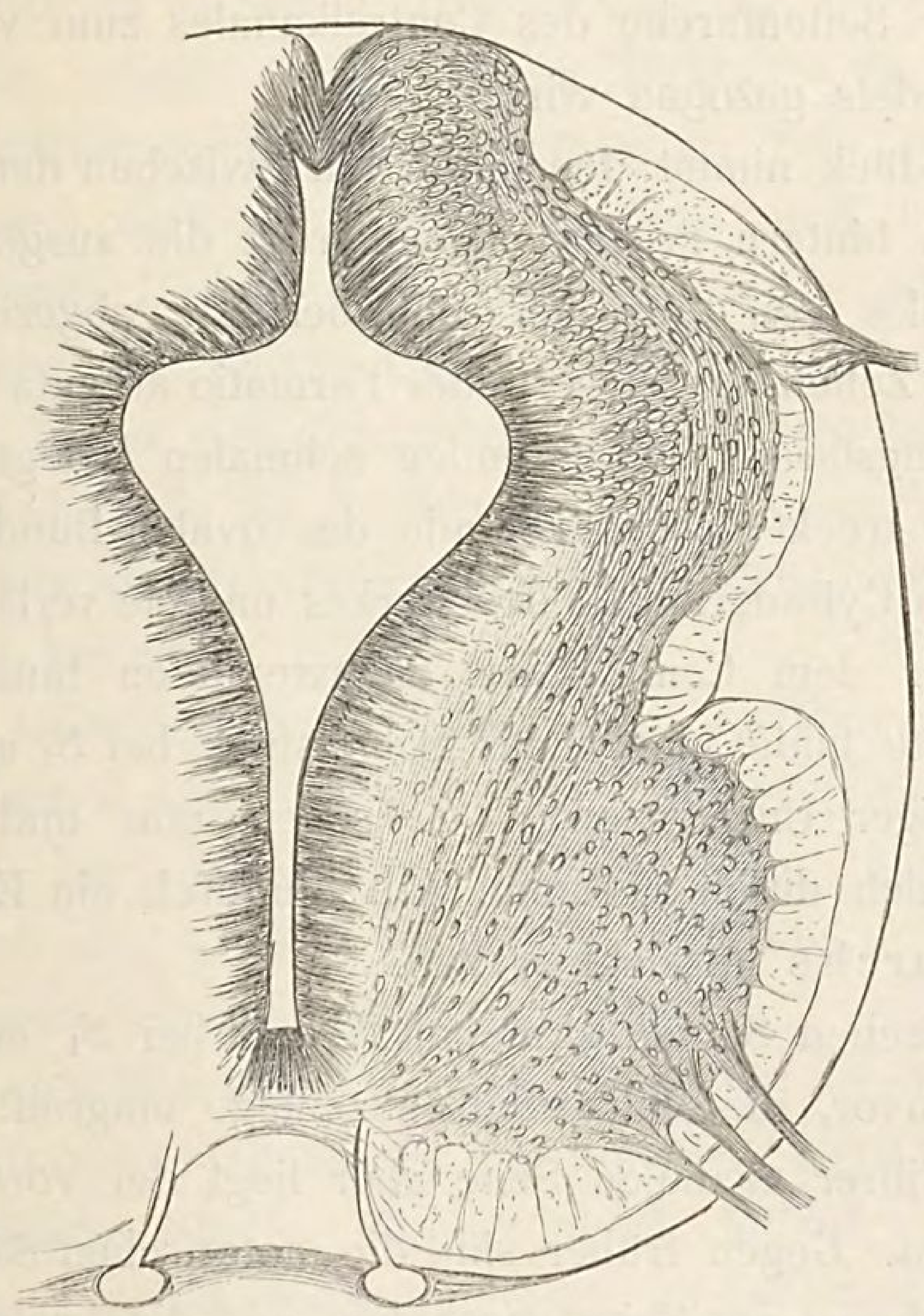


Fig. 6. Rückenmark von Embryo S_1. Vergr. 100.

wärts ausspringender Rand bildet das Eintrittsgebiet der sensibeln Wurzelbündel und liegt im Niveau der Seitenrinne des Centralkanales.

Im Ganzen genommen gliedert sich das Rückenmark jederseits in zwei durch ein kurzes Schaltstück verbundene Abschnitte, die ich als vorderen Markcylinder und als hinteres Markprisma bezeichnen will. Ersterer umfasst den vorderen Längswulst der Innenplatte, die vordere Hälfte der Formatio arcuata, die motorische Säule, sowie die Vorder- und die Vorderseitenstranganlage. An der Ober-

fläche des Rückenmarks bildet der Markcylinder eine kräftige Ausladung und sein hinterer Rand wird durch einen tiefen Einschnitt, die Cylinderfurche, bezeichnet. Das hintere Markprisma hat einen Anfangs mehr trapezförmigen, späterhin einen dreiseitigen Querschnitt. Seine mediale Abtheilung wird vom hinteren Längswulst der Innenplatte gebildet, die laterale vom ovalen Hinterstrangbündel und von dem unbedeckt bleibenden Abschnitt der Mantelschicht; die vordere Grenze des Prisma können wir uns durch eine Linie gebildet denken, welche von der Seitenfurche des Centralkanales zum vorderen Rand des ovalen Bündels gezogen wird.

Das Schaltstück nimmt den Raum ein zwischen dem vordern Cylinder und dem hintern Prisma, es umgreift die ausgeweitete Stelle des Centralkanales von vorn her und besteht, abgesehen von der Innenplatte aus Zellen und Fasern der Formatio arcuata und aus einer Anfangs der Längsfasern entbehrenden schmalen Belegschicht. Seine Aussenfläche erstreckt sich vom Rande des ovalen Bündels bis zu der oben erwähnten Cylinderfurche des Markes und sie verläuft annähernd parallel mit der dem Centralkanal zugewendeten Innenfläche. Auf dem Querschnitte bildet daher das Schaltstück bei S_1 und N ein Feld mit rautenförmiger Umgrenzung. Zwischen ihm und dem ovalen Bündel erhält sich durch geraume Zeit hindurch ein Einschnitt, den ich als Randfurche bezeichnen will.

Die motorischen Säulen sind bei N und bei S_1 erheblich voluminöser denn zuvor, die weisse Substanzanlage umgreift sie von drei Seiten her, an ihrer medialen Seite aber liegt der vordere Schenkel der Bogenschicht. Gegen früher sind die motorischen Säulen gedreht, ihr hinteres Ende ist zur Seite geschoben und die Austrittsstellen der vorderen Wurzelbündel stehen nicht mehr lateralwärts von den Säulen, sondern schräg nach vorn davon. Der hintere äussere Theil der Säulen scheidet sich von dem inneren vorderen Theil als ein mehr oder minder selbstständiger Complex ab und sein Gebiet entspricht der Stelle des späteren Seitenhornes. Aus seinem Innern entspringen bei Embryo N die bereits oben erwähnten Markstrahlen, welche schräg dorsalwärts in den Seitenstrang eintreten und die in dessen Längsfasern umbiegen (Fig. 2 der Tafel).

Die Bogenschicht ist in ihrer ganzen Ausdehnung viel zellenreicher und faserreicher den zuvor; wo bei Br_3 2—4 Zellen neben

einander lagen, da sind bei N 6—12 vorhanden. Dieser Zuwachs ist auf Kosten der Innenplatte dadurch erfolgt, dass Zellen der letzteren sich der Oberfläche parallel gelagert und dass sie nach vorn gehende Fasern entwickelt haben. Eine Neubildung von Zellen kommt nämlich in den äusseren Schichten der Medullarplatte nicht vor, indem laut Altmann's Entdeckung die Kerntheilungsvorgänge auf die dem Centralkanal anliegenden Elemente beschränkt bleiben. Insoweit die von Innen herzukommenden Zellen der Bogenschicht unmerklich sich anlagern, bedarf es zu deren Zusammenfassung keines besondern Namens, dagegen erfolgt in der hinteren Markhälfte die Abtrennung von mehr oder minder compacten Zellenmassen, welche an der Bildung von Bogenfasern nicht mehr Theil nehmen, und diese selbstständig sich verhaltenden Massen werde ich als innere oder secundäre Mantelschicht der primär vorhandenen äusseren gegenüberstellen.

Je mehr Zellen von der Innenplatte sich abgelöst haben, um so mehr verwickelt sich die Anordnung der grauen Substanz. Später entstandene Bogenfasern können mit früher vorhandenen unter spitzen Winkeln sich kreuzen. Starke Züge von quer gestellten Elementen machen sich besonders im Schaltstück des Rückenmarks geltend und dieselben scheinen keineswegs nur der Gerüstsubstanz anzugehören. Dazu kommen noch longitudinal gestellte Zellen, die auf dem Querschnitte durch ihre kreisrunden Kerne und durch den scheinbaren Mangel an Ausläufern charakterisirt sind.

In ihrer Gesammtheit betrachtet, beschreibt die Bogenschicht nunmehr eine S-förmige Krümmung. Ihr dorsaler Schenkel ist vom ovalen Hinterstrangbündel überlagert und bildet, indem er die Wand des ausgeweiteten Centralkanales umgreift, einen lateralwärts convexen Bogen; der vordere Schenkel wird in seiner Hauptmasse von der motorischen Säule bedeckt, ein Theil seiner Fasern aber durchsetzt die letztere in meridianartig vertheilten Bogen. Das Mittel- oder Schaltstück der Bogenschicht kommt der Oberfläche am nächsten und es ist nur von einem schmalen Beleg von Gerüstsubstanz überdeckt.

Die Entwickelung der weissen Substanz hat bei den Embryonen N_1 und S_1 erheblich zugenommen: Vorderstrang, Vorderseitenstrang[1])

[1]) Die Ausdrücke Vorderstrang und Vorderseitenstrang brauche ich getrennt und verstehe unter letzterem die dem vorderen Markcylinder zugehörige Schicht, soweit sie hinter den Austrittsstellen der motorischen Wurzel liegt.

und Hinterstrang (ovales Bündel) zeigen bereits einen grossen Faserreichthum und auch die vordere Commissur hat an Breite wesentlich gewonnen.

Die bei den Embryonen *N* und S_1 verhältnissmässig scharfe Scheidung der verschiedenen Markdistricte verwischt sich theilweise wieder in den nachfolgenden Perioden, indem die Verhältnisse in der grauen Substanz sich immer mehr compliciren. Vergleichen wir nochmals die jetzige Anordnung der Theile mit der späteren, so kommt

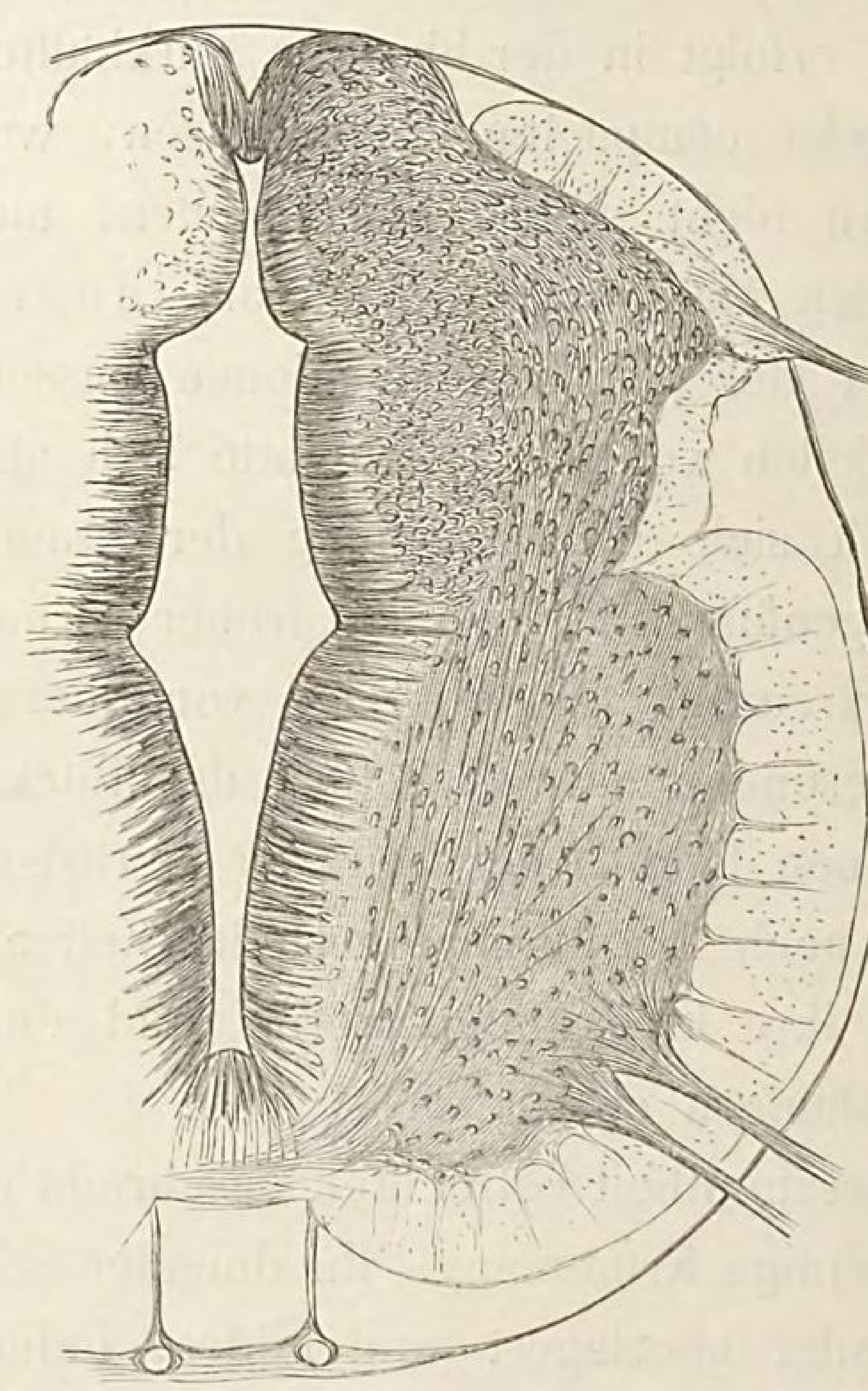


Fig. 7. Rückenmark (oberes Dorsalmark) von Embryo *Sch.* Vergr. 100.

die vordere Markhälfte ihrer definitiven Ausbildung am nächsten. Vorder- und Seitenhorn der grauen Substanz, vordere Commissur, Vorderstrang und Vorderseitenstrang sind sämmtlich angelegt und diese Theile zeigen eine von der definitiven nicht allzu abweichende Lagerung. Es ist indessen das Vorderhorn nicht in seiner vollen Ausdehnung vorgeschoben und die Furche zwischen den beiden Vordersträngen sehr wenig tief. Weit abweichender von der definitiven Gestaltung ist diejenige der hinteren Markhälfte. Noch liegt der

Hinterstrang auf der lateralen Seite des Markes und er erreicht nicht einmal dessen dorsalen Rand. Dabei stehen die Zellen der Innenplatte und der Mantelschichten sehr dicht gedrängt, und zwischen die beiden Markhälften schiebt sich der weit klaffende Centralkanal ein.

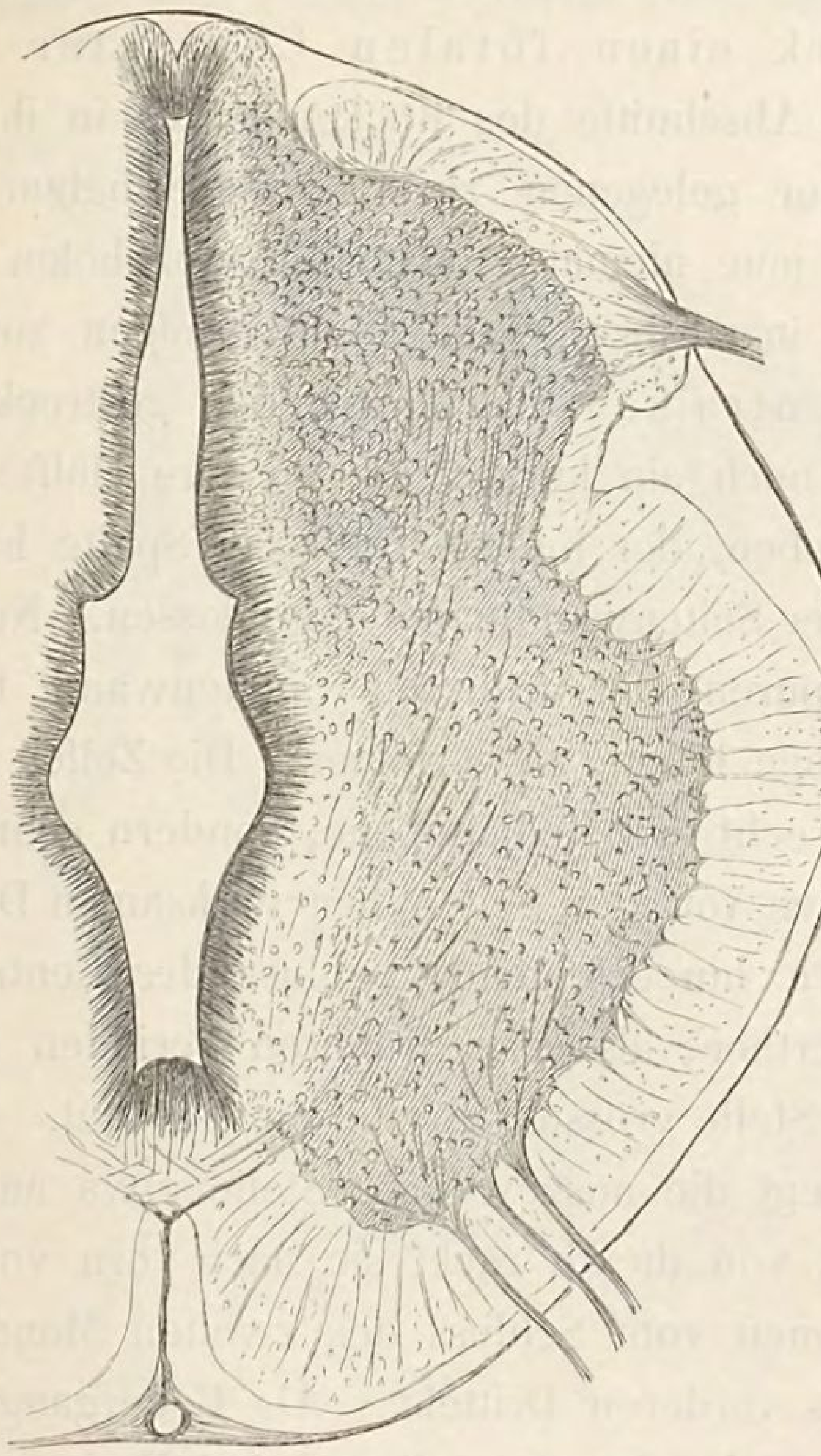


Fig. 8. Rückenmark (oberes Dorsalmark) von Embryo *Zw*. Vergr. 88.

Als folgende Stufen gebe ich in den Figuren 7 bis 9 Durchschnitte durch das Rückenmark der Embryonen *Sch*, *Zw*, *Lo* und ich füge in Fig. 10 denjenigen eines circa dreimonatlichen Fötus bei, für den die abgekürzte Bezeichnung *3 M* gelten mag.

Der Schnitt von *3 M* zeigt getrennte Hinterhörner und ein scharf sich abhebendes Gebiet für die Goll'schen Stränge. Letztere erscheinen als zwei zwischen die übrigen Hinterstrangmassen eingekeilte und diese dorsalwärts überragende Streifen. Der abgebildete Schnitt ge-

hört dem untersten Hals- oder obersten Dorsalmark an; hinsichtlich seiner Gestaltung aber erinnert er, wie man sieht, an einen Durchschnitt durch das ausgebildete Lendenmark. Mit einem solchen hat er die Kürze und Breite der Hinterhörner gemein und ausserdem die relativ geringe Entwickelung der weissen Substanz. Umgekehrt ausgedrückt besitzt das ausgebildete Lendenmark gegenüber dem Halsmark einen fötalen Charakter. Es bleiben die tiefer gelegenen Abschnitte des Rückenmarkes in ihrer Entwickelung hinter den höher gelegenen zurück, diese haben einen zeitlichen Vorsprung, den jene niemals vollständig einzuholen vermögen.

Wir treten in's Einzelne ein und verfolgen zunächst das Verhalten des Centralkanales. Von der gestreckten Sagittalspalte ist bei *3 M* nur noch ein kurzer, die vordere Hälfte repräsentirender Rest offen geblieben, der hintere Theil der Spalte hat sich durch Aneinanderlegen der Seitenwandungen geschlossen. Noch ist es jedoch möglich, die Spuren der früheren Spaltenwand bis zwischen die Goll'schen Stränge hinein zu verfolgen. Die Zellen der Wand stehen nicht mehr senkrecht zur Medianebene, sondern schräg, entsprechend der Wirkung eines von den Seiten her wirksamen Druckes. Der von hinten nach vorn hin erfolgende Schluss des Centralkanales ist um so bemerkenswerther, als ja in früheren Perioden der hintere Theil des Kanales die Stelle grösster Breite umfasst hat. Bis in die fünfte Woche hinein liegt die ausgeweitete Stelle etwa auf der Grenze des hinteren Drittels, von da ab rückt sie nach vorn vor und findet sich bei den Embryonen vom Schluss des zweiten Monates (*Zw* und *Lo*) im Bereiche des vorderen Drittels. Als Uebergang der einen Form in die andere besteht der Centralkanal bei Embryonen der sechsten bis siebenten Woche aus einer vorderen und einer hinteren Endspalte und aus einem breiten, etwa $^1/_3$ der Tiefe einnehmenden Mittelstück; die dorsale Endspalte verengt und schliesst sich weiterhin, während die ventrale an Breite etwas zunimmt. In den vorgerückten Perioden von *Zw*, *Lo*, *3 M* entspricht der ausspringende Winkel des Centralkanales der Grenze von dem oben erwähnten vorderen Markcylinder.

Die Ausbildung der Hinterstränge schreitet von dem Zeitpunkt ab, da die ersten sensibeln Fasern in's Mark gedrungen sind, stetig voran. Der bei Br_3 vorhandene kleine runde Faserzug hat sich bei N und S_1 schon zu einem breiten ovalen Bündel umgewandelt

und dieses nimmt in den nachfolgenden Stufen noch an Ausdehnung zu. Die Vergrösserung des ovalen Bündels erfolgt vorwiegend in medialer Richtung, dasselbe nähert sich der Mittellinie so lange, bis es jene dorsale Leiste erreicht, die durch Aneinanderlagerung der Ränder beider Innenplatten und der Schlussplatte entstanden ist. (S. 497.) Diese Leiste setzt seinem weiteren Vordringen einen Wider-

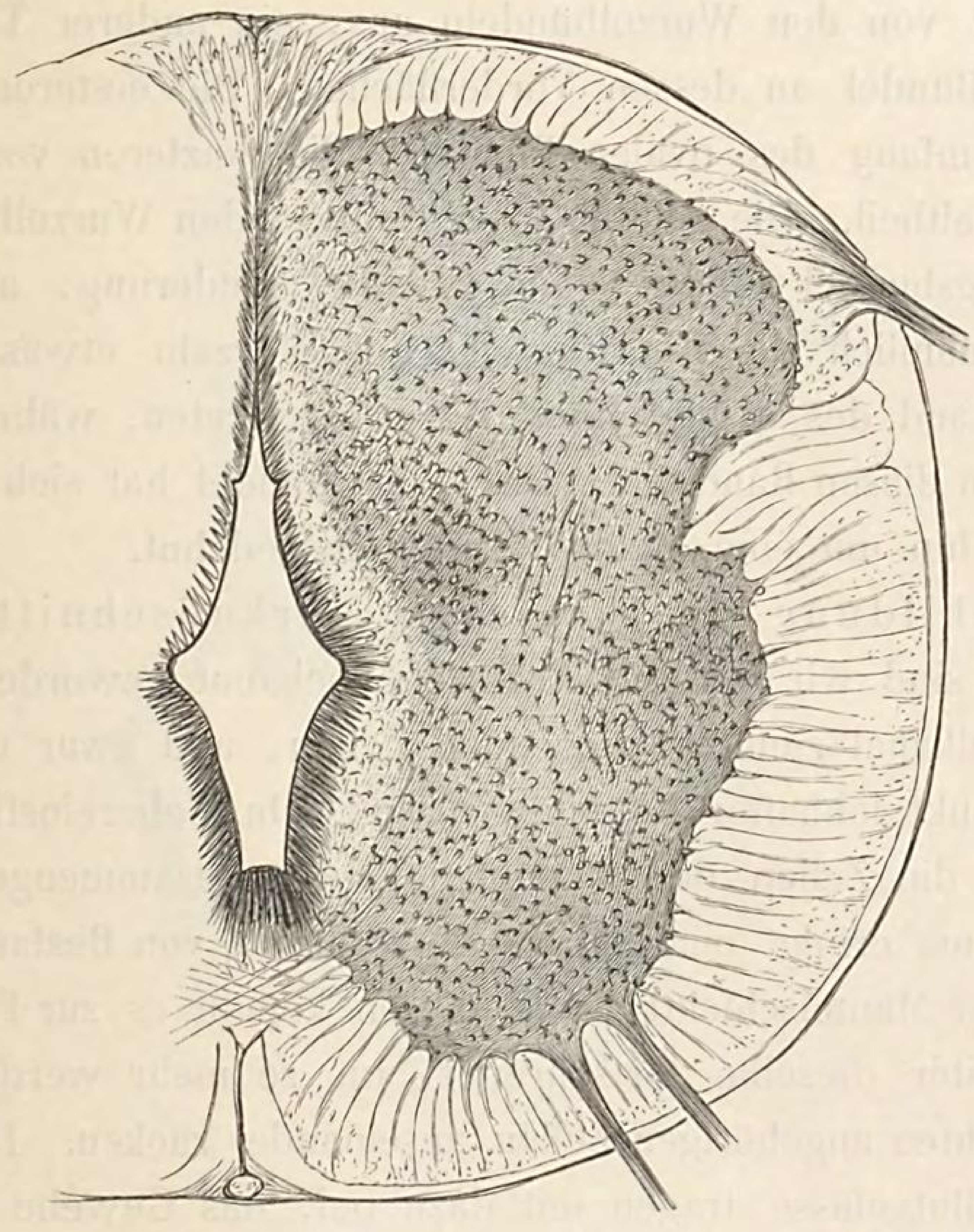


Fig. 9. Oberes Dorsalmark von Embryo *Lo.* Vergr. 88.

stand entgegen, da sie mit der Hinterhornanlage einen Winkel bildet. Wenn dann späterhin das Hinterhorn selbstständiger wird, entsteht zwischen ihm und der genannten Leiste ein Einschnitt. Das ovale Hinterstrangbündel drängt sich mit zugeschärftem Rand in denselben ein und es umfasst nunmehr das Hinterhorn auch an seiner medialen Seite. Während dies geschieht, entwickelt sich aus den Zellen der dorsalen Leiste ein Markgerüst mit schräger Anordnung der Balken. Dies Gerüst nimmt den Raum zwischen den beiden ovalen Bündeln ein und es wird zum Lager der Goll'schen Stränge. Die Fasern

entwickeln sich erst ziemlich spät zwischen den Maschen des Gerüstes.

Mit der Zunahme des ovalen Bündels ändert sich auch dessen Verhalten zu den hinteren Wurzeln. So lange das Bündel klein ist, scheinen alle eintretenden Wurzelfäden in aufsteigende Fasern überzugehen; wenn dasselbe an Umfang gewinnt, werden Faserbüschel sichtbar, welche in die graue Substanz eintreten. Ein Theil derselben geht direct von den Wurzelbündeln aus, ein anderer Theil verlässt das ovale Bündel an dessen Vorderfläche. Die ersteren liegen am vorderen Umfang des ovalen Bündels, die letzteren vorwiegend in dessen Mitteltheil. Die Stellung des eintretenden Wurzelbündels zum ovalen Längsbündel erfährt eine gewisse Aenderung: auf späteren Stufen ist nämlich die Eintrittsstelle der Wurzeln etwas hinter den vorderen Rand des ovalen Bündels zurückgetreten, während sie zuvor in eben diesen Rand fiel. Das ovale Bündel hat sich demgemäss nach vorn hin um eine kleine Strecke ausgedehnt.

Formbildung des hinteren Markabschnittes. Durch Altmann sind wir mit der Thatsache bekannt geworden, dass die dem Centralkanal zunächst liegenden Zellen, und zwar nur sie, der Ausgangspunkt lebhafter Neubildung sind. In Uebereinstimmung damit liegen die Zellen der Innenplatte dicht zusammengedrängt und von ihnen aus erfolgt eine successive Ablösung von Bestandtheilen zu Gunsten der Mantelschichten. In diesen kommt es zur Faserbildung, und je weiter dieselbe fortschreitet, um so mehr werden die den Mantelschichten angehörigen Zellen auseinander rücken. Die hier auftretenden Blutgefässe tragen mit dazu bei, das Gewebe lockerer zu machen, theils durch ihre directe Einschiebung zwischen die vorhandenen Theile, theils auch dadurch, dass das von ihnen gelieferte Transsudat Raum beansprucht. Die Auflockerung der Aussenschichten erfolgt in der vorderen Markhälfte sehr viel früher, als in der hinteren. Die in der letzteren entstandenen Fasern treten, wie wir früher sahen, als Bogenfasern nach vorn und helfen als solche mit, die Volumzunahme der motorischen Säulen und ihrer Umgebung bestimmen. Da nun überdies in der vorderen Hälfte von Anfang ab ein viel grösserer Theil der Zellen aus der Innenplatte in die Mantelschichten übergegangen ist, als in der hinteren, und da diese zum überwiegenden Theil an der Faserbildung Theil nehmen, so wird es verständlich,

dass der vordere Markabschnitt an Ausdehnung den hinteren bald überflügelt. Bei Embryonen der sechsten und siebenten Woche nimmt der vordere Markcylinder nahezu zwei Drittel des Gesammtquerschnittes ein.

Der hintere Markabschnitt hat, wie wir oben sahen, im Beginn des zweiten Monats die Gestalt eines trapezförmigen und weiterhin eines dreiseitigen Prisma, seine mediale Seite wird von der Innen-

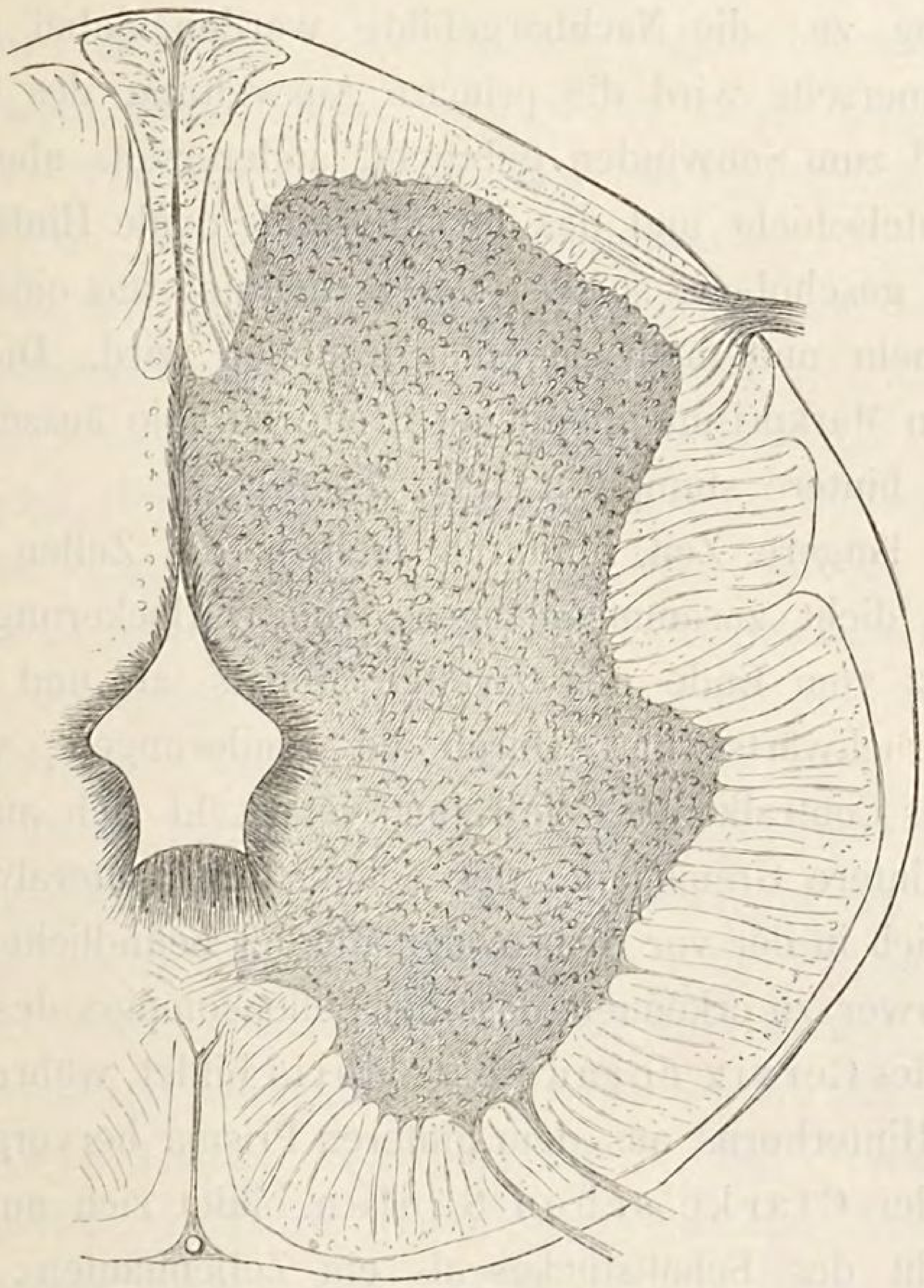


Fig. 10. Rückenmark von Foetus *5M.* Vergr. 60.

platte, die laterale vom ovalen Hinterstrangbündel eingenommen und seine Vorderfläche vermittelt den Zusammenhang mit den davor liegenden Theilen. Als ventrale Grenze hatten wir eine Linie angenommen, welche die Seitenrinne des Centralkanales mit dem vorderen Rand des ovalen Bündels verbindet. Den Raum zwischen der Innenplatte und dem ovalen Bündel erfüllen die äussere und die innere Mantelschicht. Jene liegt dem ovalen Bündel in dessen ganzer Ausdehnung

an und sie entsendet an ihrer Vorderfläche zahlreiche Fasern, welche ventralwärts in die Formatio arcuata eintreten. Die Zellen der innern Mantelschicht bilden einen compacten Klumpen, welcher sich weiterhin von Radiärfasern durchsetzt zeigt, dessen Elemente aber an der Entsendung nach vorn gehender Fasern unbetheiligt erscheinen.

Die Masse der innern Mantelschicht nimmt nun in der zweiten Hälfte des zweiten Monates auch ihrerseits, zunächst durch Zellennachschübe von der Innenplatte her und späterhin durch vasculäre Auflockerung, zu; die Nachbargebilde werden dabei zur Seite gedrängt. Einerseits wird die primäre Ausweitung des Centralkanales verengt und zum Schwinden gebracht, andererseits aber werden die äussere Mantelschicht und das ihr anliegende ovale Hinterstrangbündel dorsalwärts geschoben, so dass deren Richtung aus einer vorwiegend sagittalen mehr und mehr zu einer frontalen wird. Die Vorderfläche des hinteren Markprisma nimmt an Breite zu, die äussere Kante wird spitzer, die hintere stumpfer. (Fig. 7—9.)

Durch längere Zeit hindurch bleiben die Zellen des hinteren Markprisma dicht zusammengelagert, die Auflockerung der Massen beginnt erst vom Ende des zweiten Monats ab und schreitet von vorn nach rückwärts vor. Durch die Aenderungen, welche in der Lichtung des Centralkanales eintreten, verwischt sich an der medialen Seite die hintere Grenzmarke des Schaltstücks, lateralwärts dagegen erhält sie sich in der vor dem ovalen Bündel befindlichen Randfurche. Es ist unschwer zu erkennen, dass der Zellencomplex des Schaltstückes die Anlage des Cervix cornu posterioris bildet, während die Hauptmasse des Hinterhorns aus dem hinteren Prisma hervorgeht. Die Anlage aber der Clarke'schen Säulen bildet sich aus der inneren Mantelschicht des Schaltstückes als ein Zellenhaufen, welcher sich ziemlich spät erst von der Innenplatte ablöst und zwar in dem Winkel hinter der secundären oder vorderen Ausweitung des Centralkanales.

Wenn einmal der Centralkanal in seiner hinteren Hälfte sich geschlossen hat, verkümmert für die geschlossenen Strecken auch die Innenplatte als selbstständige Bildung. Soweit deren Zellen nicht an die Mantelschichten abgegeben worden sind, betheiligen sie sich an der Bildung jenes Gerüstes, welches zur Aufnahme der Goll'schen Stränge bestimmt ist. Auch muss die sehr spät auftretende Commissura posterior das Gebiet der früheren Innenplatte durchsetzen.

Im Rückenmarksquerschnitt, wie er sich bei *3 M* findet, sind mit Ausnahme der hinteren Commissur und der Substantia gelatinosa Rolandi alle Hauptabtheilungen des Markes unterscheidbar; indessen nehmen die weissen Substanzmassen noch einen relativ geringen Raum ein, während die Anlagen grauer Masse unverhältnissmässig kurz und breit erscheinen. Vorder- und Hinterhorn müssen noch weiter auseinanderrücken und das letztere bedarf einer bedeutenden Streckung, bevor die bleibende Gestaltung eintritt. Die Streckung des Hinterhornes combinirt sich mit einer Drehung seiner Oberflächen; das was zur Zeit nach hinten sieht, wird in der Folge medialwärts gewendet, wobei die Eintrittsstelle der hinteren Wurzeln mehr dorsalwärts rückt und die Verschiebung des ovalen Bündels an die Innenseite des Hinterhornes sich vollzieht. Die Verlängerung und Drehung des Hinterhornes scheint hauptsächlich auf Rechnung der Seitenstrangentwickelung zu kommen. Indem die im einspringenden Winkel zwischen Seiten- und Hinterhorn liegende Substanz an Umfang zunimmt, wird der von ihr eingenommene Raum ausgeweitet und die angrenzenden Massen rücken auseinander. Die laterale Ecke des Hinterhorns wird zu dessen hinterer Spitze, seine dorsale Oberfläche zu einer medialen.

Die einspringende Stelle des Rückenmarkes wird vom Schaltstück eingenommen, hier entwickelt sich die Hauptmasse des Processus reticularis, und dessen Bildung erscheint gegen Ende des zweiten Monats durch eine laterale Auflockerung der Zellengruppen und durch das Vorhandensein zahlreicher Markstrahlen eingeleitet. Die Belegschicht des Schaltbündels liefert das Gerüst für die weissen Massen des Hinterseitenstranges, d. h. der Strecke, welche von der Cylinderfurche bis zur Randfurche hinreicht. Durch die zunehmenden Nachbargebilde wird das Gebiet theilweise in die Tiefe gedrängt (Fig. 8), indessen scheint mir, dass ein Theil desselben die Verbindung mit der Oberfläche beibehält. Sehr lange erhalten sich am fötalen Mark zwei seitliche Furchen, die ich für die Abkömmlinge der Rand- und der Cylinderfurche halten muss. Ihre Stelle entspricht dem Ort, wo späterhin die Pyramidenseitenstrangbahn und die Kleinhirnseitenstrangbahn auftreten. Aus Flechsig's Darstellung[1])

[1]) Man vergl. Taf. XVII in den »Leitungsbahnen im Gehirn und Rückenmark des Menschen«. Fig. 2 bis 5 zeigen die Furchen bei Fehlen der Pyramidenseitenstrangbahn, Fig. 3 und 6 bei Mangel der Grosshirnschenkel.

geht hervor, dass bei Verkümmerung dieser Bahnen, bez. der Pyramidenseitenstrangbahn beide Furchen persistiren können.

Nicht ganz einfach ist die Substantia gelatinosa Rolandi abzuleiten. Ihr Ort entspricht dem lateralen Grenzgebiet zwischen ovalem Hinterstrangbündel und äusserer Mantelschicht. Nun gehen aber die Zellen der letzteren erwiesenermassen in Nervenfasern über, ein Verhalten, das für die Elemente der Rolando'schen Schicht nicht zutrifft. Da somit eine Identität beider Bildungen nicht besteht und da die Mantelschicht beim Embryo die hinterste zellige Anlage ist, so müssen die Elemente der gelatinösen Substanz secundär hinzugetreten sein und ich leite sie gleich den Deiters'schen von eingewanderten Zellen ab. Für diese Auffassung spricht auch das anatomische Verhalten der gelatinösen Substanz. Dieselbe wird bekanntlich von dem fächerförmig sich ausbreitenden Complex sensibler Fasern durchsetzt, von denen ein Theil sich am vorderen Rande der Substanz wieder zu aufsteigenden Bündeln sammelt. Ein derartiges Verhalten zeigen die Wurzelfasern des Embryo nicht innerhalb der zellenhaltigen Anlage des Hinterhornes, sondern schon innerhalb des ovalen Bündels. Bei Embryonen von der zweiten Hälfte des zweiten Monats, so bei *Zw* oder *Lo* gehen die das ovale Bündel durchsetzenden Wurzelfasern gleich von der Eintrittsstelle ab auseinander. Während ein Theil derselben bis zu dessen lateralem Rande ausbiegt, streben andere medialwärts, so jedoch, dass die innersten Fasern die halbe Breite des Bündels nicht überschreiten. Zwischen den Strahlen des also sich bildenden Fächers bleiben verhältnissmässig weite Spalten frei und wenn man sich diese von Masse ausgefüllt denkt, so erhält man ein Gebilde von der Lagerung und Anordnung der gelatinösen Substanz. Hiernach ist das primäre Hinterhorn in Wirklichkeit weit kürzer, denn der späterhin so bezeichnete Rückenmarksabschnitt. Es erstreckt sich nur bis zu den vor der gelatinösen Substanz aufsteigenden Bündeln. Alles was dahinter liegt, war einmal Bestandtheil des ovalen Bündels. Die Stelle übrigens, die beim Embryo Eintrittsstelle der hinteren Wurzeln war, liegt späterhin nicht mehr an der Oberfläche des Rückenmarkes, sondern sie ist infolge einer beiderseitigen Ueberwachsung durch die anstossenden Längsbündel in die Tiefe geschoben.

Das Auswachsen der Nervenfasern und dessen Folgen.

Die in früheren Abschnitten mitgetheilten Erfahrungen haben ergeben, dass von den Zellen des Rückenmarkes die einen sich bei der Bildung eines Gerüstes betheiligen, die anderen bei der Bildung von Nervenfasern. Die Gerüstbildung ist früher erkennbar als die Faserbildung. Als faserbildend erweisen sich zuerst die Zellen der alleräussersten Schicht; später, wenn Blutgefässe in das Mark eingedrungen sind, gesellen sich diesen auch die Zellen tieferer Schichten bei (Mantelschicht und Innenplatte). Die dem Centralkanal zunächst liegende Schicht bleibt durch geraume Zeit hindurch der Mutterboden für die Bildung neuer Zellen. Als Motiv für die getrennten Leistungen von Zellen, die doch derselben Anlage entstammen, möchten wohl am ehesten die respiratorischen Bedingungen in Betracht fallen, und diese liegen für die faserbildenden Zellen nachweislich günstiger, als für die Wandzellen des Centralkanales.

Von den zuerst im Mark auftretenden Nervenfasern geht ein Theil in die motorischen Wurzeln über, andere treten in die vordere Commissur oder in den Vorder- und Vorderseitenstrang. Mehr als eine Nervenfaser scheint von keiner Rückenmarkszelle auszugehen. Die verzweigten Ausläufer der motorischen Zellen entwickeln sich später als die Axencylinderfortsätze und wahrscheinlich breiten auch sie sich nur langsam aus. Die Zellen der Spinalganglien wachsen ihrerseits in je zwei Nervenfasern aus, von denen die eine in das Rückenmark eindringt, die andere peripheriewärts sich ausbreitet. Ueberall wo Fasern auftreten, ist deren Menge Anfangs gering und nimmt erst allmählich zu. Dies gilt von den vorderen Wurzelbündeln, von den Vordersträngen und Vorderseitensträngen, von der vorderen Commissur und von dem ovalen Hinterstrangbündel.

Die von Nervenzellen auswachsenden Fasern bahnen sich ihren Weg, indem sie in vorhandene Lückenräume zwischen anderen Gewebsbestandtheilen hereinwachsen. Im Rückenmark und im Gehirn liefert das primär angelegte Markgerüst die Bahnen zur Ausbreitung und seine Anordnung ist für die Richtungen des Auswachsens unzweifelhaft mitbestimmend. Im Körper drängen sich die Nerven durch die weichen Bindesubstanzlager hindurch und zwar in Form von breiten Stämmen, welche Anfangs gestreckten Verlauf haben und innerhalb deren die

einzelnen Fasern lose beisammen liegen. Hie und da dringen schon in früheren Perioden Bindesubstanzzellen in die Stämme ein; in ausgiebiger Weise erfolgt diese zur Scheidenbildung führende Invasion erst in verhältnissmässig später Zeit. Trifft ein gestreckt auswachsender Stamm bei seiner Ausbreitung auf einen Widerstand, auf eine Knorpelanlage oder auf ein Blutgefäss, so wird er von seiner Bahn abgelenkt, und indem die Ablenkung für die verschiedenen Bestandtheile des Stammes eine verschiedene ist, kommt es zur Theilung desselben. Andererseits kann ein gestreckt angelegter Nerv secundäre Verschiebungen erfahren, wonach wieder neue Bedingungen der Ausbreitung und Zertheilung wirksam werden. Die Kopfnerven bieten hiefür ein Beispiel, das ich an anderem Orte besprochen habe[1]).

Das Vordringen der Nerven nach der Peripherie erfolgt mit einer gewissen Langsamkeit, so dass die letzten Endgebiete erst spät ihre Fasern zugeführt erhalten. Eine Täuschung in der Hinsicht ist nicht wohl denkbar, die vordringenden Stämme heben sich in so charakteristischer Weise von ihrer Umgebung ab, dass über deren Fehlen oder Vorhandensein kein Zweifel möglich ist. An schwach gefärbten Präparaten treten sie schon bei geringer Vergrösserung als helle Strassen inmitten der übrigen Massen hervor und nach kräftiger Eosinfärbung vermag man bei starker Vergrösserung jede einzelne Faser zu verfolgen. Halten wir uns, um ein bestimmtes Object zu haben, an die Extremitäten, so sind am Schluss des ersten Monats kaum die Wurzeln derselben von den Nervenstämmen erreicht. Die Schnitte von Embryo *N* zeigen prachtvolle und mächtige Plexus brachiales und lumbosacrales, von denen aus einige dicke Stämme in die Extremitäten eindringen; allein ungefähr in deren halber Länge hören die Nerven schon auf und das Endstück ist noch völlig nervenfrei. Ja selbst bei Embryo *Zw*, d. h. schon gegen Ende des zweiten Monats, finde ich zwar Nerven an der Wurzel der Finger, aber keine im Gebiete der Endphalangen. In gleicher Weise erfolgt sicherlich auch das Auf- und Abwärtswachsen der Faserbahnen im Rückenmark mit einer gewissen Langsamkeit, so dass erst spät die schliesslichen Endpunkte erreicht werden.

Wenn nun die Nervenfasern durchweg als Ausläufer von Ganglienzellen entstehen und allmählich in ihre centralen oder peripherischen

[1]) Anatomie menschlicher Embryonen. Heft III, S. 88 u. f.

Endbezirke vordringen, so ergiebt sich als nothwendige Folge, dass gegenüber der Verbindung mit der Ursprungszelle, alle übrigen Anschlüsse, falls vorhanden, nur secundär entstanden sein können. Man ist mit solchen Nervenverbindungen im Centrum und an der Peripherie früherhin sehr freigebig gewesen. Die Verbindungen von Nervenzellen unter einander im Sinne von Schröder van der Kolk sind zwar längst als Täuschungsbilder erkannt, aber wohl leben stillschweigend die Meisten von uns der Meinung, dass auf irgend eine Weise die centralen Nervenfasern zu gegenseitiger Verbindung von Zellen dienen, und was die peripherischen Gebiete betrifft, so ist, wenigstens für die Sinnesnerven, seit den Arbeiten von Max Schultze, die Endigung in sog. Sinneszellen zum vorherrschenden Dogma geworden.

Die Möglichkeit, dass Nervenfasern, welche in Epithelschichten vordringen, auch in das Innere von Zellen gelangen, ist a priori nicht in Abrede zu stellen. Die von Hensen im Schwanz der Froschlarven entdeckten, in Betreff ihrer Lagerung allerdings nicht unbestrittenen Nervenenden gehören vielleicht hierher[1]. Anderntheils aber kennen wir eine überwiegend grosse Zahl von Endvorrichtungen, bei denen die Nervenfasern als solche frei auslaufen, es sind dies die Endfibrillen des Hornhautepithels und der Epidermis, die Endigungen in den Pacini'schen Körpern und in den Krause'schen Endkolben, die Platten in den Tastkugeln des Entenschnabels, die Geweihe der motorischen Endplatten u. a. m. Um das Ende der betreffenden Fasern herum kann eine weiche Masse sich ansammeln, wie bei den motorischen Platten, oder es kann, falls die Nerven im Bindegewebe auslaufen, ein mehr oder minder complicirtes System von Kapseln sich bilden, das dem Endapparat einen körperlichen Charakter verleiht. Das Beispiel der mit Bindegewebskapseln versehenen Endapparate (Pacini'sche Körper, Endkolben, Tastkörper, Tastkugeln u. s. w.) bietet deshalb ein besonderes Interesse, weil sich daran zeigt, dass von Seiten der Nerven an der Endstelle eine Art von Reiz auf die

[1]) Für die Endigung in Epithelzellen sind in neuerer Zeit eingetreten Pfizner (Morphol. Jahrb. VII. 726); Canini (Arch. f. Anat. u. Phys. Physiol. Abth. 1883. 149) und Frenkel (ebendas. 1886. 415); für eine intercelluläre Endigung Mitrophanow (ebendas. 1884. 191) und Macallum (Quarterly Journ. of Micr. Sc. New Series CI. Nov. 1885).

Umgebung ausgeübt und dadurch die Anhäufung besonderer Zellenschichten veranlasst wird. In den höheren Sinnesorganen in Retina, Gehörorgan, Geschmacksorgan und Riechorgan kommen wir laut den neueren Beobachtungen von G. Retzius, Schwalbe u. A. nicht über das Auslaufen der Nervenfibrillen in der Nähe der sog. Sinneszellen hinaus und wir werden uns schliesslich dahin bequemen müssen, eine Reizübertragung ohne directe Continuität auch in diesen Organen für möglich zu erachten.

Für centrifugal leitende Nerven geben die motorischen Endplatten das unbestreitbare Beispiel einer Reizübertragung ohne Continuität der Substanz. Es zeigt sich sogar, dass hier zwischen die in Stümpfen auslaufenden Enden des Axencylinders und die contractile Substanz eine trennende Zwischenschicht, die Kühne'sche Sohle eingeschaltet ist.

Ich glaube, dass man auch hinsichtlich der Centralorgane zu vereinfachten Vorstellungen gelangt, wenn man den Gedanken aufgiebt, dass Nervenfasern, um auf einen Theil zu wirken, nothwendig mit ihm in Continuität stehen müssen. Für den Verlauf einer Faser ist das Gesetz der isolirten Leitung unbestreitbar, allein wenn eine Faser abgestutzt endigt, so kommen für den Stumpf neue Bedingungen der Reizübertragung zur Geltung. Die Vervielfältigung der Stümpfe, wie sie die motorischen Endgeweihe von Kühne zeigen, gewinnen gerade von diesem Gesichtspunkte aus eine besondere Bedeutung. Ist aber die Auffassung von der reizübertragenden Bedeutung eines Nervenstumpfes berechtigt, so wird zur Erklärung der Einwirkung eines Fasersystemes auf ein anderes nicht die Continuität beider Bahnen verlangt, sondern es genügen das Auslaufen der beiderseitigen Endstümpfe in demselben Markdistrict und die Einschiebung einer reizübertragenden Zwischensubstanz. Wählen wir als Beispiel die Fasern der Pyramidenbahn, so bleibt deren Einfluss auf motorische Fasern verständlich, wenn sich nachweisen lässt, dass dieselben in der Nähe der motorischen Zellen mit einfachen oder getheilten Stümpfen auslaufen und dass sie hier den Endpunkten der verzweigten Zellenausläufer nahe gerückt erscheinen. Jedes der beiderseitigen Bahnsysteme ist bis zu seinem Ende hin geschlossen, aber zwischen die beiden Enden schiebt sich als offenes Gebiet das Markgerüst nebst seinen Interstitien ein und darin kann die Ausbreitung

z. B. chemischer Vorgänge nach sehr verschiedenen Richtungen hin erfolgen.

Gerlach, dessen Auffassung ich mich in manchen Punkten nähere, nimmt innerhalb der grauen Substanz als Mittelglied zwischen Fasern und Zellen ein Nervennetz an. Beweise für ein solches Netz sind indessen weder aus seinen eigenen, noch aus anderweitigen Beobachtungen zu entnehmen, sondern das, was positiv gesehen wird und was auch Gerlach bildlich darstellt[1]), ist immer nur ein reichverzweigtes Astwerk von Zellenausläufern, ohne eigentliche Anastomosen der sich durchkreuzenden Aeste. Wenn nun in der einen oder in der anderen Weise eine allseitig leitende Zwischenmasse zwischen die getrennt auslaufenden Nervenbahnen eingeschaltet ist, so setzt dies die Folge, dass innerhalb eines bestimmten Districtes die von einer Zuleitungsbahn übermittelte Erregung auf verschiedene Nachbarbahnen sich übertragen kann. Ebenso ist es unter dieser Voraussetzung annehmbar, dass bei vorhandener Leitungshemmung in den zunächst liegenden Bahnen entfernter liegende die Weiterleitung übernehmen können. Die physiologischen Erfahrungen über die Leitungsverhältnisse im Rückenmark sind einer strengen Durchführung des Princips isolirter Leitung keineswegs günstig und, wenigstens innerhalb der grauen Substanz, ist der Kreis der Leitungsmöglichkeiten ein so grosser, dass man mit der Annahme durchweg geschiedener Bahnen schwer durchkommt.

Es machen die eben ausgesprochenen Bemerkungen, welche zum Theil mit den auf histologischen Untersuchungen basirenden Sätzen von Golgi[2]) zusammentreffen, in keinerlei Weise den Anspruch, das Gesammtproblem von den centralen und von den peripherischen Nervenenden kurzer Hand abzuurtheilen, aber ich glaube, dass es gerechtfertigt ist, dasselbe mit neuer Fragestellung wieder zur Discussion zu bringen. Als feststehendes Princip vertrete ich dabei den Satz: dass jede Nervenfaser aus einer einzigen Zelle als Ausläufer hervorgeht. Diese ist ihr genetisches, ihr nutritives und ihr functionelles Centrum, alle anderen Verbindungen der Faser sind entweder nur mittelbare, oder sie sind secundär entstanden.

[1]) Stricker, Handbuch der Lehre von den Geweben S. 679, Fig. 223.

[2]) Archives italiennes de biologie. Bd. III. p. 285 u. ff.

Erklärung der Tafelfiguren.

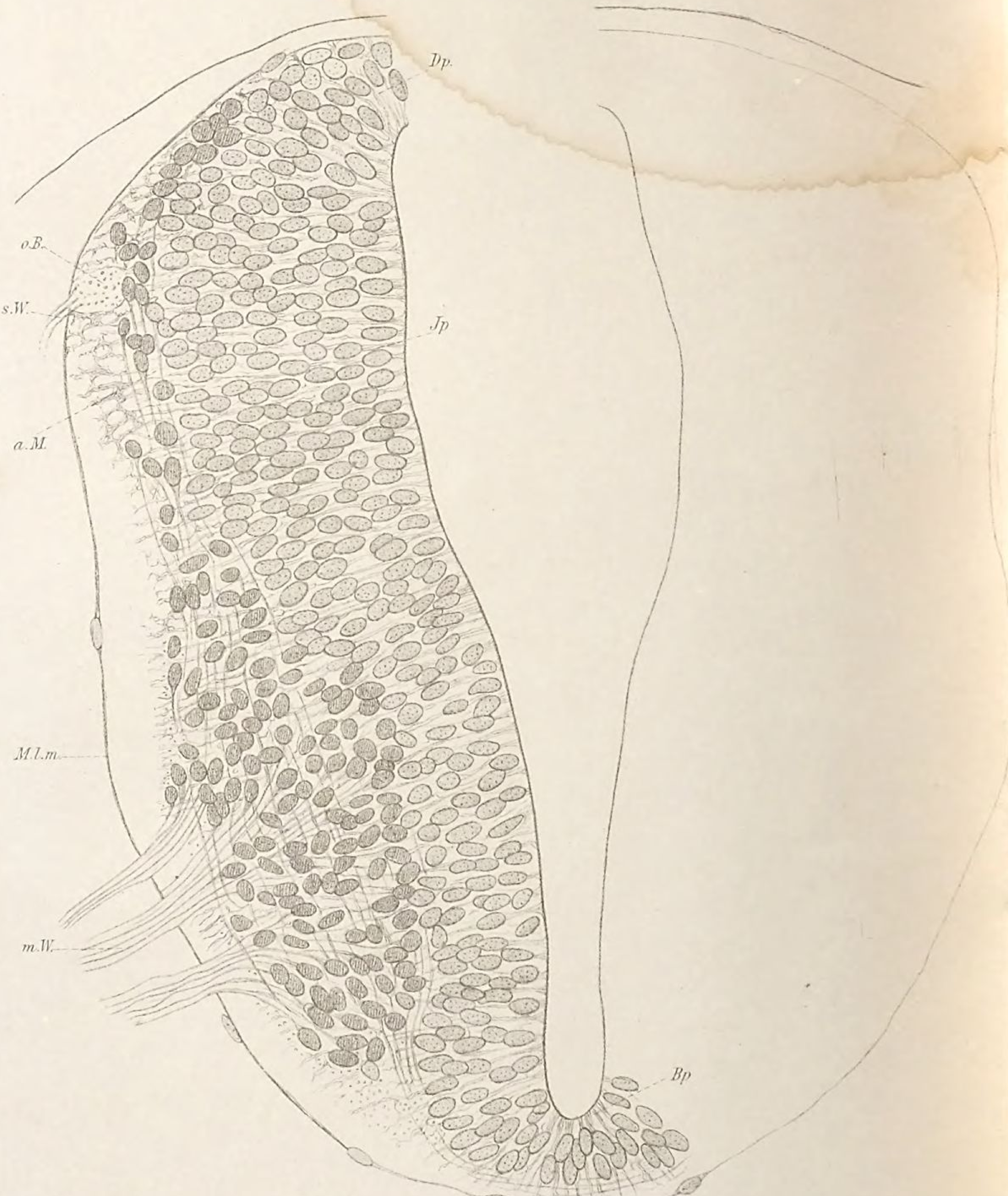
Gemeinsame Bezeichnungen:

a. M.	äussere Mantelschicht.	*i. M.*	innere Mantelschicht.
A. s.	Arteria sulci.	*I. p.*	Innenplatte.
A. sp. a.	Art. spinalis ant.	*M. l. m.*	Membr. limitans meningea.
A. sp. p.	Art. spinalis post.	*M. W.*	motorische Wurzeln.
Bp.	Bodenplatte.	*o. B.*	ovales Hinterstrangbündel.
C. f.	Cylinderfurche.	*R. f.*	Randfurche.
Dp.	Deckplatte.	*s. W.*	sensible Wurzel.
F. a.	Formatio arcuata.	*Sh.*	Seitenhorn.

Fig. 1. Durchschnitt durch das Rückenmark von Embryo Br_3. Vergrösserung 350. Aufnahme mit dem Sonnenmikroskop.

Fig. 2. Durchschnitt durch das Rückenmark (oberstes Dorsalmark) von Embryo *N*. Vergr. 200. Aufnahme mit dem Sonnenmikroskop. Die Stufe entspricht ziemlich nahe der von Hensen für das Kaninchen gegebenen (Zeitschr. f. Anatomie und Embryologie I, Taf. XI. Fig. 56), sie differirt indessen von dieser in verschiedenen nicht unwichtigen Punkten: 1) Die Formen an allen von mir beobachteten Schnitten sind entschieden eckiger, denn bei Hensen. Das ovale Bündel und die hintere Grenze des Markcylinders gehen bei letzterem fast unmittelbar in einander über, während sie bei mir durch ein beiderseits wohl abgesetztes Schaltstück von einander getrennt bleiben. Noch schärfer ist die Trennung bei S_1 (Fig. 6 des Textes). 2) Die sensibeln Wurzeln treten bei Hensen sammt und sonders zwischen bez. an die Zellen der Innenplatte, ein Verhältniss, das ich meinerseits nicht gesehen habe. 3) Die Einbiegung der Deckplatte ist bei Hensen nicht dargestellt, wie denn auch die Form des Centralkanales eine andere ist, als ich sie zu der Zeit vorfinde. 4) Die A. sulci nimmt eine meinen Wahrnehmungen nicht entsprechende Richtung. Dazu kommen noch verschiedene Abweichungen, wie z. B. die gleichmässige Behandlung von den Zellen der Innenplatte und die Darstellung einer aus feinen Fäden gebildeten Belegschicht. Ich darf eine also in's Einzelne gehende Kritik an Hensen's Abbildung ausüben, weil dieselbe in der That ausgezeichnet schön ist und weil sie alle anderen bisherigen Darstellungen an Genauigkeit weit übertrifft. So finde ich, um besondere Punkte hervorzuheben, Hensen's Zeichnung der Formatio arcuata von grosser Naturtreue, ebenso die Behandlung der weissen Substanz, die Darstellung des Radiärfasernsystems u. a. m.

Fig. 1.



His gez.

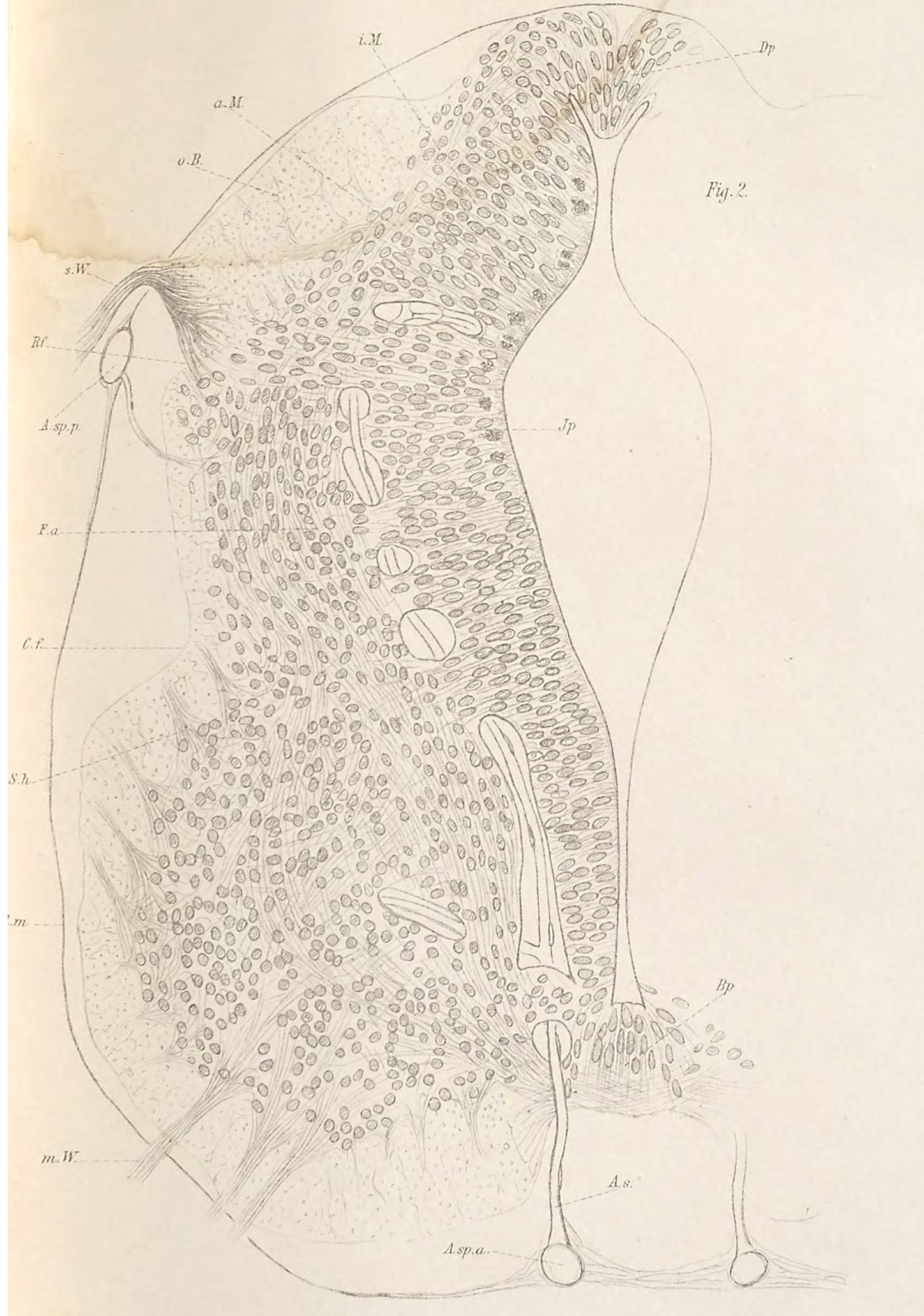


Fig. 2.

Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

ÜBER EINE AUFGABE

DER

AUSGLEICHUNGSRECHNUNG.

VON

H. BRUNS,
ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1886.

Vom Verfasser übergeben den 3. August 1886.
Der Abdruck vollendet den 8. September 1886.

515

ÜBER EINE AUFGABE

DER

AUSGLEICHUNGSRECHNUNG.

VON

H. BRUNS.

516

1.

Es seien x_1, x_2 . . x_n die n Unbekannten eines Problems, welche mit den q beobachteten Grössen a_1, a_2 . . a_q durch q Gleichungen von der Form

$$a_\alpha = \sum_\beta b_{\alpha\beta} x_\beta , \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2 \,.\,. q \\ \beta = 1, 2 \,.\,. n \end{pmatrix}$$

verbunden sind, wo die Coëfficienten $b_{\alpha\beta}$ gegebene Zahlen bedeuten. Ist in dem Falle $q > n$, um den es sich hier vorzugsweise handelt, als Ausgleichungs-Modus die Methode der kleinsten Quadrate vorgeschrieben, so sind die Werthe der Unbekannten völlig bestimmt, sobald die den beobachteten Grössen zukommenden mittleren Fehler m_α oder die entsprechenden Gewichte p_α gegeben sind; ebenso sind dann auch die m. F. $m(x_\alpha)$ der einzelnen Unbekannten bestimmt. Wir wollen nun annehmen, dass es in der Hand des Beobachters liege, durch passende Anordnung der Messungen zu bewirken, dass die p_α beliebige, vorgeschriebene Werthe annehmen; ferner sei, um a_α mit dem Gewichte Eins zu messen, der Arbeitsaufwand A_α erforderlich, dann ist, um durch Wiederholung der Messung dem a_α das Gewicht p_α zu ertheilen, der Arbeitsaufwand $A_\alpha p_\alpha$ nöthig und es ist der gesammte Arbeitsaufwand durch $\Sigma A_\alpha p_\alpha = A$ gegeben. Weiter wollen wir uns denken, dass es bei der Ermittlung der Unbekannten wesentlich nur auf eine derselben, sagen wir x_1, ankomme, dass also die anderen x nur Hülfsgrössen der Rechnung seien, dann ist offenbar unter den verschiedenen möglichen Anordnungen der Messung diejenige als die vortheilhafteste anzusehen, welche bei vorgeschriebenem Gesammt-Arbeitsaufwande A dem m. F. $m(x_1)$ seinen kleinsten Werth ertheilt; man würde also in einem solchen Falle zu der Aufgabe geführt, dasjenige Werthsystem der p_α oder kurz diejenige »Gewichtsvertheilung« zu finden, welche

unter Innehaltung des vorgeschriebenen Arbeitsaufwandes A den m. F. $m(x_1)$ zu einem Minimum macht. Wenn sich hierbei herausstellt, dass ein bestimmtes p_α den Werth Null anzunehmen hat, so besagt das offenbar, dass bei der Berechnung der x die betreffende Gleichung nicht benutzt wird, dass also das entsprechende a_α überhaupt nicht gemessen zu werden braucht.

Die genannte Aufgabe ist vor einiger Zeit aus Veranlassung eines bestimmten praktischen Falles vom Oberst Schreiber gestellt und gelöst worden*). Das Ergebniss ist ein äusserst merkwürdiges und lässt sich im Anschlusse an die vorhergegangene Auseinandersetzung folgendermassen aussprechen. Es giebt jedesmal entweder nur eine einzige oder aber unendlich viele »günstigste« Gewichtsvertheilungen. Im ersteren Falle sind $q - n$ von den Gewichten p_α gleich Null, also gerade nur n derselben von Null verschieden; im zweiten Falle giebt es unter den unendlich vielen Lösungen immer solche, bei denen ebenfalls gerade nur n von den Gewichten von Null verschieden sind. Zusammenfassend kann man also sagen: die vortheilhafteste Bestimmung von x_1 »muss oder darf« allemal unter denjenigen Anordnungen der Beobachtungen gesucht werden, welche zur Bestimmung der n Unbekannten x gerade nur die nothwendige und hinreichende Anzahl von Bestimmungsstücken messen. Aus diesem Satze ergiebt sich u. A. die a. a. O. ausgesprochene Consequenz, dass die Messung von zahlreichen überschüssigen Richtungen, welche bisher in der geodätischen Praxis bei Basisnetzen mit Vorliebe geübt wurde, im Allgemeinen als Arbeitsvergeudung anzusehen ist.

Es lässt sich von vornherein erwarten und durch einfache Beispiele auch leicht bestätigen, dass die für die einzelnen Unbekannten x_1, x_2 . . x_n günstigsten Gewichtsvertheilungen im Allgemeinen von einander verschieden ausfallen müssen; m. a. W. die günstigste Bestimmung einer einzelnen Unbekannten wird auf Kosten der Sicherheit der übrigen zu Stande gebracht. Nun ist der häufigere Fall aber gerade der, wo es sich nicht um eine einzelne Unbekannte, sondern um die gleichzeitige und thunlichst sichere Bestimmung

*) Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. Zeitschrift für Vermessungswesen 1882.

mehrerer derselben handelt. So ist z. B. bei der Ausmessung eines geodätischen Hauptdreiecksnetzes das eigentliche Ziel nicht die möglichst genaue Kenntniss einer einzelnen Seite oder eines einzelnen Winkels, sondern die Ermittlung der ganzen Figur, die man sich mathematisch als Inbegriff der Coordinaten aller Dreieckspunkte definirt denken kann. Aehnliches gilt, wenn man die Detailvermessung eines Sternhaufens auf ein z. B. aus heliometrischen Distanzen möglichst sicher abgeleitetes Hauptnetz stützen will*). Wir werden hiermit zu der Aufgabe geführt, diejenige Gewichtsvertheilung zu ermitteln, welche zur gleichzeitigen Bestimmung mehrerer Grössen oder, wie wir sagen wollen, zur Bestimmung eines Grössencomplexes die vortheilhafteste ist. Um diese Aufgabe der mathematischen Behandlung zugänglich zu machen, haben wir zunächst ein Kriterium aufzustellen, durch welches man, wenn zwei verschiedene Bestimmungen eines und desselben Grössencomplexes vorliegen, unzweideutig entscheiden kann, welche von den beiden Bestimmungen die bessere ist. Es seien $y_1, y_2 \,..\, y_s$ die Elemente des Grössencomplexes, auf dessen Ermittlung es bei einem gestellten Problem eigentlich ankommt, dann gehört zu jedem Bestimmungsmodus dieses Complexes ein bestimmtes Werthsystem der m. F. $m(y_1), m(y_2) \,..\, m(y_s)$; ferner werde die Grösse $m(y)$ durch die Gleichung

$$m(y)^2 = m(y_1)^2 + \cdot\cdot + m(y_s)^2$$

definirt, dann soll $m(y)$ der »mittlere zu befürchtende Fehler des Complexes

$$(y) = (y_1, y_2 \cdot\cdot y_s)«$$

oder kurz »m. F. des Complexes (y)« genannt werden. Analog soll, wenn m der m. F. für die Gewichtseinheit ist, die durch

$$m(y)^2 \,.\, p(y) = m^2$$

bestimmte Grösse $p(y)$ »Gewicht des Complexes (y)« heissen. Dies vorausgeschickt, wollen wir festsetzen, dass das vorhin erwähnte Kriterium durch den numerischen Betrag von $m(y)$ gegeben sein solle, d. h. von zwei verschiedenen Bestimmungen des Complexes (y)

*) Die Absicht, das demnächst zur Aufstellung gelangende Leipziger Heliometer zu derartigen Beobachtungen mit zu verwenden, ist in der That die ursprüngliche Veranlassung zu der vorliegenden Untersuchung gewesen.

soll diejenige als die bessere gelten, zu welcher das kleinere $m(y)$ oder das grössere $p(y)$ gehört.

Das gewählte Kriterium ist selbstverständlich nicht frei von Willkür; diese Willkür ist indessen in der Natur der Sache begründet und unvermeidlich, gerade so wie bei allen anderen Massbestimmungen für Dinge, die nicht direct als Zahlen- und Raumgrössen gegeben sind. Indem ich bezüglich der Motive für die getroffene Wahl auf die späteren Entwicklungen verweise, sollen hier kurz die sich daraus ergebenden Consequenzen zusammengestellt werden, deren Begründung den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet. Die Aufgabe, die zur Bestimmung des Complexes (y) günstigste Gewichtsvertheilung zu finden, lässt entweder nur eine oder aber unendlich viele Lösungen zu. Im letzteren Falle giebt es immer solche Lösungen, bei welchen gewisse Gewichte gleich Null werden, oder m. a. W. gewisse Bestimmungsstücke nicht zu messen sind. Es sei s die Anzahl der Elemente des Complexes, $s - k$ die Anzahl der zwischen den y_α etwa bestehenden »streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen«, n die Anzahl der zur Bestimmung des Complexes zu messenden nothwendigen und hinreichenden Stücke, r die kleinste Anzahl der bei der günstigsten Gewichtsvertheilung zu messenden Stücke, dann ist r zwischen den Grenzen n und

$$\tfrac{1}{2}k(k+1) + k(n-k)$$

enthalten. Diese beiden Grenzen fallen zusammen, wenn der Complex nur ein einziges Element enthält oder $s = k = 1$ wird, wie es nach dem Schreiber'schen Satze sein muss. Das Eintreten des Falles $r > n$ ist allemal an gewisse durch Gleichungen und Ungleichungen darzustellende Bedingungen geknüpft. Die Ermittlung der Gewichte selbst führt, sobald $r > n$, auf ziemlich verwickelte algebraische Gleichungen; es ist jedoch, abgesehen von der etwaigen Weitläuftigkeit der Rechnung, stets möglich, in jedem concreten Falle die gesuchten Gewichte direct durch successive Approximation zu ermitteln.

Die letzte Bemerkung ergiebt, dass die praktische Anwendung der gefundenen Sätze immer auf ein relativ enges Gebiet beschränkt bleiben wird, selbst wenn wir davon absehen, dass es sich hier stets nur um die Verminderung des Einflusses der zufälligen Fehler handelt, und dass die Frage nach der zweckmässigsten Anordnung

von Messungen ein durchaus anderes Aussehen annimmt, sobald das Vorhandensein merklicher systematischer Fehler gewiss oder wahrscheinlich ist. Es scheint mir jedoch, dass es einiges Interesse bietet, durch allgemeine Ueberlegungen nachzuweisen, wie eine folgerichtige Anwendung der Principien der Ausgleichungsrechnung ganz von selbst dazu führt, in der Benutzung dieses Algorithmus gewisse Schranken zu beobachten.

Bei der Begründung der vorstehend aufgeführten Sätze will ich an den Gedankengang der »Theoria combinationis« von Gauss anknüpfen und des Zusammenhanges halber zunächst die hier in Betracht kommenden Hauptmomente der Gauss'schen Entwicklung recapituliren *).

2.

Das Vertrauen, welches der Werth einer beobachteten oder aus Beobachtungen berechneten Grösse verdient, wird gemessen durch den »mittleren zu befürchenden Fehler« dieser Grösse. Die Bezeichnung »m. F.« ist hierbei im Sinne der Th. comb. zu verstehen und deshalb von der Voraussetzung eines bestimmten Fehlergesetzes unabhängig. In irgend einem Problem seien $x_1, x_2 \ldots x_n$ die wahren Werthe derjenigen Grössen, welche als Unbekannte in die Rechnung eingeführt werden, wobei es gleichgültig sein soll, ob die x gerade diejenigen Stücke sind, auf deren Ermittlung es bei dem Problem eigentlich ankommt, oder ob sie nur als Zwischengrössen der Rechnung auftreten. Zur Ermittlung der x werden gewisse Functionen derselben, die wir als von einander verschieden annehmen dürfen, gemessen; die Anzahl dieser Functionen sei q, ihre wahren Werthe $r_1, r_2 \ldots r_q$, die beobachteten Werthe $r_1 + \varrho_1 \ldots$, und die den Messungen zukommenden Gewichte resp. $p_1, p_2 \ldots p_q$. Die wahren Werthe der Un-

*) Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf hinweisen, dass in den meisten Arbeiten über die Methode d. kl. Qu. wie mir scheint völlig die Bedeutung ignorirt wird, welche bei der Begründung der Ausgleichungsrechnung dem Gedankengange der »Theoria comb. etc.« zukommt und von Gauss selber (s. Briefwechsel mit Bessel p. 523) ausdrücklich beansprucht wird. Man kann dies wenigstens aus der Rolle schliessen, welche in den meisten Darstellungen dem Gauss'schen Fehlergesetz zugewiesen wird, mag nun dasselbe kritisirt oder einfach acceptirt werden.

bekannten sind uns unzugänglich; man muss sich deshalb darauf beschränken, statt der x ein gewisses Werthsystem $x_1 + \xi_1 \, . \, . \, x_n + \xi_n$ zu ermitteln, welches nach irgend einem bestimmten Kriterium aus allen möglichen Werthsystemen als das relativ beste ausgewählt wird. In dem Falle $q > n$, welcher uns hier allein zu beschäftigen hat, kommen nun die verschiedenen Rechnungsvorschriften, welche man zu dem gedachten Zwecke ersonnen hat, auf folgendes Schema hinaus. Man setzt erstlich in bekannter Weise das Gleichungssystem

$$\varrho_\alpha = u_{\alpha 1}\,\xi_1 + \,.\,.\, + u_{\alpha n}\,\xi_n$$

oder kurz

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} \varrho_\alpha = u_\alpha\,, \quad u_\alpha \equiv \sum\limits_\beta u_{\alpha\beta}\,\xi_\beta\,, \text{*)} \\ (\alpha = 1, 2 \,.\,.\, q\,, \quad \beta = 1, 2 \,.\,.\, n) \end{array}\right\}$$

an, wo die $u_{\alpha\beta}$ bekannte Grössen bedeuten. Zweitens bildet man, um sich von den zwischen den Gleichungen (1) im Allgemeinen bestehenden Widersprüchen zu befreien, nach einer bestimmten Regel durch lineare Verbindung der Gleichungen (1) ein neues System von gerade soviel Gleichungen, als zur Bestimmung der ξ nothwendig und hinreichend sind, und betrachtet die daraus gefundenen ξ als die gesuchten Grössen. Hierbei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass die Aufgabe überhaupt eine bestimmte Lösung zulässt, dass also die zu je n Gleichungen (1) gehörigen Determinanten $|u_{\alpha\beta}|$ nicht sämmtlich verschwinden. Setzen wir voraus — was ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit geschehen kann — dass zwischen den x oder den ξ keine streng zu erfüllenden Bedingungsgleichungen bestehen, so wird die Anzahl der aus (1) zu bildenden Endgleichungen gerade gleich n. Das angegebene Schema lässt sich dann kurz auch folgendermassen darstellen: man setzt ein gewisses System von Multiplicatoren

$$(2)\qquad \begin{array}{l} X_{11}\,;\ X_{21}\,.\,.\,X_{q1} \\ .\,. \\ X_{1n}\,;\ X_{2n}\,.\,.\,X_{qn} \end{array}\,,$$

an, wo die X den n einschränkenden Bedingungen

$$(3)\qquad \sum_\alpha X_{\alpha\beta}\,u_\alpha \equiv \xi_\beta\,, \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2 \,.\,.\, q \\ \beta = 1, 2 \,.\,.\, n \end{pmatrix}$$

unterworfen sind und bildet aus (1) die n linearen Verbindungen

*) Das Zeichen $\equiv$ soll wie üblich als Identitätszeichen dienen.

$$\sum_\alpha \varrho_\alpha X_{\alpha\beta} = \sum_\alpha u_\alpha X_{\alpha\beta},$$

welche mit Rücksicht auf (3) direct

$$\xi_\beta = \sum_\alpha \varrho_\alpha X_{\alpha\beta}$$

d. h. die gesuchten Grössen ξ_β ergeben. Die Relationen (3) sind, da $q > n$, zur Bestimmung der X nicht hinreichend; die erforderliche Ergänzung dieser Gleichungen erfolgt durch diejenigen Bedingungen, welche dem gerade gewählten Ausgleichungsverfahren eigenthümlich sind. Jedem zulässigen Ausgleichungsverfahren entspricht ein bestimmtes Factorensystem $X_{\alpha\beta}$; umgekehrt dürfen wir jedes den Bedingungen (3) genügende Factorensystem als einen möglichen Ausgleichungs-Modus ansehen. Der bei einem beliebig ausgewählten Ausgleichungs-Modus in der Bestimmung von ξ_β zu befürchtende m. F. $m(\xi_\beta)$ ist durch

$$m(\xi_\beta)^2 = \sum_\alpha m_\alpha^2 X_{\alpha\beta}^2 = m^2 \sum_\alpha \frac{X_{\alpha\beta}^2}{p_\alpha}$$

gegeben, wo $m, m_1 \ldots m_q$ die zu den Gewichten $1, p_1 \ldots p_q$ gehörigen m. F. bedeuten. Unter den unendlich vielen möglichen Ausgleichungs-Modis existirt ein »günstigster«, nämlich die Methode der kleinsten Quadrate; für diesen und nur für diesen nehmen die Grössen $m(\xi_1), \ldots m(\xi_n)$ gleichzeitig die kleinsten Werthe an, welche sie bei den gegebenen Gewichten der ϱ überhaupt annehmen können.

Wir denken uns nun weiter das System derjenigen Grössen angesetzt, deren Ermittlung jedesmal das eigentliche Ziel der Rechnung bilden soll. Diese Grössen sind Functionen der für die Rechnung zunächst eingeführten Unbekannten x. Die Anzahl dieser Functionen sei s, wo s sowohl grösser als auch kleiner als n sein kann; ihre wahren Werthe seien $y_1 \ldots y_s$; ferner gehe jedes y_α in $y_\alpha + \eta_\alpha$ über, wenn für die x die Grössen $x + \xi$ substituirt werden, dann ist, wenn wir noch zur Abkürzung

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta} = v_{\alpha\beta}, \quad v_\alpha = \sum_\beta v_{\alpha\beta}\, \xi_\beta,$$

$$Y_{\gamma\alpha} = \sum_\beta v_{\alpha\beta} X_{\gamma\beta},$$

$$(\alpha = 1, 2 \ldots s, \quad \beta = 1, 2 \ldots n, \quad \gamma = 1, 2 \ldots q)$$

einführen,

$$\eta_\alpha = v_\alpha ;$$

$$\eta_\alpha = \sum_\beta v_{\alpha\beta}\, \xi_\beta = \sum_{\beta\gamma} v_{\alpha\beta}\, X_{\gamma\beta}\, \varrho_\gamma ,$$

$$\eta_\alpha = \sum_\gamma Y_{\gamma\alpha}\, \varrho_\gamma .$$

Der m. F. $m(\eta_\alpha)$ ist hiernach gegeben durch

$$m(\eta_\alpha)^2 = \sum_\gamma m_\gamma^2\, Y_{\gamma\alpha}^2 = m^2 \sum_\gamma \frac{Y_{\gamma\alpha}^2}{p_\gamma} ,$$

ferner der m. F. $m(\eta)$ des aus den Elementen $\eta_1 \,.\,.\, \eta_s$ gebildeten Grössencomplexes

$$(\eta) = (\eta_1 \,.\,.\, \eta_s)$$

durch

$$m(\eta)^2 = \sum_\alpha m(\eta_\alpha)^2 = m^2 \sum_\gamma \frac{Q_\gamma^2}{p_\gamma} ,$$

wo

$$Q_\gamma^2 = \sum_\alpha Y_{\gamma\alpha}^2 .$$

Benutzt man zur Berechnung der ξ den günstigsten Ausgleichungs-Modus, so nehmen für die daraus folgenden η die m. F. $m(\eta_1) \,.\,.\, m(\eta_s)$ und $m(\eta)$ gleichzeitig ihre kleinsten Werthe an; wir können also sagen: um bei vorgeschriebenen Gewichten der ϱ den für die Bestimmung des Grössencomplexes η günstigsten Ausgleichungs-Modus $X_{\alpha\beta}$ vollständig zu charakterisiren, genügt die eine Bedingung, dass $m(\eta)$ Minimum wird. Dieselbe Eigenschaft würde offenbar auch noch zutreffen, wenn wir statt $m(\eta)$ irgend einen ganz und rational mit positiven Zahlencoëfficienten aus den $m(\eta_1) \,.\,.\, m(\eta_s)$ gebildeten Ausdruck zu Grunde gelegt hätten. Das gefundene Resultat genügt jedoch noch nicht für unseren eigentlichen Zweck, denn wir suchen ein Kriterium, nach welchem wir zwei verschiedene Bestimmungsweisen des Complexes (η) in Bezug auf die ihnen zuzusprechende Sicherheit mit einander vergleichen können nicht allein wenn nur die benutzten Ausgleichungs-Modi, sondern auch wenn die den beobachteten ϱ zukommenden Gewichte in den beiden Fällen von einander verschieden sind. Wenn wir nun dem hier für $m(\eta)$ gewählten Ausdrucke die Rolle eines solchen Kriteriums zuertheilen, so ist diese Wahl wenigstens zu motiviren, da eine auf zwingende Gründe gestützte Rechtfertigung, wie schon erwähnt, nicht gegeben werden kann.

Geht man davon aus, dass das verlangte Kriterium durch den numerischen Werth eines aus den $m(\eta_\alpha)$ zusammengesetzten Ausdruckes

$$m(\eta) = F(m(\eta_1) \,..\, m(\eta_s))$$

gegeben werden soll, so wird man an letzterem zunächst folgende Ansprüche stellen. Die Function F muss erstlich in Bezug auf die $m(\eta_\alpha)$ homogen von der ersten Ordnung sein, damit eine Aenderung in der Einheit, durch welche die $m(\eta)$ gemessen werden, die Beziehung zwischen denselben nicht ändert. Zweitens wird man völlige Symmetrie in Bezug auf die $m(\eta_1) \,..\, m(\eta_s)$ fordern, da die einzelnen Elemente η_1, η_2 .. des Complexes (η) als gleichberechtigt gelten. Wählt man nun für F eine möglichst einfache Form, da sich für die Benutzung complicirterer Ausdrücke keinerlei triftige Gründe anführen lassen würden, so empfiehlt sich die Einführung von Potenzsummen oder die Definition

$$m(\eta)^r = \sum_\alpha m(\eta_\alpha)^r$$

durch den Umstand, dass der Spielraum, innerhalb dessen sich die $m(\eta_\alpha)$ bewegen dürfen, nach oben hin jedesmal durch den Werth von $m(\eta)$ in bestimmter Weise begrenzt ist, was bei anderen einfachen symmetrischen Ausdrücken, wie z. B.

$$m(\eta)^s = m(\eta_1)\, m(\eta_2) \,..\, m(\eta_s),$$

nicht der Fall sein würde. Unter den verschiedenen Werthen, welche man in der oben hingeschriebenen Potenzsumme dem Exponenten r geben kann, ist die Wahl $r = 2$ mit Rücksicht auf die Einfachheit aller weiteren Entwickelungen die vortheilhafteste; ferner erreicht man dadurch zugleich eine möglichst weit gehende Analogie mit den Sätzen, welche für die m. F. einzelner Grössen gelten. Ein Theil dieser Sätze, die ich hier nicht weiter verfolgen will, ergiebt sich auf einfache Weise aus der Bemerkung, dass, wenn der Complex (η) durch Zusammenlegung zweier kleinerer Complexe (η') und (η'') entstanden ist, wenn man also

$$(\eta) = (\eta') + (\eta'')$$

ansetzen kann, allemal

$$m(\eta)^2 = m(\eta')^2 + m(\eta'')^2$$

ist.

Die Voraussetzung, dass die η_α innerhalb des Complexes gleich-

berechtigt sein sollen, lässt sich übrigens durch die allgemeinere ersetzen, dass zwischen den η_α ein durch Zahlen ausdrückbarer »Rangunterschied« vorhanden sei. Angenommen z. B., dass in dem Complexe (η) die Elemente $\eta_2, \eta_3 \,..\, \eta_s$ als gleichberechtigt zu gelten haben, dass aber dem Elemente η_1 eine grössere Wichtigkeit zukomme und dass seine Bedeutung der von k Elementen aus der Reihe $\eta_2 \,..\, \eta_s$ zusammengenommen gleichzusetzen sei, dann wird man diesen Rangunterschied dadurch berücksichtigen, dass man in dem Complexe (η) das Element η_1 nicht einmal, sondern k-mal ansetzt. Statt dessen kann man aber auch, ohne in dem Werthe von $m(\eta)$ etwas zu ändern, das Element η_1 nur einmal, aber mit dem Factor $\sqrt{k}$ versehen ansetzen. Allgemein wird man, wenn in dem Complexe (η) der relative Rang der Elemente $\eta_1 \,..\, \eta_s$ durch die Zahlen $k_1 \,..\, k_s$ ausgedrückt ist, den Complex in der Form

$$(\eta) = (\eta_1 \sqrt{k_1}\,, \;..\; \eta_s \sqrt{k_s})$$

ansetzen und hat dann die Elemente

$$\eta_1 \sqrt{k_1}\,, \;..\; \eta_s \sqrt{k_s}$$

als gleichberechtigt oder als von gleichem Range anzusehen. Im Folgenden werden wir uns der Einfachheit halber die Quadratwurzeln aus den Rangfactoren immer mit den Ausdrücken für die η bereits vereinigt oder die Elemente η_α des Complexes (η) bereits auf gleichen Rang gebracht denken.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier kurz noch zwei andere Kriterien zu berühren, die auf den ersten Blick ganz plausibel erscheinen. Da unsere eigentliche Aufgabe darauf ausgeht, die für die Bestimmung des Complexes (η) günstigste Gewichtsvertheilung zu ermitteln, so könnte man wegen der Ranggleichheit zwischen den η_α die Bedingung stellen, dass die m. F. $m(\eta_\alpha)$ einander gleich sein sollen und ihr gemeinsamer Werth möglichst klein ausfalle. Diese für besondere Fälle, z. B. Theilungsfehlerbestimmungen, ganz zweckmässige Festsetzung ist indessen nicht allgemein verwendbar. Denkt man sich z. B. von einer Grundlinie ausgehend eine langgestreckte Kette von geodätischen Hauptdreiecken gebildet und betrachtet die Coordinaten der Dreieckspunkte als die Elemente des gesuchten Complexes, so werden die Coordinaten der weiter von der Ausgangsseite entfernten Punkte nothwendiger Weise mit ent-

sprechend geringerer Sicherheit bestimmt; die Forderung gleicher Werthe für die verschiedenen $m(\eta_\alpha)$ würde deshalb auf Widersprüche führen.

Ein anderes Verfahren besteht darin, die günstigste Gewichtsvertheilung durch die Bedingung zu charakterisiren, dass der grösste unter den m. F. $m(\eta_\alpha)$ auf einen möglichst kleinen Betrag herabgedrückt werde. Wählt man nun diesen Betrag als Mass für die Sicherheit des Complexes (η), so gelangt man ebenfalls zu Widersprüchen. Man denke sich nämlich, dass zwei verschiedene Bestimmungen des Complexes vorliegen mit den m. F.

$$m(\eta_1)_1 \,.\,.\, m(\eta_s)_1\,,$$
$$m(\eta_1)_2 \,.\,.\, m(\eta_s)_2\,,$$

und es seien $m(\eta_1)$ und $m(\eta_1)_2$ die grössten Fehler in den beiden Reihen, ferner

$$m(\eta_1)_1 = m(\eta_1)_2\,,$$

dagegen für $\alpha = 2, 3 \,.\,.\, s$

$$m(\eta_\alpha)_1 > m(\eta_\alpha)_2\,,$$

dann würden beide Bestimmungen, nur nach dem Maximalfehler gemessen, als gleichwerthig gelten, während ganz unzweifelhaft die zweite als die bessere anzusehen ist.

Indem wir daher mit Rücksicht auf die vorstehenden Bemerkungen den durch

$$m(\eta)^2 = \sum_\alpha m(\eta_\alpha)^2$$

definirten m. F. eines Complexes schlechthin als Mass für die demselben zuzusprechende Sicherheit aufstellen, haben wir jetzt die hieraus fliessenden Consequenzen näher zu untersuchen.

3.

Es war gefunden worden:

$$\left(\frac{m(\eta)}{m}\right)^2 = \sum_\gamma \frac{Q_\gamma^2}{p_\gamma}\,,$$

$$Q_\gamma^2 = \sum_\alpha Y_{\gamma\alpha}^2 = \sum_{\alpha\beta\delta} v_{\alpha\beta}\, v_{\alpha\delta}\, X_{\gamma\beta}\, X_{\gamma\delta} = \sum_{\beta\delta} V_{\beta\delta}\, X_{\gamma\beta}\, X_{\gamma\delta}\,,$$

wo der Kürze halber

$$V_{\beta\delta} = \sum_\alpha v_{\alpha\beta}\, v_{\alpha\delta}$$

gesetzt wurde, und die Ausdehnung der Summationen unmittelbar ersichtlich ist. Wir betrachten für den Augenblick die quadratische Form

$$F = \sum_{\beta\delta} V_{\beta\delta} X_\beta X_\delta$$

mit den Variabeln X_β, X_δ und denken uns eine orthogonale Transformation

$$X_\alpha = \sum_\beta l_{\alpha\beta} Z_\beta, \quad (\alpha, \beta = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

aufgestellt, durch welche F in die Form

$$F = \sum_\alpha k_\alpha^2 Z_\alpha^2, \quad (\alpha = 1, 2 \,.\,.\, n)$$

übergeführt wird. Eine solche Transformation, bei welcher die k_α^2 sich als reelle positive Grössen ergeben, existirt immer, da F aus einer Summe von Quadraten entstanden ist. Von den k_α kann eine gewisse Anzahl verschwinden, was z. B. sicher der Fall ist, wenn $s < n$. Mittelst der Substitution $l_{\alpha\beta}$ bilden wir ferner das neue System von Unbekannten

$$\zeta_\alpha = \sum_\beta l_{\beta\alpha} \xi_\beta,$$

welche wir statt der ξ in die Gleichungen $\varrho_\alpha = u_\alpha$ und $\eta_\alpha = v_\alpha$ einführen wollen. Hierdurch wird an dem Zusammenhange zwischen den Grössen η_α und ϱ_α sowie an den Werthen der $m(\eta_\alpha)$ nichts geändert, während in den früher aufgestellten Gleichungen die $u_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\beta}$ durch die entsprechenden transformirten Grössen zu ersetzen sind. Aus den Identitäten (3) oder

$$\xi_\beta \equiv \sum_\alpha X_{\alpha\beta} u_\alpha$$

folgt

$$\zeta_\gamma = \sum_{\alpha\beta} l_{\beta\gamma} X_{\alpha\beta} u_\alpha = \sum_\alpha u_\alpha \sum_\beta l_{\beta\gamma} X_{\alpha\beta} = \sum_\alpha u_\alpha Z_{\alpha\gamma},$$

wenn

$$Z_{\alpha\gamma} = \sum_\beta l_{\beta\gamma} X_{\alpha\beta}, \quad X_{\alpha\delta} = \sum_\gamma l_{\delta\gamma} Z_{\alpha\gamma}$$

gesetzt wird. Beim Uebergange von den ξ zu den ζ ist also jeder Ausgleichungs-Modus $X_{\alpha\beta}$ durch den entsprechenden $Z_{\alpha\beta}$ zu ersetzen. Für jeden Werth des ersten Index α hängen also die Grössen

$$X_{\alpha 1} \ldots X_{\alpha n}$$
$$Z_{\alpha 1} \ldots Z_{\alpha n}$$

durch dieselben Relationen von einander ab, wie vorher die Variabeln X_α, Z_α in der quadratischen Form F. Es ist daher

$$Q_\gamma^2 = \sum_\alpha k_\alpha^2 Z_{\gamma\alpha}^2 ,$$

$$\left(\frac{m(\eta)}{m}\right)^2 = \sum_{\alpha\gamma} \frac{1}{p_\gamma} k_\alpha^2 Z_{\gamma\alpha}^2 = \sum_\alpha k_\alpha^2 \sum_\gamma \frac{Z_{\gamma\alpha}^2}{p_\gamma} ,$$

$$m(\eta)^2 = \sum_\alpha k_\alpha^2 m(\zeta_\alpha)^2 ,$$

wo $m(\zeta_\alpha)$ den bei dem Ausgleichungs-Modus $Z_{\alpha\beta}$ auftretenden m. F. von ζ_α bedeutet. Bildet man also den Grössencomplex

$$(\zeta) = (k_1 \zeta_1, k_2 \zeta_2 \ldots k_n \zeta_n) ,$$

der in Wirklichkeit nur soviele Elemente enthält, als von Null ververschiedene k_α vorhanden sind, so ist

$$m(\eta) = m(\zeta) ,$$

d. h. bei der Untersuchung des m. F. von (η) kann der Complex (η) durch einen anderen (ζ) ersetzt werden, dessen Elementenanzahl höchstens gleich der kleineren der beiden Zahlen n und s ist.

Es seien $k_1, k_2 \ldots k_r$ die von Null verschiedenen Grössen in der Reihe der k_α, dagegen seien $k_{r+1} \ldots k_n$ gleich Null, dann wollen wir statt der ζ die Unbekannten τ durch die Bedingungen

$$k_1 \zeta_1 = \tau_1 , \ldots k_r \zeta_r = \tau_r ,$$
$$\zeta_{r+1} = \tau_{r+1} , \ldots \zeta_n = \tau_n$$

einführen und den Complex

$$(\tau) = (\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r)$$

ansetzen. An die Stelle jedes Ausgleichungs-Modus $Z_{\alpha\beta}$ tritt ein Ausgleichungs-Modus $T_{\alpha\beta}$, wo

$$k_\gamma Z_{\alpha\gamma} = T_{\alpha\gamma} , \quad (\gamma = 1, 2 \ldots r) ,$$
$$Z_{\alpha\gamma} = T_{\alpha\gamma} , \quad (\gamma = r+1 \ldots n) ;$$

und es ist, wenn durch alle diese Substitutionen

$$u_\alpha \equiv \sum_\beta u_{\alpha\beta} \xi_\beta \text{ in } t_\alpha \equiv \sum_\beta t_{\alpha\beta} \tau_\beta$$

übergeführt wird,

$$\sum_\alpha t_\alpha T_{\alpha\beta} \equiv \tau_\beta ,$$

$$Q_\gamma^2 = \sum_\alpha T_{\gamma\alpha}^2 , \quad (\alpha = 1, 2 \ldots r) ,$$

$$\left(\frac{m(\eta)}{m}\right)^2 = \left(\frac{m(\zeta)}{m}\right)^2 = \left(\frac{m(\tau)}{m}\right)^2 = \sum_\gamma \frac{Q_\gamma^2}{p_\gamma} .$$

Wenn also die Beobachtungsgleichungen

$$\varrho_\alpha = \sum u_{\alpha\beta} \xi_\beta$$

und der Complex

$$(\eta) = (\eta_1 \,.\,.\, \eta_s)$$

vorgelegt sind, so lässt sich die Untersuchung des m. F. $m(\eta)$ zurückführen auf die des m. F. $m(\tau)$ eines Complexes

$$(\tau) = (\tau_1 \,.\,.\, \tau_r),$$

welcher nur die r ersten Unbekannten $\tau_1 \,.\,.\, \tau_r$ in den transformirten Beobachtungsgleichungen

$$\varrho_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, \tau_\beta \equiv t_\alpha$$

umfasst.

Wir nehmen nun wieder die Voraussetzung auf, dass die Werthe der den ϱ_α zukommenden Gewichte p_α von dem Belieben des Beobachters abhängen; ist ferner, um ϱ_α mit dem Gewichte Eins oder dem m. F. m zu messen, der Arbeitsaufwand A_α erforderlich, so lautet unsere Aufgabe offenbar so: es ist unter Innehaltung des vorgeschriebenen Gesammtarbeitsaufwandes $A = \Sigma A_\alpha p_\alpha$ die Gewichtsvertheilung p_α und der Ausgleichungs-Modus $T_{\alpha\beta}$ so zu wählen, dass $m(\tau)$ möglichst klein wird. Zur Vereinfachung der Rechnung können wir ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die A_α sämmtlich gleich Eins seien. Wenn nämlich der Arbeitsaufwand $A_\alpha p_\alpha$ die Grösse ϱ_α mit dem Gewichte p_α oder dem m. F. $m : \sqrt{p_\alpha}$ ergiebt, so liefert derselbe Arbeitsaufwand die Grösse $C\varrho_\alpha$ mit dem m. F. $Cm : \sqrt{p_\alpha}$; der Arbeitsaufwand Eins ergiebt also $C\varrho_\alpha$ mit dem m. F. $Cm\sqrt{A_\alpha}$. Denken wir uns also jede Gleichung $\varrho_\alpha = t_\alpha$ vor Beginn der weiteren Untersuchung durch $\sqrt{A_\alpha}$ dividirt, und an die Stelle von $\varrho_\alpha : \sqrt{A_\alpha}$ und $t_{\alpha\beta} : \sqrt{A_\alpha}$ einfach ϱ_α und $t_{\alpha\beta}$ geschrieben, so können wir sagen, der Arbeitsaufwand p_α liefert jedes ϱ_α mit dem Gewichte p_α und der Gesammtarbeitsaufwand ist gleich der Summe der Gewichte.

Hiernach haben wir jetzt die Gewichte p_α und den Ausgleichungsmodus $T_{\alpha\beta}$ so zu wählen, dass

$$m(\tau)^2 = \sum_\alpha m(\tau_\alpha)^2, \quad (\alpha = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

ein Minimum wird und die Summe der p_α einen constanten Werth P besitzt. Nun wird $m(\tau)$ bei vorgeschriebenen Gewichten ein Minimum, wenn man für $T_{\alpha\beta}$ den durch die Methode der kleinen Quadrate gegebenen Ausgleichungs-Modus wählt. Berechnet man

also hiernach die $m(\tau_\alpha)$ als Functionen der p_α, so wird $m(\tau)$ eine Function der p_α allein, deren Coëfficienten nur noch von den $t_{\alpha\beta}$ abhängen. Genauer gesprochen wird $m(\tau)^2$ eine rationale Function der p_α, deren Zähler und Nenner in Bezug auf jedes einzelne p linear, in Bezug auf alle p dagegen homogen von der Ordnung $n-1$ resp. n sind, während die Coëfficienten sich unschwer durch die $t_{\alpha\beta}$ in Determinantenform darstellen lassen. Statt jedoch durch directe Aufsuchung des Minimums dieser rationalen Function die Lösung unserer Aufgabe zu versuchen, wollen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, indem wir nämlich vorläufig die Gewichte und den Ausgleichungs-Modus als völlig unabhängig von einander ansehen, und zunächst diejenige Gewichtsvertheilung aufsuchen, welche unter Annahme eines ganz beliebig vorgeschriebenen Ausgleichungs-Modus $T_{\alpha\beta}$ den Ausdruck

$$H^2 = \sum_\gamma \frac{Q_\gamma^2}{p_\gamma}$$

zu einem (relativen) Minimum macht. Die Substitution der so gefundenen Gewichtsvertheilung verwandelt H in eine Function der $T_{\alpha\beta}$ allein, und letztere Function ist dann durch angemessene Wahl der $T_{\alpha\beta}$ auf ihren kleinsten Werth zu bringen, der zu gleicher Zeit das absolute Minimum des ursprünglichen Ausdruckes von $m(\tau)$ ergiebt.

Da die p_α wesentlich positive Grössen sind, so setzen wir für den Augenblick $p_\alpha = \pi_\alpha^2$ und haben zur Ausführung des ersten Schrittes die nach den π_α genommenen Ableitungen von

$$\sum_\gamma \left(\frac{Q_\gamma}{\pi_\gamma}\right)^2 + g\left(\sum_\gamma \pi_\gamma^2 - P\right)$$

einzeln gleich Null zu setzen. Dies liefert der Reihe nach die Relationen

$$Q_\gamma^2 = g\pi_\gamma^4,$$
$$Q_\gamma = p_\gamma \sqrt{g},$$
$$H^2 = gP,$$
$$\sum_\gamma Q_\gamma = P\sqrt{g},$$
$$H\sqrt{P} = \frac{m(\tau)}{m} = \sum_\gamma Q_\gamma,$$
$$\frac{p_\alpha}{P} = \frac{Q_\alpha}{\sum_\gamma Q_\gamma},$$

wo unter Q_γ die positiven Werthe der Quadratwurzeln aus

$$Q_\gamma^2 = \sum_\alpha T_{\gamma\alpha}^2, \quad (\alpha = 1, 2 \,.\,.\, r)$$

zu verstehen sind. Zu jedem Ausgleichungsmodus $T_{\alpha\beta}$ gehört also stets eine und nur eine relativ günstigste Gewichtsvertheilung.

Die Untersuchung ist hiernach jetzt auf die Aufgabe zurückgeführt, das Minimum von

$$K = \sum_\alpha Q_\alpha = \sum_\alpha (T_{\alpha 1}^2 + T_{\alpha 2}^2 + \cdot\cdot + T_{\alpha r}^2)^{\frac{1}{2}}$$

zu ermitteln. Die $T_{\alpha\beta}$ sind reelle Grössen, deren Variabilität einzig und allein durch die Identitäten

$$\sum_\alpha T_{\alpha\beta}\, t_\alpha \equiv \tau_\beta$$

beschränkt ist. Diese Identitäten zerfallen in die Gleichungen

$$\sum_\alpha T_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma},$$

$$(\alpha = 1, 2 \,.\,.\, q, \quad \beta = 1, 2 \,.\,.\, r, \quad \gamma = 1, 2 \,.\,.\, n),$$

wo $e_{\beta\gamma}$ die Zahl Eins oder Null bedeutet, je nachdem die Indices β, γ einander gleich sind oder nicht.

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich besonders einfach, wenn $r = 1$, d. h. wenn der Complex (τ) sich auf ein einziges Element τ_1 reducirt. Die Q sind dann die absoluten Beträge von q Grössen

$$T_{11}, \; T_{21} \ldots T_{q1},$$

welche mit einander durch die n Gleichungen

$$(4) \qquad \sum_\alpha T_{\alpha 1}\, t_{\alpha\gamma} = e_{1\gamma}$$

verbunden sind. Die wesentlichen Merkmale der Lösung sind bereits von Gauss (Theoria motus art. 186) angegeben worden; eine genauere Discussion der verschiedenen möglichen Fälle habe ich an anderer Stelle (Mathematische Annalen Bd. 20 p. 455) durchgeführt. Darnach lässt sich das Resultat folgendermassen formuliren: wenn nur eine Lösung $T_{\alpha 1}$ existirt, so verschwinden $q - n$ von den Multiplicatoren $T_{\alpha 1}$; ist mehr als eine Lösung vorhanden, so giebt es allemal unendlich viele, und unter diesen immer solche, für welche ebenfalls nur n der Multiplicatoren $T_{\alpha 1}$ von Null verschieden sind. Wenn nun ein $T_{\alpha 1}$ oder Q_α verschwindet, so verschwindet auch das entsprechende p_α, d. h. die Gleichung

$\varrho_\alpha = t_\alpha$ ist bei der Bestimmung von τ als nicht vorhanden zu betrachten. Beide Fälle zusammenfassend kann man also sagen: bei der günstigsten Gewichtsvertheilung müssen entweder oder dürfen $q - n$ von den Gewichten gleich Null gesetzt werden. Dies ist der früher erwähnte Schreiber'sche Satz. Wenn nun nur n Gewichte von Null verschieden sind, d. h. nur n von den Gleichungen $\varrho_\alpha = t_\alpha$ benutzt werden, so sind damit die Factoren T_{α_1}, einschliesslich der $q - n$ verschwindenden, völlig bestimmt und zwar durch die Gleichungen (4), ebenso auch die Gewichte.

4.

Zu dem allgemeinen Falle $r = 2, 3 \,..\, n$ zurückkehrend, wollen wir zunächst zeigen, dass auch hier, ähnlich wie bei $r = 1$, für das Minimum von K entweder nur eine oder unendliche viele Lösungen $T_{\alpha\beta}$ existiren. Angenommen, es gäbe mehr als eine Lösung, und es seien $F_{\alpha\beta}$ und $G_{\alpha\beta}$ zwei von einander verschiedene, d. h. nicht Glied für Glied mit einander übereinstimmende Ausgleichungs-Modi, für welche $K = \Sigma Q$ den kleinsten möglichen, also beidemal denselben Werth annimmt, dann folgt aus

$$\sum_\alpha F_{\alpha\beta}\, t_\alpha = \tau_\beta\,, \quad \sum_\alpha G_{\alpha\beta}\, t_\alpha = \tau_\beta\,,$$

durch Multiplication mit zwei beliebigen Zahlen f, g und Addition

$$\sum_\alpha (f F_{\alpha\beta} + g G_{\alpha\beta})\, t_\alpha = (f + g)\,\tau_\beta\,;$$

es ist also auch

$$T_{\alpha\beta} = f F_{\alpha\beta} + g\, G_{\alpha\beta}$$

allemal ein Ausgleichungs-Modus, wenn wir, was im Folgenden geschehen soll, die Beziehung

$$f + g = 1$$

festsetzen. Führen wir die so gebildeten

$$T_{\alpha\beta} = f\,(F_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) + G_{\alpha\beta}$$

in K ein, so können wir, wenn die Q als Functionen von f aufgefasst werden, ansetzen

$$Q_\alpha^2 = [a_\alpha\,(f - f_\alpha)]^2 + b_\alpha^2\,,$$

wo die a_α f_α b_α bestimmte reelle Werthe besitzen, bezüglich deren im Besonderen folgende Fälle eintreten können. Erstlich kann Q_α

von f unabhängig oder a_α gleich Null werden; dies ist nur möglich, wenn für den betreffenden Index α die Gleichungen

$$F_{\alpha 1} = G_{\alpha 1}, \quad F_{\alpha 2} = G_{\alpha 2} \dots F_{\alpha r} = G_{\alpha r}$$

stattfinden. Zweitens kann a_α von Null verschieden, dagegen b_α gleich Null sein; dann wird Q_α eine lineare Function von f, wobei in

$$Q_\alpha = \pm a_\alpha (f - f_\alpha)$$

das Zeichen immer so zu wählen ist, dass Q_α nicht negativ wird. Da dann Q_α für ein reelles $f = f_\alpha$ verschwindet, so ist für den betreffenden Index α

$$G_{\alpha 1} = -\frac{f_\alpha}{g_\alpha} F_{\alpha 1}, \dots G_{\alpha r} = -\frac{f_\alpha}{g_\alpha} F_{\alpha r},$$

d. h. die G sind den F proportional. Drittens endlich, wenn a und b von Null verschieden sind, wird Q eine irrationale Function von f, welche für reelle f, die hier nur in Frage kommen, stets einen positiven von Null verschiedenen Werth besitzt.

Bezeichnet man die Aggregate der Q, welche diesen drei Kategorien angehören, mit K_1, K_2, K_3, so ist das Verhalten von

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

für alle reellen f zu untersuchen. Es wird sich zeigen, dass unter den gemachten Annahmen K_3 fehlen, dagegen K_2 wirklich vorkommen muss. Zunächst kann sich K nicht auf K_1 reduciren, denn dann wäre nach dem oben Bemerkten für $\alpha = 1, 2 \,.\,.\, q$, $\beta = 1, 2 \,.\,.\, r$ $F_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta}$, d. h. für beide Modi würden die Unbekannten $\tau_1 \,.\,.\, \tau_r$ und die günstigsten Gewichte in identischer Weise hergeleitet, oder die beiden Modi wären nicht als von einander verschieden zu betrachten. Um ferner das Verhalten von K zu ermitteln, untersuchen wir die ersten Ableitungen nach f für K_2 und K_3.

Die Ableitung eines in K_2 vorkommenden Q_α ist für $f < f_\alpha$ constant negativ, von Null verschieden, und ändert sich, wenn f wachsend durch f_α hindurch geht, sprungweise in den entgegengesetzten positiven Werth um. Theilt man also das ganze Gebiet der Variablen f zwischen $-\infty$ und ∞ an den Stellen, welche den in K_2 vorkommenden f_α entsprechen, in einzelne Intervalle, so ist die Ableitung von K_2 intervallweise constant, anfangs negativ, zuletzt positiv; beim Uebergange von einem Intervall zum folgenden ändert sich die Ableitung sprungweise, um einen von Null verschiedenen Betrag wachsend.

Die Ableitung eines in K_3 enthaltenen Q_α ändert sich stetig, beständig wachsend; anfangs negativ, zuletzt positiv geht sie einmal durch Null hindurch. Dasselbe gilt daher für die Ableitung von K_3. Wenn nun K_3 in K wirklich vorkommt, so ist die Ableitung von K niemals constant, sondern sie wächst beständig, theils stetig, theils sprungweise, kann also auch nur ein einziges Mal durch Null hindurchgehen, sei es dass dieser Werth wirklich angenommen oder übersprungen wird. Der kleinste Werth von K kann daher nur für ein einziges f stattfinden, während der Voraussetzung nach dies für $f = 0$ und $f = 1$ der Fall ist. Hiernach muss sich also K auf die Form $K_1 + K_2$ reduciren. Mittelst der eben gemachten Ueberlegung zeigt man, dass das Minimum von K für zwei Werthe $f = 0$ und $f = 1$ nur dann stattfinden kann, wenn in einem der für K_2 aufgestellten Intervalle, sagen wir zwischen f_ι und $f_\varkappa$ die Ableitung von K constant gleich Null, K selber constant gleich dem Minimum ist, und wenn ausserdem dieses Intervall die Stellen $f = 0$ und $f = 1$ enthält. Für $f = f_\iota$ oder $f = f_\varkappa$ ist K noch Minimum; für diese Werthe von f wird aber Q_ι resp. $Q_\varkappa$ gleich Null — wir können also sagen: wenn zwei Lösungen $F_{\alpha\beta}$ und $G_{\alpha\beta}$ existiren, so ist

$$T_{\alpha\beta} = fF_{\alpha\beta} + gG_{\alpha\beta}$$

mindestens für alle positiven echt gebrochenen f (und g) ebenfalls eine Lösung; es giebt also unendlich viele Lösungen und unter diesen immer solche, für welche ein Q (nämlich Q_ι oder $Q_\varkappa$), folglich auch das entsprechende Gewicht verschwindet.

Dieses Resultat lässt sich sofort weiter ausdehnen. Existirt ausser den Lösungen $F_{\alpha\beta}$ und $G_{\alpha\beta}$ noch eine Lösung $H_{\alpha\beta}$, welche sich nicht in der Form

$$H = fF + gG$$

darstellen lässt, so bilden wir mit den drei positiven, der Bedingung

$$f + g + h = 1$$

genügenden Zahlen f, g, h zunächst die Lösung

$$F' = \frac{gG + hH}{g + h}$$

und damit die Lösung

$$T = fF + (1 - f)F' = fF + gG + hH = f(F - H) + g(G - H) + H.$$

Berechnet man mit diesen T die Q^2, so werden die letzteren ganze Functionen zweiten Grades von f und g, und das Minimum von K

findet sicher statt für alle positiven f und g, deren Summe nicht grösser als Eins ist. Durch ähnliche Ueberlegungen wie vorhin zeigt man, dass die Quadrate der Q entweder vollständige Quadrate in Bezug auf f und g oder aber von diesen Grössen unabhängig sein müssen, dass also die Q gleich den absoluten Beträgen gewisser linearer Functionen von f und g oder aber constant sind. Mit den oben für $r = 1$ erwähnten Sätzen über Summen von der Form ΣQ folgt dann weiter, dass in der zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit der Werthe f, g, für welche K ein Minimum ist, es allemal solche Werthepaare f, g giebt, für welche zwei von den Q verschwinden.

Die weitere Ausdehnung dieser Betrachtungen ist unmittelbar ersichtlich. Dieselben Ueberlegungen gestatten auch noch, zu zeigen, dass keine relativen Minima von K vorkommen können. Bedeutet $S_{\alpha\beta}$ einen beliebigen Ausgleichungs-Modus, dann sollen alle Modi $T_{\alpha\beta}$, für welche die Differenzen

$$T_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$$

ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer beliebig kleinen vorgeschriebenen Grenze bleiben, als die Umgebung von $S_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden. Wenn in der Umgebung von $S_{\alpha\beta}$ kein Ausgleichungs-Modus existirt, für welchen K kleiner ist, als für $S_{\alpha\beta}$, so entspricht der Modus $S_{\alpha\beta}$ einem — absoluten oder relativen — Minimum von K. Angenommen es sei für $S_{\alpha\beta}$ das Aggregat K ein relatives Minimum, dann wollen wir aus $S_{\alpha\beta}$ und dem zum absoluten Minimum gehörigen Modus $F_{\alpha\beta}$ wieder wie vorhin die Modi

$$T_{\alpha\beta} = f S_{\alpha\beta} + (1 - f) F_{\alpha\beta}$$

bilden und den Ausdruck für K als Function von f wieder in die drei Terme

$$K = K_1 + K_2 + K_3$$

spalten. Die Ableitung von K nach f kann nun nur einmal das Zeichen wechseln, entweder indem sie an einer einzigen Stelle $f = f_0$ stetig oder sprungweise vom Negativen zum Positiven durch Null hindurchgeht, oder indem sie innerhalb eines gewissen Intervalles $f_1 < f < f_2$ constant gleich Null, vorher aber negativ, nachher positiv ist. Im ersteren Falle findet für wenigstens eine der beiden Stellen $f = 0$ und $f = 1$ sicher kein Minimum von K statt; im zweiten Falle gilt dasselbe, sobald einer der Werthe $f = 0$, $f = 1$

ausserhalb des Intervalles $f_1 \ldots f_2$ liegt, d. h. es muss unter den gemachten Voraussetzungen die Ableitung von K in dem Intervalle $0 \leqq f \leqq 1$ constant gleich Null, K selber also constant sein. Trifft dies zu, dann ist $K(S_{\alpha\beta})$ allerdings ein Minimum, aber von $K(F_{\alpha\beta})$ nicht verschieden; m. a. W. der Modus $S_{\alpha\beta}$ gehört zu denjenigen, für welche das absolute Minimum von K stattfindet. Wir können hiernach sagen: wenn für den Modus $S_{\alpha\beta}$ die Grösse K nicht ihren kleinsten möglichen Werth besitzt, so existiren in der Umgebung von $S_{\alpha\beta}$ immer Stellen, für welche K theils grösser, theils kleiner als $K(S_{\alpha\beta})$ ist.

Nach den vorstehenden Auseinandersetzungen wenden wir uns jetzt dazu, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Minimum von K aufzusuchen. Ist $T_{\alpha\beta}$ ein Ausgleichungs-Modus, welcher K zu einen Minimum macht — einen wenigstens giebt es immer — so darf für einen beliebigen, in der Umgebung von $T_{\alpha\beta}$ gelegenen Modus $S_{\alpha\beta}$ die Differenz

$$K(S) - K(T)$$

niemals negativ ausfallen. Diese Bedingung ist nothwendig und wegen der Nichtexistenz relativer Minima auch hinreichend. Bezeichnet man nun mit $U_{\alpha\beta}$ ein System von Grössen, welche der Einschränkung

$$(5) \qquad \sum_{\alpha} U_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\gamma} = 0$$

unterworfen sind, sonst aber beliebig gewählt werden können, so liefert der Ausdruck

$$S_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + f U_{\alpha\beta},$$

wo f eine beliebige Zahl bedeutet, alle möglichen Ausgleichungs-Modi, sobald für die U alle zulässigen Werthsysteme gesetzt werden. Da die Relationen (5) sich nicht ändern, wenn bei sämmtlichen U das Vorzeichen umgekehrt wird, so können wir f auf positive Werthe beschränken; setzt man ferner fest, dass der Betrag von f stets klein sei, so liegen die $S_{\alpha\beta}$ in der Umgebung des Modus $T_{\alpha\beta}$.

Entwickelt man $K(S)$ nach Potenzen von f, so liefern die einzelnen Terme in dem Ausdrucke von K entweder eine wirkliche Potenzreihe oder ein in f lineares Glied, je nachdem der Ausdruck

$$Q_\alpha^2 = T_{\alpha 1}^2 + \ldots + T_{\alpha r}^2$$

für den betrachteten Modus $T_{\alpha\beta}$ von Null verschieden ist oder nicht. Es seien $Q_1, Q_2 \ldots Q_p$ von Null verschieden, dagegen $Q_{p+1} \ldots Q_q$

gleich Null, wo offenbar für p vorläufig alle Werthe zwischen den Grenzen n und q als möglich anzusehen sind. Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir festsetzen, dass bei der Bezeichnung der Indices die Buchstabengruppen $\alpha, \beta \ldots, \varkappa, \lambda \ldots, \sigma, \tau \ldots$ benutzt werden sollen, je nachdem die Indices bezw. die Werthe $1, 2 \ldots q$ oder $1, 2 \ldots n$, $1, 2 \ldots r$ oder $1, 2 \ldots p, p+1 \ldots q$ annehmen dürfen. Die Glieder erster Ordnung in der Entwicklung der Differenz

$$\delta K = K(S) - K(T)$$

besitzen dann die Form

$$f\sum_{\lambda\varkappa} \frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} U_{\lambda\varkappa} + f\sum_\sigma R_\sigma,$$

wo zur Abkürzung

$$R_\alpha = +\,(U_{\alpha 1}^2 + \ldots + U_{\alpha r}^2)^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt ist. Die Glieder zweiter Ordnung sind durch den Ausdruck

$$\sum_\lambda \frac{f^2}{2\,Q_\lambda^3}\left[Q_\lambda^2 R_\lambda^2 - \left(\sum_\varkappa T_{\lambda\varkappa} U_{\lambda\varkappa}\right)^2\right]$$

gegeben; derselbe ist nach bekannten Determinantensätzen als eine Summe von Quadraten darstellbar, also sicher niemals negativ. Ein Verschwinden des Coefficienten von f^2 kann nur eintreten, wenn für alle Indices $\varkappa, \lambda$

$$U_{\lambda\varkappa} = g_\lambda\, T_{\lambda\varkappa}$$

ist, wo die g_λ Grössen bedeuten, welche nur von dem Index λ abhängen, von $\varkappa$ dagegen unabhängig sind. In diesem Falle wird aber der vollständige Ausdruck von δK eine lineare Function von f, d. h. es verschwinden nicht nur die Glieder zweiter, sondern auch die aller höheren Ordnungen. Es ist deshalb ausreichend, einzig und allein die Glieder erster Ordnung zu untersuchen, um zu entscheiden, ob δK negativ werden kann oder nicht. In dem Ausdrucke

$$\sum_{\lambda\varkappa} \frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} U_{\lambda\varkappa} + \sum_\sigma R_\sigma, \tag{6}$$

auf welchen es jetzt ankommt, sind die $U_{\alpha\varkappa}$ nicht unabhängig von einander, sondern durch die $n \,.\, r$ Relationen

$$\sum_\alpha U_{\alpha\varkappa}\, t_{\alpha\beta} = 0 \tag{7}$$

mit einander verbunden. Eliminirt man jedoch mittelst (7) aus (6) $n \,.\, r$ von den Grössen $U_{\lambda\varkappa}$, so sind in dem so umgeformten Ausdrucke

von δK die übriggebliebenen $U_{\alpha\varkappa}$ als von einander unabhängige und völlig beliebige Grössen zu betrachten. Um die Elimination zu bewirken, fügen wir zunächst zu (6) die mit den noch näher zu bestimmenden Multiplicatoren $-A_{\varkappa\beta}$ versehenen linken Seiten von (7) hinzu, wodurch an dem Werthe von (6) nichts geändert wird, und erhalten den Ausdruck

$$
(8)\quad \begin{aligned}
&\sum_{\lambda\varkappa} \frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} U_{\lambda\varkappa} + \sum_\sigma R_\sigma - \sum_{\alpha\beta\varkappa} A_{\varkappa\beta} U_{\alpha\varkappa} t_{\alpha\beta} \\
&= \sum_{\varkappa\lambda} U_{\lambda\varkappa}\left(\frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} - V_{\lambda\varkappa}\right) + \sum_\sigma \left(R_\sigma - \sum_\varkappa U_{\sigma\varkappa} V_{\sigma\varkappa}\right),
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung

$$V_{\alpha\varkappa} = \sum_\beta A_{\varkappa\beta}\, t_{\alpha\beta}$$

gesetzt ist. Bestimmt man nun die A so, dass von den Coefficienten

$$\frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} - V_{\lambda\varkappa}$$

$n \, . \, r$ verschwinden, so kann man, falls die übrigen $(p-n)\,r$ Coefficienten derselben Art nicht gleichzeitig mit verschwinden, die noch in (8) vorhandenen $U_{\alpha\varkappa}$ stets so wählen, dass der Ausdruck (8), also auch δK negativ wird. Wenn also K für den Modus $T_{\alpha\varkappa}$ ein Minimum sein soll, so muss zunächst sein

$$(9)\qquad T_{\lambda\varkappa} = Q_\lambda V_{\lambda\varkappa},$$

wofür wir auch, da die Q_σ und $T_{\sigma\varkappa}$ verschwinden, das System

$$(10)\qquad T_{\alpha\varkappa} = Q_\alpha V_{\alpha\varkappa}$$

ansetzen dürfen.

Sind die A in der angegebenen Weise bestimmt, so reducirt sich δK, wenn K Minimum ist, auf

$$(11)\qquad \delta K = f \sum_\sigma \left(R_\sigma - \sum_\varkappa U_{\sigma\varkappa} V_{\sigma\varkappa}\right),$$

wo die $U_{\sigma\varkappa}$ als völlig beliebige Grössen anzusehen sind. Zur Abkürzung führen wir ein

$$B_{\beta\gamma} = \sum_\varkappa A_{\varkappa\beta} A_{\varkappa\gamma},$$

$$V_\alpha^2 = \sum_\varkappa V_{\alpha\varkappa}^2 = \sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma}\, t_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\gamma},$$

wo V_α immer positiv sein soll. Wählen wir in (11) die $U_{\sigma\varkappa}$ so, dass die R_σ vorgeschriebene Werthe annehmen, so erhalten wir den

unter diesen Umständen möglichen algebraisch kleinsten Werth von δK, wenn man den Aggregaten

$$\sum_{\varkappa} U_{\sigma\varkappa} V_{\sigma\varkappa}$$

durch passende Wahl der U ihre grössten Werthe ertheilt, wenn man also setzt

$$U_{\sigma\varkappa} = R_\sigma \frac{V_{\sigma\varkappa}}{V_\sigma}.$$

Der bei vorgeschriebenen Werthen der R_σ algebraisch kleinste Betrag von δK wird also

$$\sum_\sigma R_\sigma (1 - V_\sigma).$$

Soll nun dieser Ausdruck für alle zulässigen Werthsysteme der R_σ niemals negativ sein, so müssen offenbar die weiteren Bedingungen

$$(12) \qquad V_\sigma \leqq 1$$

erfüllt sein.

Als nothwendige Bedingungen für das Minimum haben sich also die Relationen (9) und (12) ergeben. Umgekehrt folgt aus der benutzten Herleitung, dass, wenn die Bedingungen (9) und (12) erfüllt sind, δK sicher nicht negativ werden kann, wie man auch die $U_{\alpha\varkappa}$ wählen mag. Die Relationen (9) und (12) enthalten also das System der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der betrachtete Ausgleichungsmodus $T_{\alpha\beta}$ dem K seinen kleinsten möglichen Werth ertheilt.

5.

Die aufgestellten Bedingungen enthalten ausser den gesuchten Grössen T noch die Hülfsgrössen A. Um nun alles explicite durch die T auszudrücken, eliminiren wir zunächst die T aus den Gleichungen

$$(13) \qquad T_{\alpha\varkappa} = Q_\alpha \sum_\beta A_{\varkappa\beta}\, t_{\alpha\beta}$$

und den für jeden Ausgleichungs-Modus gültigen Bedingungen

$$\sum_\alpha T_{\alpha\varkappa}\, t_{\alpha\gamma} = e_{\varkappa\gamma}.$$

Dies giebt, wenn wir

$$a_{\beta\gamma} = \sum_\alpha Q_\alpha\, t_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\beta}$$

setzen und die aus den Elementen $a_{\beta\gamma}$ gebildete Determinante mit A bezeichnen,

$$e_{\varkappa\gamma} = \sum_{\alpha\beta} A_{\varkappa\beta}\, Q_\alpha\, l_{\alpha\beta}\, l_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\varkappa\beta}\, a_{\gamma\beta}\,,$$

woraus unmittelbar

$$A_{\varkappa\beta} = \frac{\partial \log A}{\partial a_{\varkappa\beta}} = A_{\beta\varkappa}$$

folgt. Die a sind offenbar die Coëfficienten der Normalgleichungen, welche sich aus den Beobachtungsgleichungen $\varrho_\alpha = l_\alpha$ nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben, wenn man für die Gewichte die Grössen Q setzt; ebenso sind die aus (13) sich ergebenden T nichts anderes als der Ausgleichungs-Modus, welchen die Methode der kleinsten Quadrate bei den Gewichten $Q_1 \,..\, Q_q$ liefert.

Da die Ausdrücke für die $A_{\varkappa\beta}$ die Grössen T nur in den Verbindungen Q enthalten, und die T nach (13) sofort bekannt sind, wenn man die Q kennt, so kann man auch statt der T die Q als die zunächst zu ermittelnden Unbekannten unserer Aufgabe ansehen. Es würden also die Relationen (9) und (12) durch andere zu ersetzen sein, welche einerseits nur die Q enthalten, andererseits die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Minimum von K in sich schliessen. Die Relationen (12) besitzen bereits die verlangte Form; ferner erhält man aus (9) durch Quadriren und Summiren nach $\varkappa$

$$Q_\lambda^2 = Q_\lambda^2\, V_\lambda^2\,,$$

also, da die Q_λ von Null verschieden sind,

$$V_\lambda^2 = 1\,. \tag{14}$$

Um nun zu zeigen, dass die Bedingungen (12) und (14), welche nur die Q enthalten, wirklich hinreichen, um K zu einem Minimum zu machen, schlagen wir folgenden Weg ein.

Mit den vorläufig beliebig gewählten Grössen $Q_1 \,..\, Q_q$, unter denen einige auch gleich Null sein können, bilde man der Reihe nach die Ausdrücke

$$\text{I.}\quad a_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} Q_\alpha\, l_{\alpha\beta}\, l_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\beta}\,;$$

$$\text{II.}\quad A = |\, a_{\beta\gamma}\,|\,,$$

$$\text{III.}\quad A_{\beta\gamma} = \frac{\partial \log A}{\partial a_{\beta\gamma}} = A_{\gamma\beta}\,,$$

$$\text{IV.}\quad V_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta} A_{\gamma\beta}\, l_{\alpha\beta}\,;$$

$$\text{V.}\quad B_{\beta\gamma} = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa\beta}\, A_{\varkappa\gamma}\,,$$

$$\text{VI.}\quad V_\alpha^2 = \sum_{\varkappa} V_{\alpha\varkappa}^2 = \sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma}\, l_{\alpha\beta}\, l_{\alpha\gamma}\,;$$

ferner definire man die Zahlen E_α durch die Bedingungen

$$E_\alpha = 1\,, \quad \text{wenn} \quad Q_\alpha \gtreqless 0\,,$$
$$0 \leqq E_\alpha \leqq 1\,, \quad \text{wenn} \quad Q_\alpha = 0\,,$$

und setze das System von Gleichungen und Ungleichungen

$$(15) \qquad V_\alpha^2 = E_\alpha$$

an. Wenn dann ein System von nichtnegativen Werthen $Q_1 \ldots Q_q$ existirt, welches die Relationen (15) erfüllt, so geben, wie zu zeigen ist, diese Q mittelst der Gleichungen

$$\frac{p_\alpha}{\Sigma p_\alpha} = \frac{Q_\alpha}{\Sigma Q_\alpha}$$

eine günstigste Gewichtsvertheilung p_α zur Bestimmung des Complexes

$$(\tau) = (\tau_1\, \tau_2 \ldots \tau_r)$$

aus den Beobachtungsgleichungen

$$\varrho_\alpha = t_\alpha \equiv \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, \tau_\beta\,.$$

Zum Beweise bilden wir zunächst mit den Q das Grössensystem

$$(16) \qquad T_{\alpha\beta} = Q_\alpha \sum_\gamma A_{\beta\gamma}\, t_{\alpha\gamma} = Q_\alpha V_{\alpha\beta}\,;$$

diese T sind ein Ausgleichungs-Modus, wie die Substitution dieser Ausdrücke in

$$\sum_\alpha T_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\delta} = e_{\beta\delta}$$

ergiebt, wenn man die Relationen I. bis III. berücksichtigt. Ferner ist wegen (15)

$$\sum_\varkappa T_{\alpha\varkappa}^2 = Q_\alpha^2 \sum_\varkappa V_{\alpha\varkappa}^2 = Q_\alpha^2 E_\alpha\,,$$

also

$$\sum_\varkappa T_{\alpha\varkappa}^2 = Q_\alpha^2\,.$$

Ist nun $S_{\alpha\beta}$ ein Ausgleichungs-Modus in der Umgebung von $T_{\alpha\beta}$ und untersucht man ferner nach dem vorher benutzten Verfahren die Differenz

$$\delta K = K(S) - K(T)\,,$$

so ergiebt sich, wenn wir wieder $Q_1 \ldots Q_p$ als die von Null verschiedenen, $Q_{p+1} \ldots Q_q$ als die verschwindenden Q annehmen, und

$$S = T + fU$$

ansetzen, für die Glieder erster Ordnung in δK der Ausdruck

$$f \sum_{\lambda\varkappa} \frac{T_{\lambda\varkappa}}{Q_\lambda} U_{\lambda\varkappa} + f \sum_\sigma R_\sigma\,.$$

Hierin geht die erste Summe wegen (16) über in

$$\sum_{\lambda\varkappa\gamma} A_{\varkappa\gamma}\, t_{\lambda\gamma}\, U_{\lambda\varkappa},$$

oder mit Berücksichtigung von

$$\sum_{\alpha} t_{\alpha\gamma}\, U_{\alpha\varkappa} = 0$$

in

$$-\sum_{\sigma\varkappa\gamma} A_{\varkappa\gamma}\, t_{\sigma\gamma}\, U_{\sigma\varkappa} = -\sum_{\sigma\varkappa} V_{\sigma\varkappa}\, U_{\sigma\varkappa},$$

sodass die Glieder erster Ordnung gleich

$$f\sum_{\sigma}\Big(R_\sigma - \sum_{\varkappa} V_{\sigma\varkappa}\, U_{\sigma\varkappa}\Big)$$

werden. Von diesen beweist man wie oben, dass sie nicht kleiner als

$$f\sum_{\sigma} R_\sigma\,(1 - V_\sigma)$$

sein können, womit für $K(T)$ die Minimumseigenschaft dargethan ist. Für die weitere Untersuchung dürfen wir uns also ausschliesslich auf das System der Bedingungen

$$(17) \qquad V_\alpha^2 = E_\alpha$$

beschränken.

Um weiterhin die Uebersicht nicht zu stören, sollen gewisse Specialfälle vorweg erledigt werden. Es war vorausgesetzt worden, dass die Functionen der Unbekannten τ, deren Messung zu den Beobachtungsgleichungen $\varrho = t$ führte, sämmtlich von einander verschieden seien. Diese Voraussetzung schliesst indessen nicht die Möglichkeit aus, dass in einem gegebenen Falle zwei von den linearen Functionen t_α — sagen wir t_ϑ und t_ι — entweder in aller Strenge oder doch wenigstens für die numerische Rechnung einander gleich oder entgegengesetzt gleich werden. Offenbar wird dann $V_\vartheta = V_\iota$, d. h. von den Gleichungen in (17) fallen zwei zusammen, sodass die eine überflüssig wird. Aus der Bildungsweise der V folgt nun, dass in einem solchen Falle in den Bedingungen (17) die beiden Grössen Q_ϑ und Q_ι immer nur in der Verbindung $Q_\vartheta + Q_\iota$ vorkommen. Sobald also bei einem gegebenen günstigsten Werthsystem der Q die beiden Grössen Q_ϑ und Q_ι nicht beide gleich Null sind, ergeben sich sofort unendlich viele günstigte Systeme der Q dadurch, dass man Q_ϑ und Q_ι variirt, ohne jedoch ihre Summe zu ändern. Unter diesen Systemen sind zwei, in denen Q_ϑ resp. Q_ι gleich Null

sind, welche also die Gleichung $\varrho_\vartheta = t_\vartheta$ resp. $\varrho_\iota = t_\iota$ nicht benutzen. Es ist also zulässig, von den beiden Beobachtungsgleichungen mit den Nummern ϑ und ι die eine von vornherein zu streichen.

Ferner kann der Fall eintreten, dass zwischen zwei Functionen t die Relation $t_\vartheta = ct_\iota$ besteht, wo c ein positiver oder negativer echter Bruch ist. Da dann $E_\vartheta = c^2 E_\iota$ wird, so ist E_ϑ sicher kleiner als Eins, also Q_ϑ nothwendig gleich Null; denn wenn Q_ϑ von Null verschieden wäre, so müsste nach dem Früheren E_ϑ nothwendig gleich Eins sein. Die Gleichung $\varrho_\vartheta = t_\vartheta$ kann also von vornherein fortgelassen werden, da sie bei der günstigsten Gewichtsvertheilung unter allen Umständen mit dem Gewichte Null eingeht.

Da das Eintreten der besprochenen Sonderfälle immer leicht erkannt werden kann, so wollen wir uns die angegebene Reduction des Systems $\varrho = t$ jedesmal bereits vor Bildung der Bedingungen (17) ausgeführt denken. Um nun einen Fingerzeig für die weitere Untersuchung der Bedingungen (17) zu gewinnen, betrachten wir zunächst die beiden einfachen Fälle $n = 2$ und $n = 3$ und wollen dabei die Coefficienten $t_{\alpha 1}\ t_{\alpha 2}$, $t_{\alpha 1}\ t_{\alpha 2}\ t_{\alpha 3}$ in den t_α als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes P_α in der Ebene oder im Raume ansehen. Jede Gleichung $\varrho = t$ ist dann durch einen bestimmten Punkt P_α repräsentirt. Sind $t_{01}\ t_{02}$, $t_{01}\ t_{02}\ t_{03}$ die Coordinaten eines beweglichen Punktes P_0, so stellt die Gleichung

$$V_0^2 = \sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma}\, t_{0\beta}\, t_{0\gamma} = 1\,.$$

für die verschiedenen Werthe von n und r folgende Gebilde zweiter Ordnung dar.

1) $n = 2$, $r = 1$: Ein Paar paralleler Geraden, welche symmetrisch zum Coordinatennullpunkt liegen.

2) $n = 2$, $r = 2$: Eine Ellipse, deren Mittelpunkt in den Nullpunkt fällt.

3) $n = 3$, $r = 1$: Ein Paar paralleler Ebenen, welche symmetrisch zum Nullpunkt liegen.

4) $n = 3$, $r = 2$: Einen elliptischen Cylinder, dessen Längsaxe durch den Nullpunkt geht.

5) $n = 3$, $r = 3$: Ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt in den Nullpunkt fällt.

Die Bedingungen (17) besagen, dass die Punkte P_α theils auf dem betreffenden Gebilde G liegen, theils innerhalb des von diesem Gebilde begrenzten Raumes, und zwar befinden sich diejenigen Punkte P, deren correspondirende Q von Null verschieden sind, nothwendig auf G, während für die innerhalb gelegenen Punkte P die correspondirenden Q nothwendig gleich Null sind. Nun ist die Anzahl N der Punkte P, durch welche jedes der G im Allgemeinen bereits vollständig bestimmt ist, der Reihe nach 2, 3, 3, 5, 6. Wenn also die Punkte P_α willkürlich gegeben worden sind, so werden im Allgemeinen höchstens N von den Punkten P auf dem Gebilde G, die übrigen $q - N$ aber innerhalb desselben liegen. Es werden daher bei der günstigsten Gewichtsvertheilung im Allgemeinen höchstens N von den Gleichungen $\varrho = t$ zur Bestimmung des Complexes τ wirklich benutzt werden.

Die gefundene Regel gilt nun, wie sich leicht zeigen lässt, allgemein für beliebige n, sobald man unter N die Zahl der zur Bildung der Coefficienten $B_{\beta\gamma}$ benutzten Ausdrücke $A_{\varkappa\beta}$ versteht. Die Zahl dieser Ausdrücke ist, wenn man die Relation $A_{\beta\gamma} = A_{\gamma\beta}$ beachtet, durch

$$N = \tfrac{1}{2} n (n + 1) - \tfrac{1}{2} (n - r) (n - r + 1) = \tfrac{1}{2} r (r + 1) + r (n - r)$$

gegeben. Die Bedingungen (17) enthalten die Unbekannten Q nur in den Verbindungen $A_{\varkappa\beta}$; sind die Werthe von N der E_α, sagen wir von $E_1\ E_2\ ..\ E_N$ gegeben, so sind damit die Werthe der $A_{\varkappa\beta}$ im Allgemeinen völlig bestimmt, und damit auch die Werthe der übrigen E. Sind die gegebenen E gleich Eins, so werden im Allgemeinen d. h. solange die $t_{\alpha\beta}$ nicht gewissen Bedingungsgleichungen genügen, die übrigen E von Eins verschieden sein. Man kann also hiernach im Allgemeinen nur erreichen, dass höchstens N von den Grössen E den Werth Eins besitzen, woraus sofort folgt, dass im Allgemeinen höchstens N von den Grössen Q nicht verschwinden.

Durch die vorstehende Ueberlegung ist nun allerdings noch nicht die Möglichkeit ausgeschlossen, dass unter besonderen Umständen die Anzahl der von Null verschiedenen Q »nothwendiger« Weise grösser als N ist. Wir werden indessen sehen, dass dieser Fall niemals eintritt, dass also, sobald $q > N$, stets eine günstigste Gewichtsvertheilung existirt, welche nicht mehr als N von den Beobachtungsgleichungen wirklich benutzt. Zum Beweise dieses Satzes,

den wir als das Hauptergebniss unserer ganzen Untersuchung anzusehen haben, gehen wir von folgender Ueberlegung aus. Es sei $Q_{\alpha 0}$ ein günstigstes Werthsystem der Q; dasselbe ertheilt den E_α in (17) bestimmte Werthe, die theils gleich Eins, theils kleiner als Eins sind. Ausser dem System $Q_{\alpha 0}$ existiren, wenn $q > N$, unendlich viele reelle oder complexe Werthsysteme der Q, welche die Bedingungen (17) genau in derselben Weise erfüllen, wie die $Q_{\alpha 0}$, nämlich die durch die N Gleichungen

$$(18) \qquad A_{\varkappa\beta}(Q_1 \,..\, Q_q) = A_{\varkappa\beta}(Q_{10} \,..\, Q_{q0})$$

bestimmten Werthe der Unbekannten Q. Wir wollen nun für den Augenblick annehmen, es existire unter den unendlich vielen Lösungen von (18) ausser der evidenten Lösung $Q_{\alpha 0}$ ein Werthsystem $Q_{\alpha 1}$, welches folgenden Bedingungen genügt: 1) die $Q_{\alpha 1}$ sind reell und nicht negativ, 2) wenn $Q_{\alpha 0}$ gleich Null ist, verschwindet auch das correspondirende $Q_{\alpha 1}$. Aus den Entwickelungen des vierten Abschnitts folgt dann, dass unendlich viele günstigste Werthsysteme Q_α existiren und darunter allemal ein bestimmtes System $Q_{\alpha 2}$, welches einerseits denselben Bedingungen genügt, wie $Q_{\alpha 1}$ und in welchem andererseits wenigstens ein $Q_{\alpha 2}$ verschwindet, dessen correspondirendes $Q_{\alpha 0}$ von Null verschieden ist. Könnte man also beweisen, dass zu jeder Lösung $Q_{\alpha 0}$ eine Lösung vom Charakter der $Q_{\alpha 1}$ allemal dann existirt, wenn die Zahl der nicht verschwindenden $Q_{\alpha 0}$ grösser ist als N, so wäre damit offenbar auch der vorhin erwähnte Satz erwiesen, denn man hätte nur nöthig, durch Wiederholung der eben angestellten Ueberlegung aus dem System $Q_{\alpha 0}$ ein anderes herzuleiten, in welchem höchstens N von den Q nicht verschwinden. Unsere Aufgabe spitzt sich hiernach dahin zu, dass wir für die Gleichungen (18) die Existenz einer Lösung vom Charakter der $Q_{\alpha 1}$ nachzuweisen haben. Zu dem Ende werden wir die zwischen den $A_{\varkappa\beta}$ und den Q bestehenden Differentialgleichungen näher untersuchen. Es wird sich dabei zeigen, dass die Gleichungen (18) auf lineare Relationen führen, welche den verlangten Nachweis ohne Weiteres zu führen gestatten.

6.

Mit den q Variabeln $Q_1 \,..\, Q_q$ und den Coefficienten $t_{\alpha\beta}$ denken wir uns in der früheren Weise die Ausdrücke

$$a_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} t_{\alpha\beta} t_{\alpha\gamma},$$
$$A = | a_{\beta\gamma} |,$$
$$A_{\beta\gamma} = \frac{\partial \log A}{\partial a_{\beta\gamma}},$$
$$B_{\beta\gamma} = \sum_{\varkappa} A_{\varkappa\beta} A_{\varkappa\gamma}$$

gebildet, wobei wir betreffs der Bedeutung der Buchstaben $\alpha, \beta \ldots, \varkappa, \lambda \ldots$ an der oben getroffenen Bestimmung festhalten wollen. Die Q sollen, um Weitläuftigkeiten zu vermeiden, auf reelle Werthe beschränkt bleiben, obgleich diese Einschränkung nicht unbedingt nothwendig ist. Die $t_{\alpha\beta}$ sind reelle Grössen, bezüglich deren wir früher die Einschränkung gemacht hatten, dass die zu je n der linearen Functionen t_{α} gehörigen Determinanten $| t_{\alpha\beta} |$ nicht sämmtlich verschwinden. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der andern, dass A nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe der Q verschwindet. Wir werden dieselbe als eine wesentliche beibehalten. Wenn nämlich A identisch verschwindet, so lassen sich die t_{α} als lineare Functionen von höchstens $n - 1$ Verbindungen der τ_{α} darstellen; die Zahl der Unbekannten in den Gleichungen $\varrho = t$ wäre also nicht gleich n, sondern kleiner.

Weiter bilden wir wie früher

$$V_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} A_{\beta\gamma} t_{\alpha\gamma},$$
$$V_{\alpha}^2 = \sum_{\varkappa} V_{\alpha\varkappa}^2 = \sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma} t_{\alpha\beta} t_{\alpha\gamma},$$

und wollen den Ausdruck von V_{α}^2 als eine quadratische Form mit den Coëfficienten B und den Variablen $t_{\alpha\beta}$ ansehen. Diese Form transformiren wir dadurch, dass statt der t neue Variable s mittelst der linearen Gleichungen

$$(19) \qquad t_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} c_{\beta\gamma} s_{\alpha\gamma}$$

eingeführt werden. Die Substitutionscoëfficienten c sollen einer orthogonalen Transformation mit der Determinante $+1$ angehören, also den Bedingungen

$$(20) \qquad \sum_{\beta} c_{\beta\gamma} c_{\beta\delta} = e_{\gamma\delta}, \quad \sum_{\beta} c_{\gamma\beta} c_{\delta\beta} = e_{\gamma\delta}$$

genügen. Ferner sollen, was stets auf wenigstens eine Weise mög-

lich ist, die c so gewählt werden, dass die transformirte Form nur die Quadrate der s enthält, also die Gestalt

$$\sum_\beta F_\beta \, s_{\alpha\beta}^2$$

besitzt. Die F sind die Wurzeln der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$| B_{\beta\gamma} - z \,.\, e_{\beta\gamma} | = 0 \,.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so verschwinden wegen der Zusammensetzung der B aus den A die Coëfficienten von

$$z^0, \; z^1, \; z^2 \; \ldots \; z^{n-r-1} \,.$$

Der nächste Coëfficient ist, abgesehen von einem numerischen Factor gleich der Quadratsumme der Determinanten r^{ter} Ordnung, deren Elemente man erhält, wenn man aus dem Grössensystem

$$\begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1n}\,, \\ A_{21} & \ldots & A_{2n}\,, \\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ A_{r1} & \ldots & A_{rn} \end{matrix}$$

auf alle mögliche Arten je r Columnen herausgreift. Diese Determinanten lassen sich in Quotienten umformen, deren Nenner A und deren Zähler die aus je $n - r$ Columnen des Systems

$$\begin{matrix} a_{r+1,1} & \ldots & a_{r+1,n} \\ \cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{rn} \end{matrix}$$

gebildeten Determinanten von der Ordnung $n - r$ sind. Wenn die letztgenannten Determinanten sämmtlich verschwinden, so verschwindet auch A, da wir hier nur endliche Werthe der t und Q zu betrachten haben. Nun ist, wenn $r < n$, die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass unter den die Bedingung $A = 0$ befriedigenden Werthsystemen der Q sich auch solche befinden, welche einer günstigsten Gewichtsvertheilung entsprechen. Wir wollen jedoch der besseren Uebersicht halber bis auf Weiteres die Stellen, an denen $A = 0$ ist, von dem Bereiche der Q ausschliessen und sind dann sicher, dass der Coëfficient von z^{n-r} nicht verschwindet. Mit dieser Festsetzung sind dann r von den F — sagen wir $F_1 \,.\,.\, F_r$ — sicher von Null verschieden, die übrigen dagegen sicher gleich Null. Da die betrachtete quadratische Form aus einer Summe von r Quadraten entstanden ist, so sind die $F_1 \,.\,.\, F_r$ positiv; wir können daher die transformirte Form in der Gestalt

$$(21)\qquad \sum_{\beta\gamma} e_{\beta\gamma} f_\beta f_\gamma s_{\alpha\beta} s_{\alpha\gamma}$$

schreiben, mit dem Zusatze, dass

$$f_1 > 0\,,\quad f_2 > 0\,,\ \cdot\cdot f_r > 0\,,$$
$$f_{r+1} = f_{r+2} = \cdots = f_n = 0\,.$$

Aus (19) und (20) folgt

$$(22)\qquad s_{\alpha\beta} = \sum_\gamma c_{\gamma\beta} t_{\alpha\gamma}\,.$$

Diese Ausdrücke der s, in (21) substituirt, geben nach der Entwicklung durch Vergleichung mit der ursprünglichen Form der Reihe nach die Relationen

$$B_{\beta\gamma} = \sum_{\delta\varepsilon} e_{\delta\varepsilon} f_\delta f_\varepsilon c_{\beta\delta} c_{\gamma\varepsilon}\,,$$

$$\sum_\beta B_{\beta\gamma} c_{\beta\eta} = \sum_\varepsilon e_{\eta\varepsilon} f_\eta f_\varepsilon c_{\gamma\varepsilon}\,;$$

$$\sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma} c_{\beta\eta} c_{\gamma\zeta} = e_{\eta\zeta} f_\eta f_\zeta\,.$$

Ferner setzen wir an

$$\sum_\beta A_{\delta\beta} c_{\beta\gamma} = g_{\delta\gamma}\,,$$

$$|\, g_{\delta\gamma} \,| = G\,,$$

$$\frac{\partial \log G}{\partial g_{\delta\gamma}} = G_{\delta\gamma}\,,$$

und erhalten damit successive

$$\sum_\gamma g_{\delta\gamma} c_{\varepsilon\gamma} = A_{\delta\varepsilon}\,;$$

$$G = 1 : A\,,$$

$$e_{\gamma\zeta} = \sum_\delta g_{\delta\gamma} G_{\delta\zeta}\,;$$

$$\sum_\gamma e_{\gamma\zeta} c_{\varepsilon\gamma} = \sum_{\gamma\delta} g_{\delta\gamma} c_{\varepsilon\gamma} G_{\delta\zeta}\,,$$

$$c_{\varepsilon\zeta} = \sum_\delta A_{\delta\varepsilon} G_{\delta\zeta}\,,$$

$$\sum_\varepsilon a_{\eta\varepsilon} c_{\varepsilon\zeta} = G_{\eta\zeta}\,;$$

$$\sum_\varkappa g_{\varkappa\gamma} g_{\varkappa\delta} = \sum_{\beta\varepsilon\varkappa} A_{\varkappa\beta} A_{\varkappa\varepsilon} c_{\beta\gamma} c_{\varepsilon\delta}\,;$$

$$(23)\qquad \sum_\varkappa g_{\varkappa\gamma} g_{\varkappa\delta} = e_{\gamma\delta} f_\gamma f_\delta\,.$$

Das Quadrat der aus den $r\,.\,r$ Elementen $g_{\varkappa\lambda}$ gebildeten Determinante lässt sich als Determinante mit den $r\,.\,r$ Elementen

$$\sum_{\varkappa} g_{\varkappa\lambda}\, g_{\varkappa\mu}$$

darstellen, ist also wegen (23) gleich

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot\cdot f_r)^2$$

oder von Null verschieden. Hiernach können, wenn der Index σ von $r+1$ bis n geht, die in (23) auftretenden Gleichungen

$$\sum_{\varkappa} g_{\varkappa\lambda}\, g_{\varkappa\sigma} = 0$$

nur durch die Werthe

$$g_{\varkappa\sigma} = 0$$

erfüllt werden. Ferner folgt aus

$$\sum_{\varkappa} \frac{g_{\varkappa\lambda}}{f_\lambda} \cdot \frac{g_{\varkappa\mu}}{f_\mu} = e_{\lambda\mu},$$

dass die $r \,.\, r$ Grössen $g_{\varkappa\lambda} : f_\lambda$ die Elemente einer orthogonalen Determinante sind, dass also auch

$$\sum_{\varkappa} \frac{g_{\lambda\varkappa}}{f_\varkappa} \cdot \frac{g_{\mu\varkappa}}{f_\varkappa} = e_{\lambda\mu}$$

ist. Nach diesen Entwicklungen gehen wir zur Aufstellung der Differentialausdrücke für die A über. Man hat der Reihe nach

$$e_{\beta\gamma} = \sum_{\delta} A_{\delta\beta}\, a_{\delta\gamma},$$

$$0 = \sum_{\delta} a_{\delta\gamma}\, dA_{\delta\beta} + \sum_{\delta} A_{\delta\beta}\, da_{\delta\gamma},$$

$$0 = dA_{\varepsilon\beta} + \sum_{\gamma\delta} A_{\varepsilon\gamma}\, A_{\delta\beta}\, da_{\delta\gamma},$$

$$dA_{\varkappa\beta} = -\sum_{\alpha\gamma\delta} A_{\varkappa\gamma}\, A_{\beta\delta}\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\alpha\delta} \cdot dQ_\alpha, \tag{24}$$

$$dA_{\varkappa\beta} = -\sum_{\alpha\eta\zeta} g_{\varkappa\eta}\, g_{\beta\zeta}\, s_{\alpha\eta}\, s_{\alpha\zeta} \cdot dQ_\alpha,$$

$$\sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\gamma}\, G_{\beta\varepsilon}\, dA_{\varkappa\beta} = -\sum_{\alpha} f_\gamma^2\, s_{\alpha\gamma}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot dQ_\alpha. \tag{25}$$

Für $\gamma = r + 1 \,..\, n$ nehmen die Gleichungen (25) die Form $0 = 0$ an, sodass wir mit Unterdrückung dieser nichtssagenden Gleichungen auch schreiben können

$$\sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\lambda}\, G_{\beta\varepsilon} \cdot dA_{\varkappa\beta} = -\sum_{\alpha} f_\lambda^2\, s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot dQ_\alpha. \tag{26}$$

Aus den leicht zu verificirenden Identitäten

$$\left(\frac{1}{f_\lambda}\right)^2 \sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\lambda}\, G_{\beta\mu} \cdot dA_{\varkappa\beta} = \left(\frac{1}{f_\mu}\right)^2 \sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\mu}\, G_{\beta\lambda} \cdot dA_{\varkappa\beta}$$

folgt, dass das System (26) nur N verschiedene Gleichungen enthält. Um nun die Gleichungen (24) und (26) unterschiedslos benutzen zu können, haben wir noch zu zeigen, dass man von (26) rückwärts zu (24) gelangt. Zu dem Ende multipliciren wir (26) mit $g_{\mu\lambda}$ und $g_{\gamma\varepsilon}$ und summiren nach λ und ε, dann wird zunächst

$$dA_{\mu\gamma} = -\sum_{\alpha\lambda\varepsilon} g_{\mu\lambda}\, g_{\gamma\varepsilon}\, s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot dQ_\alpha .$$

Hierfür darf, weil $g_{\mu\sigma}$ verschwindet, auch

$$dA_{\mu\gamma} = -\sum_{\alpha\beta\varepsilon} g_{\mu\beta}\, g_{\gamma\varepsilon}\, s_{\alpha\beta}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot dQ_\alpha$$

geschrieben werden. Diese Gleichung geht aber, wenn statt der g und s ihre Ausdrücke durch die A und t eingeführt werden, thatsächlich in (24) über.

Es sei nun $Q_{\alpha 0}$ ein willkürlich gewähltes Werthsystem der Q, für welches A von Null verschieden ist. Mit diesem bilden wir das System von N Gleichungen

$$(27) \qquad A_{\varkappa\beta}\,(Q_1 \cdot \cdot Q_q) = A_{\varkappa\beta}\,(Q_{10} \cdot \cdot Q_{q0})$$

und beschränken die Variabeln Q auf das durch die Gleichungen (27) begrenzte Gebiet. Unter dieser Voraussetzung werden die dA in (26) sämmtlich gleich Null, also auch

$$(28) \qquad \sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot dQ_\alpha = 0 .$$

Die Werthe der B, c, s hängen nur ab von den Werthen der A und der t, sind also wegen (27) durch die $t_{\alpha\beta}$ und die $Q_{\alpha 0}$ völlig bestimmt. In Folge dessen sind die Coefficienten der dQ in (28) von den Werthen der Variabeln Q_α unabhängig, so dass man sofort integriren und die N Gleichungen

$$(29) \qquad \sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon} \cdot Q_\alpha = \text{constans} = C_{\lambda\varepsilon} = C_{\varepsilon\lambda}$$

ansetzen kann. Da das Werthsystem $Q_{\alpha 0}$ dem betrachteten Bereiche der Q angehört, so kann man die C dadurch eliminiren, dass man schreibt

$$(30) \qquad \sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, (Q_\alpha - Q_{\alpha 0}) = 0 .$$

Die C lassen sich übrigens auch direct durch die bisher benutzten Grössen ausdrücken. Es bestehen nämlich die Relationen

$$A_{\varkappa\beta}=\sum_{\alpha\gamma\delta} A_{\varkappa\gamma}\, A_{\beta\delta}\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\alpha\delta}\cdot Q_\alpha\,.$$

Unterwirft man diese denselben Operationen, wie das System (24), so erhält man sofort

$$f_\lambda^2\, C_{\lambda\varepsilon}=\sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\lambda}\, G_{\beta\varepsilon}\, A_{\varkappa\beta}$$

$$=\sum_{\varkappa\beta\eta} g_{\varkappa\lambda}\, a_{\beta\eta}\, c_{\eta\varepsilon}\, A_{\varkappa\beta}$$

$$f_\lambda^2\, C_{\lambda\varepsilon}=\sum_{\varkappa} g_{\varkappa\lambda}\, c_{\varkappa\varepsilon}\,,$$

woraus noch die später zu benutzende Relation

$$(32)\qquad \sum_{\lambda} f_\lambda\, C_{\lambda\varepsilon}\cdot f_\lambda\, C_{\lambda\delta}=\sum_{\varkappa\lambda\mu}\left(\frac{1}{f_\lambda}\right)^2 g_{\varkappa\lambda}\, g_{\mu\lambda}\, c_{\varkappa\varepsilon}\, c_{\mu\delta}=\sum_{\varkappa} c_{\varkappa\varepsilon}\, c_{\varkappa\delta}$$

folgt.

Der soeben befolgte Gedankengang lässt sich folgendermassen umkehren. Es sei $Q_{\alpha 0}$ ein willkürlich gewähltes, festes Werthsystem der Q, für welches jedoch A nicht verschwindet. Man berechne aus den $Q_{\alpha 0}$ und $t_{\alpha\beta}$ der Reihe nach die $A_{\varkappa\beta}$, die B, f, c, s und setze das Gleichungssystem

$$\sum_{\alpha} s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\,(Q_\alpha-Q_{\alpha 0})=0$$

an. Innerhalb des durch diese Gleichungen begrenzten Werthgebietes der Q gelten die Gleichungen

$$\sum_{\alpha} s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\cdot dQ_\alpha=0\,,$$

also auch wegen (26) die Gleichungen

$$\sum_{\varkappa\beta} g_{\varkappa\lambda}\, G_{\beta\varepsilon}\cdot dA_{\varkappa\beta}=0\,.$$

Die aus den $g_{\varkappa\lambda}\cdot G_{\beta\varepsilon}$ gebildete Determinante ist von Null verschieden, weil sonst die Systeme (24) und (26) nicht einander äquivalent sein könnten; man hat also auch

$$dA_{\varkappa\beta}=0\,;$$

d. h. die A sind innerhalb des betrachteten Werthgebietes constant und es wird, da die Stelle $Q_{\alpha 0}$ diesem Gebiete angehört,

$$A_{\varkappa\beta}(Q_1\,..\,Q_q)=A_{\varkappa\beta}(Q_{10}\,..\,Q_{q0})\,.$$

Hieraus folgt dann noch wie oben

$$\sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, Q_\alpha = C_{\lambda\varepsilon} = \left(\frac{1}{f_\lambda}\right)^2 \sum_\varkappa g_{\varkappa\lambda}\, c_{\varkappa\varepsilon}\,.$$

So lange also A von Null verschieden, sind die linearen Gleichungen (29) oder (30) dem System algebraischer Gleichungen (27) äquivalent und es muss möglich sein, durch passende Umformungen und Zerlegungen von (27) direct zu (29) resp. (30) zu gelangen.

7.

An der Hand der gefundenen Resultate sind wir jetzt im Stande die Existenz der früher mit $Q_{\alpha 1}$ bezeichneten Lösungen nachzuweisen. Es sei $Q_{\alpha 0}$ ein Werthsystem der Q, welches zu einer günstigsten Gewichtsvertheilung gehört und die Determinante A für die $Q_{\alpha 0}$ von Null verschieden; ferner seien die $Q_{\alpha 0}$ mit den Nummern $1, 2 \,..\, p$ ($p > N$) grösser als Null, die andern dagegen gleich Null. Man bilde das Gleichungssystem

$$(33) \qquad \sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, Q_\alpha = C_{\lambda\varepsilon} = \sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, Q_{\alpha 0}\,,$$

dann befriedigen alle dem System (33) genügenden Werthsysteme der Q die für das Minimum charakteristischen Bedingungen (17) oder

$$V_\alpha^2 = E_\alpha$$

in genau derselben Weise, wie die $Q_{\alpha 0}$. Setzt man in (33) die Q_α mit den Nummern $p + 1 \,..\, N$ gleich Null, so erhält man die N Gleichungen mit $p > N$ Unbekannten

$$\sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, (Q_\alpha - Q_{\alpha 0}) = 0\,,$$
$$(\alpha = 1, 2 \,..\, p)\,,$$

welche sich, wie man leicht übersieht, durch unendlich viele Werthsysteme der $Q_1 \,..\, Q_p$ befriedigen lassen. Unter diesen befinden sich allemal solche, für welche die Differenzen $Q_\alpha - Q_{\alpha 0}$ beliebig klein, die Q_α also sicher noch positiv sind. Hiermit ist die Existenz der Lösungen $Q_{\alpha 1}$ und damit die Möglichkeit der früher behaupteten Reduction auf eine Lösung $Q_{\alpha 2}$ für den Fall bewiesen, dass für die vorausgesetzte günstigste Lösung $Q_{\alpha 0}$ die Determinante A nicht verschwindet.

Wenn für die Lösung $Q_{\alpha 0}$ die Determinante A verschwindet, so kommt dies, da in der gesuchten Lösung $Q_{\alpha 1}$ dieselben Q ver-

schwinden sollen, wie in $Q_{\alpha 0}$, darauf hinaus, dass wir es anstatt mit den ursprünglichen Beobachtungsgleichungen $\varrho = l$ mit einem engeren »reducirten« System zu thun haben, welches wir dadurch erhalten, dass wir diejenigen Beobachtungsgleichungen unterdrücken, für welche die $Q_{\alpha 0}$ und $Q_{\alpha 1}$ gleich Null sind. Für dieses reducirte System verschwindet die in der früheren Weise gebildete Determinante A identisch, d. h. es lassen sich, da ja die Grössen $\tau_1 \ldots \tau_r$ immer noch aus dem reducirten System bestimmbar sein sollen, die $n - r$ übrigen τ durch höchstens $n - r - 1$ lineare Verbindungen derselben — sagen wir $\tau'_{r+1}, \tau'_{r+2} \ldots$ — ersetzen. Man gelangt also zu einem Gleichungssystem $\varrho = l$, in welchem die Zahl der Unbekannten jetzt kleiner als n ist, und das sich genau in derselben Weise, wie das ursprüngliche, behandeln lässt, weil die Determinante A des reducirten Systems — dieselbe heisse A' — nicht mehr identisch verschwindet. Da A' auch nicht für die gegebene Lösung $Q_{\alpha 0}$ verschwindet, so folgt daraus nach der obigen Schlussweise die Existenz einer Lösung $Q_{\alpha 1}$ resp. $Q_{\alpha 2}$, so lange die Zahl p der von Null verschiedenen $Q_{\alpha 0}$ grösser ist als

$$N' = \tfrac{1}{2} n' (n' + 1) - \tfrac{1}{2} (n' - r)(n' - r + 1),$$

wo n' die Zahl der Unbekannten τ resp. τ' in dem reducirten System bedeutet. Schreibt man nun N in der Form

$$\tfrac{1}{2} r (2n - r + 1),$$

so erkennt man, dass $N > N'$ ist. Benutzt man nun die Lösung $Q_{\alpha 2}$ als Ausgangspunkt für die Wiederholung der vorstehenden Ueberlegungen, so gelangt man zu folgenden Sätzen:

1) *Die günstigste Bestimmung des Grössencomplexes*

$$(\tau) = (\tau_1 \, \tau_2 \ldots \tau_r)$$

aus den Beobachtungsgleichungen

$$\varrho_\alpha = l_\alpha \equiv \sum_\beta l_{\alpha\beta} \, t_\beta$$

lässt sich allemal durch eine Gewichtsvertheilung erreichen, in welcher nicht mehr als

$$N = \tfrac{1}{2} r (2n - r + 1)$$

Gewichte von Null verschieden sind, die also höchstens N von den gemessenen ϱ benutzt.

2) *Wenn eine Gewichtsvertheilung existirt, bei welcher mehr als N von den Gleichungen $\varrho = t$ benutzt werden, so giebt es allemal unendlich viele und darunter solche, welche höchstens N Gleichungen benutzen.*

Die vorstehenden Sätze bedürfen nun, um den Gegenstand zu erschöpfen, noch einer Ergänzung. Die ganze bisherige Entwicklung ist nämlich im Grunde genommen rein hypothetischer Natur und sagt nichts darüber aus, ob die kleinste Zahl der zu messenden Grössen ϱ je nach Umständen irgend einen der Werthe $n \,.\,.\, N$ besitzen könne oder ob nicht im Gegentheil stets, wie für $r = 1$, eine Reduction auf nur n zu benutzende Gleichungen durchführbar ist. Wir werden zeigen, dass das Erstere der Fall ist, indem wir specielle Gleichungssysteme $\varrho = t$ bilden, bei welchen die Zahl der »nothwendiger« Weise zu benutzenden Gleichungen einen vorgeschriebenen Werth zwischen den Grenzen n und N besitzt. Als Vorbereitung hieraus wollen wir den Fall unendlich vieler günstigster Gewichtsvertheilungen noch etwas weiter verfolgen.

Es seien Q_α und Q'_α zwei günstigste Werthsysteme der Q. Man bilde zu diesen die entsprechenden günstigsten Ausgleichungs-Modi T und T' und setze aus diesen die Schaar der Modi

$$T'' = fT + gT', \quad (f + g = 1),$$

zusammen. Die T'' geben sicher einen günstigsten Ausgleichungs-Modus, so lange f und g gleichzeitig positiv sind. Um nun das zu dem günstigsten Modus T'' gehörige günstigste System der Q zu erhalten, haben wir die Q'' aus

$$(Q''_\alpha)^2 = \sum_\varkappa (T''_{\alpha\varkappa})^2$$

zu berechnen. Nach dem Früheren ist die rechte Seite dieser Gleichung das Quadrat einer linearen Function von f, folglich ist

$$Q'' = fQ + gQ',$$

da für $f = 1$ und $f = 0$ die Q'' in die Q resp. Q' übergehen müssen. Bilden wir zu den drei Systemen Q, Q', Q'' die entsprechenden A, A', A'' und V, V', V'', so wird

$$T_{\alpha\varkappa} = Q_\alpha V_{\alpha\varkappa} = Q_\alpha \sum_\beta A_{\varkappa\beta}\, t_{\alpha\beta},$$

$$T'_{\alpha\varkappa} = Q'_\alpha V'_{\alpha\varkappa} = Q'_\alpha \sum_\beta A'_{\varkappa\beta}\, t_{\alpha\beta},$$

$$T''_{\alpha\varkappa} = Q''_\alpha V''_{\alpha\varkappa} = Q''_\alpha \sum_\beta A''_{\varkappa\beta}\, t_{\alpha\beta},$$

$$(34)\qquad fQ_\alpha V_{\alpha\varkappa} + gQ'_\alpha V'_{\alpha\varkappa} = (fQ_\alpha + gQ'_\alpha)V''_{\alpha\varkappa}.$$

Sind für einen bestimmten Index α Q_α und Q'_α von Null verschieden, so ist, so lange f und g gleichzeitig positiv sind, auch Q''_α von Null verschieden, also

$$(35)\qquad (V_\alpha)^2 = 1, \quad (V'_\alpha)^2 = 1, \quad (V''_\alpha)^2 = 1.$$

Durch Quadriren von (34) und Summiren nach $\varkappa$ erhält man mit Rücksicht auf (35)

$$\sum_\varkappa V_{\alpha\varkappa} V'_{\alpha\varkappa} = 1,$$

$$(V_\alpha)^2 (V'_\alpha)^2 - \Big(\sum_\varkappa V_{\alpha\varkappa} V'_{\alpha\varkappa}\Big)^2 = 0.$$

Diese Gleichungen können nicht anders zusammen bestehen, als wenn $V_{\alpha\varkappa} = V'_{\alpha\varkappa}$ ist, wodurch auch

$$V''_{\alpha\varkappa} = V_{\alpha\varkappa} = V'_{\alpha\varkappa}$$

wird. Wenn ferner $Q_\alpha = 0$, $Q'_\alpha > 0$ ist, so wird nach (34)

$$V'_{\alpha\varkappa} = V''_{\alpha\varkappa},$$

d. h. die V'' sind von f unabhängig, also, da V'' für $f = 1$ mit V übereinstimmen muss, wiederum

$$V''_{\alpha\varkappa} = V_{\alpha\varkappa} = V'_{\alpha\varkappa}.$$

Für $Q_\alpha > 0$, $Q'_\alpha = 0$ erhalten wir dasselbe Resultat, und dürfen demnach ansetzen

$$V_{\alpha\varkappa} - V'_{\alpha\varkappa} = \sum_\beta t_{\alpha\beta}(A_{\varkappa\beta} - A'_{\varkappa\beta}) = 0,$$

mit dem Zusatze, dass α zunächst auf diejenigen Nummern beschränkt ist, für welche von den beiden Grössen Q_α und Q'_α höchstens eine verschwindet. Multipliciren wir jedoch die Gleichungen mit $Q_\alpha t_{\alpha\gamma}$, bilden also

$$0 = \sum_\beta Q_\alpha t_{\alpha\beta} t_{\alpha\gamma}(A_{\varkappa\beta} - A'_{\varkappa\beta}),$$

so gelten letztere Gleichungen für alle Werthe des Index α, wir können also durch Summation nach α bilden

$$0 = \sum_\beta a_{\beta\gamma}(A_{\varkappa\beta} - A'_{\varkappa\beta}).$$

Schliessen wir vom Gebiete der Q wieder die Stellen aus, an welchen A verschwindet, so haben wir

$$A_{\varkappa\beta} = A'_{\varkappa\beta},$$

d. h. jedes $A_{\varkappa\beta}$ hat für die sämmtlichen günstigsten Werthsysteme der Q ein und denselben constanten Werth, oder die günstigsten Q genügen alle einem einzigen System von linearen Gleichungen

$$(36) \qquad \sum_{\alpha} s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, Q_{\alpha} = C_{\varepsilon\lambda}\,.$$

Hieraus folgt, wie nebenbei angeführt werden mag, dass in den Bedingungen

$$V_{\alpha}^{2} = E_{\alpha}$$

die Grösse E_{α} für alle günstigsten Gewichtsvertheilungen constant gleich Eins ist, wenn wenigstens für eine Vertheilung das entsprechende Q nicht verschwindet; ebenso lässt sich zeigen, dass E_{α} constant und kleiner als Eins sein muss, wenn Q_{α} in allen günstigsten Gewichtsvertheilungen gleich Null ist. Wenn A für gewisse günstigste Systeme der Q verschwindet, so treten mehrere distincte Systeme der Form (36) und mehrere Werthsysteme der E_{α} auf. So lange also A von Null verschieden ist, genügt die Kenntniss einer einzigen Lösung, um alle übrigen aus (36) zu finden; wenn nur eine Lösung existirt, so lassen sich die Gleichungen (36) nur durch ein einziges System nicht-negativer Q befriedigen und umgekehrt. Die Gleichungen (36) sind übrigens ihrer Form nach nicht immer völlig bestimmt. Wenn nämlich die algebraische Gleichung

$$| B_{\beta\gamma} - z \,.\, e_{\beta\gamma} | = 0$$

mehrfache Wurzeln besitzt, was ja für $r < n - 1$ immer eintritt, so existiren unendlich viele Substitutionen $c_{\beta\gamma}$ und entsprechend unendliche viele Systeme von Gleichungen (36). Letztere sind jedoch sämmtlich einander äquivalent, da sie alle ein und dasselbe Werthgebiet der Q begrenzen.

8.

Um die Frage nach der Minimalzahl der zu benutzenden Beobachtungsgleichungen zu entscheiden, wollen wir jetzt den bisher innegehaltenen Gedankengang für einen Augenblick in der Weise umkehren, dass wir die $A_{\beta\gamma}$ als gegebene und die $t_{\alpha\beta}$ als gesuchte Stücke ansehen. Es seien $A'_{\beta\gamma}$ die numerischen Werthe der $A_{\beta\gamma}$; dieselben seien so gewählt, dass die Determinante

$$| A_{\beta\gamma} | = 1 : A$$

einen endlichen und von Null verschiedenen Werth besitzt. Mit den A' berechne man nach den früheren Formeln die Werthe der B, f, c, g, C. Wenn man nun in dem Falle

$$n < q \leqq N$$

ein System von positiven Grössen Q_α und ein Coëfficientensystem $t_{\alpha\beta}$ so bestimmen könnte, dass die Gleichungen

$$V_\alpha^2 = \sum_{\beta\gamma} B_{\beta\gamma}\, t_{\alpha\beta}\, t_{\alpha\gamma} = 1\,, \tag{37}$$

$$\sum_\alpha s_{\alpha\lambda}\, s_{\alpha\varepsilon}\, Q_\alpha = C_{\lambda\varepsilon}\,, \tag{38}$$

erfüllt sind, dann wäre offenbar damit für das System

$$\varrho_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, \tau_\beta \tag{39}$$

eine günstigste Gewichtsvertheilung gefunden, welche diese Gleichungen sämmtlich benutzt. Wenn ferner das System (38) so beschaffen ist, dass demselben für gegebene s und C nur ein einziges Werthsystem der Q genügt, so ist die betrachtete Gewichtsvertheilung die einzige günstigste, kann also nicht durch eine andere günstigste ersetzt werden, welche weniger als q Gleichungen des Systems (39) benutzt. Es kommt also darauf an, den Bedingungen (37) und (38) durch passende Wahl der Q und t zu genügen.

Da für unseren Zweck die Aufstellung eines speciellen Falles genügt, so wollen wir der Einfachheit halber ansetzen

$$A'_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma}\,.$$

Gehören die Buchstaben σ, ω .. zu den Nummern $r+1$..., so wird

$$B_{\varkappa\lambda} = c_{\varkappa\lambda}\,, \quad B_{\varkappa\sigma} = 0\,, \quad B_{\sigma\omega} = 0\,,$$

$$V_\alpha^2 = \sum_\varkappa t_{\alpha\varkappa}^2\,.$$

Eine Transformation dieser quadratischen Form ist nicht mehr erforderlich, wir können deshalb weiter ansetzen

$$c_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma}\,, \quad f_\varkappa = 1\,, \quad s_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}\,,$$

$$g_{\delta\gamma} = A'_{\delta\gamma} = e_{\delta\gamma}\,, \qquad C_{\lambda\varepsilon} = e_{\lambda\varepsilon}\,,$$

und erhalten damit die Bedingungen (37) und (38) in der Form

$$\sum_\varkappa t_{\alpha\varkappa}^2 = 1\,, \tag{39}$$

$$\sum_\alpha t_{\alpha\lambda}\, t_{\alpha\varepsilon}\, Q_\alpha = e_{\lambda\varepsilon}\,. \tag{40}$$

Die Gleichungen (40) gruppiren wir in der Weise, dass wir zunächst das System

$$(41)\qquad \sum_\alpha t_{\alpha\lambda}\, t_{\alpha\mu}\, Q_\alpha = e_{\lambda\mu}$$

herausheben und den Rest in $n-r$ Gruppen von je r Gleichungen

$$(42)\qquad \sum_\alpha t_{\alpha\lambda}\, t_{\alpha\sigma}\, Q_\sigma = 0$$

ordnen, wobei innerhalb jeder Gruppe σ constant ist. Die $t_{\alpha\sigma}$ kommen in (39) nicht vor, sind also nur den Bedingungen (42) unterworfen und können, da $q > r$, den Bedingungen (42) gemäss, auf unendlich viele Weisen bestimmt werden, sobald man durch passende Wahl der Q und $t_{\alpha\lambda}$ den Bedingungen (39) und (41) genügt hat. Letzteres nun lässt sich durch ein Verfahren erreichen, welches wir zunächst für den Fall $r = 4$ auseinandersetzen wollen. Des kürzeren Schreibens wegen setzen wir

$$t_{\alpha 1} = x_\alpha\,,\quad t_{\alpha 2} = y_\alpha\,,\quad t_{\alpha 3} = z_\alpha\,,\quad t_{\alpha 4} = u_\alpha\,,$$

also

$$(43)\qquad x_\alpha^2 + y_\alpha^2 + z_\alpha^2 + u_\alpha^2 = 1\,;$$

ferner setzen wir an

$$\begin{gathered} x_1 = 1\,,\quad y_1 = z_1 = u_1 = 0\,,\\ x_2^2 + y_2^2 = 1\,,\quad z_2 = u_2 = 0\,,\\ x_3 = x_4 = \cdot\cdot = x_q = x\,,\\ y_3 = y_4 = \cdot\cdot = y_q = y\,,\\ Q_3 = Q_4 = \cdot\cdot = Q_q = Q\,,\end{gathered}$$

und erhalten damit an Stelle von (41) das System

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} Q_1 + Q_2 x_2^2 + (q-2)\,Q x^2 &= 1\,,\\ Q_2\, x_2\, y_2 + (q-2)\,Q x y &= 0\,,\\ Q_2 y_2^2 + (q-2)\,Q y^2 &= 1\,,\\ Q x\,(z_3 + \cdot\cdot + z_q) &= 0\,,\\ Q\, y\,(z_3 + \cdot\cdot + z_q) &= 0\,,\\ Q\,(z_3^2 + \cdot\cdot + z_q^2) &= 1\,,\\ Q x (u_3 + \cdot\cdot + u_q) &= 0\,,\\ Q y (u_3 + \cdot\cdot + u_q) &= 0\,,\\ Q\,(z_3\, u_3 + \cdot\cdot + z_q\, u_q) &= 0\,,\\ Q (u_3^2 + \cdot\cdot + u_q^2) &= 1\,.\end{aligned}\right.$$

Dasselbe geht mit den Werthen

$$z_\alpha = R \cos\frac{2\pi\alpha}{q-2}\,,\quad u_\alpha = R\sin\frac{2\pi\alpha}{q-2}\,,$$
$$(\alpha = 3,\, 4\, .\, .\, q)$$

über in

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 x_2^2 + (q-2)\,Qx^2 &= 1\,,\\ Q_2 x_2 y_2 + (q-2)\,Qxy &= 0\,,\\ Q_2 y_2^2 + (q-2)\,Qy^2 &= 1\,,\\ (q-2)\,QR^2 &= 2\,,\\ x^2 + y^2 + R^2 &= 1\,. \end{aligned}$$

Wir wählen x und y klein, also R nahe bei bei Eins, dann ist damit Q bestimmt und die vorstehenden Gleichungen gehen über in

$$\begin{aligned} Q_1 + Q_2 x_2^2 &= 1 - \frac{2x^2}{R^2}\,,\\ Q_2 x_2 y_2 &= \quad - \frac{2xy}{R^2}\,,\\ Q_2 y_2^2 &= 1 - \frac{2y^2}{R^2}\,. \end{aligned}$$

Durch Division der letzten beiden Gleichungen erhält man den Quotienten $x_2 : y_2$, also auch x_2, y_2 und Q_2, und damit aus der ersten Gleichung Q_1.

Man übersieht sofort, wie sich das hier auseinandergesetzte Verfahren für andere Werthe von r gestalten würde. Sollen die Gleichungen (39) und (40) unendlich viele Lösungen Q_α zulassen, so müssen gewisse Determinanten, die im Allgemeinen von Null verschieden sind, für die gewählten $t_{\alpha\beta}$ verschwinden, d. h. den Coëfficienten $t_{\alpha\beta}$ müssten aus den bereits erfüllten Bedingungen noch weitere Einschränkungen auferlegt werden. Hiernach können wir jetzt die früher ausgesprochenen Sätze folgendermassen vervollständigen.

Bei der günstigsten Bestimmung des Complexes

$$(\tau) = (\tau_1 \,.\,.\, \tau_r)$$

aus den Beobachtungsgleichungen

$$\varrho_\alpha = \sum_\beta t_{\alpha\beta}\, t_\beta\,, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2 \,.\,.\, q \\ \beta = 1, 2 \,.\,.\, n \end{pmatrix},$$

ist die kleinste Anzahl der zu messenden Stücke ϱ *je nach Umständen gleich einer von den Zahlen* N, $N-1$, $N-2$. . . , *wo*

$$N = \tfrac{1}{2}\,n(n-1) - \tfrac{1}{2}\,(n-r)\,(n-r+1) = rn - \tfrac{1}{2}\,r\,(r-1)\,.$$

Für $r = 1$ *ist die Messung von »überschüssigen« Daten überflüssig oder unzulässig; für* $r > 1$ *dagegen kann sich die Benutzung von »überschüssigen« Stücken als für die Erhöhung des Gewichtes* $p\,(\tau)$ *nothwendig erweisen, indessen ist man sowohl bezüglich der Anzahl als auch be-*

züglich der Auswahl der »überschüssigen« Stücke an ganz bestimmte Einschränkungen gebunden.

Es bedarf keiner besonderen Bemerkung, dass man im Allgemeinen darauf verzichten muss, die günstigsten Werthe der Q_α aus einem vorgelegten System der $t_{\alpha\beta}$ an der Hand der bisher entwickelten algebraischen Relationen wirklich zu ermitteln. Man ist vielmehr, wenn die $t_{\alpha\beta}$ numerisch gegeben sind, im Allgemeinen darauf angewiesen, den günstigsten Ausgleichungs-Modus ähnlich wie in dem Falle $r = 1$ durch successive Approximation zu finden, welche Operation in der That keinerlei principielle Schwierigkeit bietet und durch gewisse Kunstgriffe nicht unerheblich abgekürzt werden kann. Indem die Anwendung der gefundenen Sätze auf besondere Fälle einem späteren Aufsatze vorbehalten bleiben soll, möge zum Schlusse der bisherigen allgemeinen Untersuchung noch eine nicht unwesentliche Vereinfachung des Ausdruckes für $C_{\lambda\varepsilon}$ hergeleitet werden, welche in dem Falle $r = n$ stattfindet.

Wenn $r = n$, so liefert die Relation (32) das Ergebniss

$$\sum_\beta f_\beta\, C_{\beta\varepsilon} \cdot f_\beta\, C_{\beta\delta} = \sum_\beta c_{\beta\varepsilon}\, c_{\beta\delta} = e_{\varepsilon\delta}\,;$$

d. h. die Grössen $f_\beta\, C_{\beta\varepsilon}$ bilden die Elemente einer orthogonalen Determinante und es ist auch

$$\sum_\varepsilon f_\beta\, C_{\beta\varepsilon} \cdot f_\gamma\, C_{\gamma\varepsilon} = e_{\beta\gamma}\,.$$

Wenn die Grössen $f_1 \,.\,.\, f_n$ von einander verschieden sind, so lässt sich unmittelbar zeigen, dass

$$f_\beta\, C_{\beta\varepsilon} = e_{\beta\varepsilon}$$

sein muss. Es seien die f ihrer Grösse nach geordnet und

$$f_1 > f_2 > \cdot\cdot > f_n\,,$$

dann ist

$$\sum_\varepsilon f_\varepsilon^2\, C_{\varepsilon 1}^2 = 1\,,$$

$$\sum_\varepsilon f_1^2\, C_{1\varepsilon}^2 = \sum_\varepsilon f_1^2\, C_{\varepsilon 1}^2 = 1\,,$$

also

$$\sum_\varepsilon (f_1^2 - f_\varepsilon^2)\, C_{\varepsilon 1}^2 = 0\,,$$

woraus

$$\begin{aligned} C_{21} &= C_{31} = \,.\,.\, = C_{n1} \\ &= C_{12} = C_{13} = \,.\,.\, = C_{1n} = 0\,, \\ f_1\, C_{11} &= 1 \end{aligned}$$

folgt. Unterdrückt man jetzt in der Determinante der $f.C$ die erste Zeile und die erste Columne, so ist die übrigbleibende Determinante wiederum orthogonal und lässt sich demselben Verfahren unterwerfen; u. s. w. Man erhält auf diese Weise

$$f_\beta C_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma} = f_\gamma C_{\beta\gamma}.$$

Wenn unter den f gleiche vorkommen, so denke man sich die f wieder der Grösse nach geordnet und es sei

$$f_1 = f_2 = .. = f_p > f_{p+1} ..;$$

dann hat man ähnlich wie oben

$$\sum_\varepsilon (f_\beta^2 - f_\varepsilon^2)\, C_{\beta\varepsilon}^2 = 0,$$

woraus man schliesst, dass für $\beta = 1, 2 .. p$, $\varepsilon = p + 1 .. n$

$$C_{\beta\varepsilon} = C_{\varepsilon\beta} = 0$$

sein muss. Die Determinante $|f.C| = \varDelta$ lässt sich also durch diagonale Aneinanderschiebung zweier Determinanten $\varDelta'$ und $\varDelta''$ erzeugen, von denen die eine $\varDelta'$ orthogonal symmetrisch und von der Ordnung p, die andere $\varDelta''$ dagegen orthogonal von der Ordnung $n - p$ und von demselben Typus wie $\varDelta$ ist. Zerlegt man $\varDelta''$ in analoger Weise und so fort, so gelangt man zunächst zu dem Resultat, dass die Determinante $\varDelta$ orthogonal und symmetrisch ist.

Es sei nun $|k_{\alpha\beta}|$ irgend eine orthogonale Determinante von der Ordnung n; man bilde der Reihe nach

$$k_{\alpha\beta} + e_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta},$$
$$L = |l_{\alpha\beta}|,$$
$$L_{\alpha\beta} = \frac{\partial \log L}{\partial l_{\alpha\beta}}.$$

Wenn wir für die k die $f.C$ setzen, so ist die Determinante L sicher von Null verschieden, da sie sich wegen der Zusammensetzung der C aus den Q und s als ein Aggregat von wesentlich positiven Gliedern darstellen lässt. Weiter bilden wir

$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma} + \sum_\alpha e_{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma} = \sum_\alpha l_{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma},$$
$$\sum_\alpha k_{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma} - L_{\beta\gamma},$$
$$\sum_{\alpha\delta\beta} k_{\alpha\beta} L_{\alpha\gamma} k_{\delta\beta} L_{\delta\varepsilon} = \sum_\beta (e_{\beta\gamma} - L_{\beta\gamma})(e_{\beta\varepsilon} - L_{\beta\varepsilon}),$$
$$\sum_\alpha L_{\alpha\gamma} L_{\alpha\varepsilon} = e_{\gamma\varepsilon} - L_{\gamma\varepsilon} - L_{\varepsilon\gamma} + \sum_\beta L_{\beta\gamma} L_{\beta\varepsilon},$$
$$L_{\gamma\varepsilon} + L_{\varepsilon\gamma} = e_{\gamma\varepsilon}.$$

Wenn nun die Determinante $|k_{\alpha\beta}|$ symmetrisch ist, so ist es auch L, also

$$L_{\gamma\varepsilon} - L_{\varepsilon\gamma} = 0\,,$$

$$L_{\gamma\varepsilon} = \tfrac{1}{2}\, e_{\gamma\varepsilon}\,,$$

$$\sum_\gamma l_{\gamma\beta} L_{\gamma\varepsilon} = \tfrac{1}{2} \sum_\gamma l_{\gamma\beta}\, e_{\gamma\varepsilon}\,,$$

$$2\, e_{\beta\varepsilon} = l_{\varepsilon\beta}\,,$$

folglich

$$k_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}\,,$$

woraus sich sofort

$$f_\beta\, C_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma}$$

ergiebt. Hiermit erhält man noch aus

$$\sum_\alpha Q_\alpha\, s_{\alpha\beta}\, s_{\alpha\gamma} = C_{\beta\gamma}$$

für die günstigste Gewichtsvertheilung die einfache Relation

$$\sum_\alpha Q_\alpha = \sum_\beta f_\beta\,.$$

NEUE BEITRÄGE

ZUR KENNTNISS

DES BAUES UND DER LEBENSGESCHICHTE

DER NEMATODEN.

VON

RUD. LEUCKART.

MIT DREI TAFELN.

I.

ALLANTONEMA MIRABILE.[1]

Mit Tafel I.

Bekanntlich sind die Nematoden von allen Eingeweidewürmern diejenigen, welche durch den Einfluss des Parasitismus die geringsten Abänderungen erlitten haben. Während die übrigen Helminthen, besonders die Cestoden und Acanthocephalen, in äusserer, wie innerer Organisation den Verhältnissen des parasitischen Lebens so vollständig angepasst sind, dass sie überhaupt nur als Schmarotzer zu existiren vermögen, giebt es unter den Nematoden zahlreiche Arten, die ganz wie die gewöhnlichen Würmer ein freies Leben führen. Gestalt und Ausstattung dieser freien Nematoden ist im Grossen und Ganzen dieselbe, wie die der parasitischen Formen; beide gleichen einander oftmals in einem solchen Grade, dass es unmöglich ist, Vorkommen und Lebensweise aus ihrer äusseren Erscheinung ohne Weiteres zu erschliessen.

Doch der Parasitismus der Nematoden zeigt verschiedene Grade. In der Mehrzahl der Fälle freilich betrifft derselbe Würmer, die noch mit einiger Freiheit in ihren Trägern sich bewegen und eine geformte Nahrung geniessen, wie die frei lebenden Arten. Aber daneben fehlt es auch nicht an solchen, welche ihre Beweglichkeit mehr oder weniger verloren haben und sich ausschliesslich durch

1) Ueber die hauptsächlichsten Resultate der nachstehenden Untersuchungen ist schon bei verschiedenen Gelegenheiten von mir berichtet worden. So in der Sitzung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften vom 14. November 1884, so auch in der Zoologischen Section der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Magdeburg (1884) und Strassburg (1885).

Absorption der umgebenden Flüssigkeiten ernähren. In derartigen Fällen unterliegt denn auch die Organisation einer weiteren Umgestaltung. Der Darm tritt, wie in functioneller Bedeutung, so auch anatomisch zurück und verkümmert. Gleichzeitig unterliegt der Muskelapparat und das Nervensystem einer mehr oder minder grossen Reduction, je nach den Verhältnissen. Selbst die äussere Gestalt verändert sich, indem der früher so schlanke und krümmfähige Leib unter dem Drucke der mächtig schwellenden Geschlechtsorgane immer plumper wird und immer stärker sich auftreibt. Für die weiblichen Thiere gilt das in einem noch höheren Grade, wie für die männlichen, die durchweg bei den Nematoden, wie auch sonst häufig, kleiner und agiler sind, als die Weibchen, und ihre genuine Gestaltung oftmals (Tetrameres, Heterodera) auch dann noch beibehalten, wenn letztere in auffallender Weise umgebildet sind.[1])

Obwohl wir nun im Laufe der Zeit eine ganze Anzahl von Schmarotzernematoden kennen gelernt haben, die in der hier angedeuteten Weise von dem gewöhnlichen Verhalten abweichen und Eigenschaften besitzen, welche einer ausschliesslich parasitären Lebensweise angepasst sind, ist unter ihnen — mit Ausnahme vielleicht von Sphaerularia, die wir freilich nicht ohne Weiteres mit den übrigen Nematoden zusammenstellen können — doch keine, die in Gestalt und Organisationsverhältnissen so eigenthümliche und so weitgreifende Modificationen zeigt, wie diejenige, welche unter dem Namen *Allantonema mirabile* nach Bau und Lebensgeschichte in Nachfolgendem beschrieben werden soll.

Der Parasit, um den es sich hier handelt, lebt in der Leibeshöhle des grossen Fichtenrüsselkäfers (*Hylobius pini*), eines weit verbreiteten und gefährlichen Feindes unserer Fichtenwälder. Ich kenne denselben aus verschiedenen Localitäten Sachsens, Braunschweigs, Hessens und Badens und darf deshalb wohl annehmen, dass er,

1) Besonders augenfällig ist dieser Parallelismus zwischen Körperbildung und Lebensweise bei der männlichen Heterodera, die sich nicht direct aus der gleich ihr frei beweglichen und gleich gestalteten Jugendform entwickelt, sondern einen parasitären Zwischenzustand durchläuft, in dem sie unbeweglich ist und eine einfache Sackform hat, wie das Weibchen, das zeitlebens schmarotzt und niemals über diesen Zustand hinaus sich entwickelt. Vergl. Strubell, Ueber den Bau und die Entwicklung von Heterodera Schachtii. Zool. Anzeiger. 1887, S. 42 ff. u. 62 ff.

wenngleich an Häufigkeit wechselnd, durch den grössten Theil Deutschlands und über dessen Grenzen hinaus verbreitet sei. Besonders ausgiebig erwiesen sich die im Jahre 1883 bei Markersbach in Sachsen gesammelten Käfer[1]), von denen nahezu jedes dritte und vierte Exemplar, gleichgiltig ob Männchen oder Weibchen, mit unserem Parasiten besetzt war und mitunter sogar deren mehrere Exemplare (meist zwei und drei, ein Mal sogar sieben) enthielt. Aber schon im folgenden Jahre lieferte die gleiche Localität eine weit geringere Ausbeute, so dass man gelegentlich ein Dutzend Käfer untersuchen musste, um nur einen einzigen Insassen zu finden. Da auch die aus Tharand in den Jahren 1885 und 1886 mir zugesendeten Käfer verschieden reichlich inficirt waren, liegt die Annahme nahe, dass die Häufigkeit des Parasiten, wie nach localen Verhältnissen, so auch in zeitlicher Hinsicht mancherlei Verschiedenheiten darbietet.

Der Einfluss, den der Parasitismus des Wurmes auf seinen Träger ausübt, ist anscheinend ein nur geringer. In dem Gebahren der inficirten Käfer ist zunächst nichts, was auf die Anwesenheit des Schmarotzers zurückschliessen liesse. Selbst der Eintritt der Geschlechtsreife wird durch dieselbe nicht gehindert. Männchen und Weibchen besitzen neben dem Parasiten Geschlechtsorgane und Geschlechtsproducte von durchaus normaler Beschaffenheit. Man trifft sie gelegentlich sogar in Begattung. Trotzdem aber glaube ich bemerkt zu haben, dass die Zahl der reifen Eier in den Parasitenträgern hinter der sonst bei unserem Hylobius vorkommenden Durchschnittszahl zurückbleibt. Es gewinnt somit den Anschein, als wenn der Parasitismus unseres Wurmes, wenn auch nicht gerade auf das Befinden, so doch auf die Fruchtbarkeit seines Trägers einen nachtheiligen Einfluss ausübt, wie dies in viel augenfälligerer Weise bei den mit Sphaerularia besetzten Hummelweibchen der Fall ist.

Das ausgewachsene Allantonema besitzt (Taf. I, Fig. 1) eine Länge von 3 mm und hat zur Zeit der höchsten Geschlechtsentwick-

1) Ich verdanke dieselben der freundlichen Theilnahme des Herrn Fabrikbesitzers DIETRICH in Helfersberg bei Dresden, der mich auch sonst vielfach durch Zusendung geeigneter Untersuchungsmaterialien unterstützt hat. Ein Gleiches gilt von Herrn Professor NITSCHE in Tharand und Herrn Oberförster VON PRAUN in Helmstedt, denen ich mich in gleicher Weise dankbarst verpflichtet fühle.

lung (im Hochsommer) einen Querdurchmesser, der bis auf das eine meist etwas verjüngte Körperende ziemlich gleichmässig 1,2—1,4 mm beträgt. Es hat also eine äusserst gedrungene Cylinderform. Da zugleich die Enden abgerundet, die Längsachse aber mehr oder minder bogenförmig gekrümmt ist, so erinnert der Parasit durch seine Körperform so auffallend an eine Wurst, dass ich daraufhin die Benennung *Allantonema* (von ἀλλᾶς, die Wurst) für ihn in Anwendung gebracht habe.[1]) In Erinnerung an die in mancher Beziehung ähnliche Entoconcha mirabilis, die Holothurienschnecke J. MÜLLER's, mag derselbe weiter als *Allantonema mirabile* bezeichnet sein.

Das Aussehen unseres Allantonema lässt durchaus nicht vermuthen, dass wir es in ihm mit einem Nematoden zu thun haben. Es steht mit dem gewöhnlichen Verhalten dieser Thiere vielmehr in schreiendem Gegensatze und entfernt sich davon noch mehr, als die weibliche Form von Heterodera, die durch ihre Sackform wohl am meisten mit Allantonema übereinstimmt, durch den Besitz eines deutlich abgesetzten schlanken Vorderendes aber doch immer noch an die typischen Nematoden erinnert.

Bewegungen werden an unserem Wurme nicht beobachtet. Unfähig seine Lagerstätte oder auch nur seine Körperform willkürlich zu verändern, liegt derselbe regungslos zwischen den Eingeweiden seines Trägers. In der Regel findet man ihn in der vorderen Hälfte der Leibeshöhle zwischen den keimbereitenden Geschlechtsorganen oder auf der Bauchwand des Metathorax, von den hier üppig verästelten Tracheenzweigen allseitig umsponnen und festgehalten (Fig. 2). Im entwickelten Zustande ist der Parasit überhaupt niemals frei im Innern der Leibeshöhle enthalten, sondern immer, wie die genuinen Organe seines Trägers, durch zahlreiche Tracheenäste mit den anliegenden Gebilden im Zusammenhang, so dass man ihn auf den ersten Blick leicht selbst für einen Theil dieses Organenapparates halten könnte.

Natürlich ist es nicht der Wurmkörper selbst, an den die Tracheen sich ansetzen, sondern eine dem Käfer angehörige Umhüllung,

1) Durch das dem Worte ἀλλᾶς angehängte Substantivum νῆμα soll natürlich nicht die Form des Wurmes, sondern dessen Zugehörigkeit zur Gruppe der Nematoden ausgedrückt werden.

aber diese erscheint so dünn und ist der Aussenwand des Parasiten so dicht angeschmiegt, dass ihre wahre Natur erst bei näherer Untersuchung erkannt wird. In der Regel genügt übrigens schon ein Zusatz von Wasser oder stark verdünnten Reagentien, sie in mehr oder minder grosser Ausdehnung von dem Wurmkörper zu isoliren. Sie erscheint dann als ein von gröberen und feineren Tracheenzweigen reich durchzogenes zartes und helles Häutchen, das ausser einer Anzahl ovaler Kerne (0,01 mm) keinerlei histologische Elemente erkennen lässt. Da dasselbe mit der äusseren Bekleidung der Luftgefässe in continuirlichem Zusammenhange steht, nicht selten auch in die Aussenhaut der Malpighi'schen Gefässe und anderer Eingeweide direct sich fortsetzt, kann seine bindegewebige Natur nicht bezweifelt werden.

Was nun den Wurm selbst betrifft, so ist dessen Organisation ebenso einfach, wie abweichend (Taf. I, Fig. 3). Die Leibeswand umschliesst nichts, als einen mächtig entwickelten weiblichen Geschlechtsapparat, der den ganzen Innenraum ausfüllt. Von einem Darm ist ebenso wenig eine Spur vorhanden, wie von Mund und After. Die Nahrungsaufnahme geschieht ausschliesslich durch die Körperoberfläche, deren Bindegewebsüberzug allseitig vom Blute des Trägers umspült wird. Da die Leibeswand überdies eine auf den ersten Blick sehr indifferente Beschaffenheit hat, auch die Bildung des Geschlechtsapparates von dem gewöhnlichen Verhalten der Nematoden kaum weniger verschieden ist, als die Leibesform, so würde man über die Natur des Parasiten nach wie vor in Zweifel sein, wenn nicht der mit Embryonen der verschiedensten Entwicklung strotzend gefüllte sackartige Fruchthälter, der den bei weitem grössten Theil des Wurmkörpers ausmacht, alsbald in ihm einen Nematoden erkennen liesse — eine Form freilich, die durch ihre gesammte innere und äussere Organisation gar auffallend von dem gewöhnlichen Bilde dieser Thiere abweicht.

Damit soll übrigens nicht gesagt sein, dass unser Allantonema in seinen Structurverhältnissen der Beziehungen zu den Nematoden vollständig entbehre. Trotz aller Eigenthümlichkeiten besitzen die einzelnen Organe desselben in ihren Grundzügen deutlich die charakteristischen Merkmale der Spulwürmer, nur dass diese in Folge der Anpassung an die specifischen Lebensverhältnisse ihrer Träger vielfach durch anderweitige Eigenschaften verdeckt sind und auch meist

erst bei eingehender Untersuchung und genauer Vergleichung erkannt werden.

Am Augenfälligsten ist diese nematoide Bildung an der Keimröhre unseres Wurmes, in deren Rhachis wir später ein Gebilde kennen lernen werden, das in dieser Weise überhaupt nur den Spulwürmern zukommt. Aehnlich verhält sich die Leibeswand, obwohl hier die Züge der Nematodenstructur durch den gänzlichen Mangel der Bewegungsfähigkeit, sowie dadurch, dass dieselbe an Stelle des gleichfalls fehlenden Darmapparates ausschliesslich die Function der Nahrungsaufnahme übernommen hat, gar merklich modificirt sind.

Am unverletzten Wurme erscheint die peripherische Schicht der Leibeswand, wenn man sie bei durchfallendem Lichte beobachtet, als ein nach Aussen scharf begrenzter heller Saum, der in einer Dicke von 0,02—0,03 mm die sonst ganz undurchsichtige Körpermasse umgiebt und in unregelmässig gewellter Linie dagegen sich absetzt. An den Enden des Wurmes ist die Dicke beträchtlicher. Es gilt das besonders für das eine meist merklich verjüngte Ende, das bei weiterer Untersuchung als das vordere Körperende erkannt wird.

Die schmutzig gelbe Färbung, die der Wurm bei auffallendem Lichte besitzt, rührt von zahlreichen kleinen Fetttropfen her, welche oberflächlich in die undurchsichtige Innenmasse eingelagert sind, aber nicht etwa gleichmässig durch dieselbe sich vertheilen, sondern gruppenweise in mehr oder minder grosser Menge neben einander liegen. Unter dem Mikroskope hat der Wurm deshalb denn auch ein fast wolkiges Aussehen. Mit der hell durchscheinenden peripherischen Schicht der Leibeswand ist diese pigmenthaltige Parenchymlage trotz der optischen Unterschiede in ganzer Ausdehnung auf's Engste verbunden.

Die äusserste Begrenzung der Leibeswand wird nach Nematodenart von einer C u t i c u l a gebildet, die sich deutlich und scharf gegen die anliegende Substanzmasse absetzt. Dass dieselbe eine nur unbedeutende Dicke (0,004 mm) besitzt und einer jeden besondern Structurirung entbehrt, auch der sonst bei den Spulwürmern so weit verbreiteten Ringelung, dem Wurme also einen nur geringen mechanischen Schutz zu bieten vermag, ist in voller Uebereinstimmung mit den Lebensverhältnissen unseres Parasiten, nicht bloss mit der ohnehin schon durch die tracheenhaltige Bindegewebshülle zur Genüge ge-

schützten Lage und der Unfähigkeit, dieselbe durch fremde und eigene Kräfte zu ändern, sondern auch damit, dass es ausschliesslich die Körperoberfläche ist, durch die der Wurm seine Nahrung aufnimmt. Dieser letztere Umstand findet auch darin seinen Ausdruck, dass die sonst homogene Masse der Cuticularschicht in der Tiefe eine geringere Festigkeit hat, als aussen, was man theils an dem geringeren Lichtbrechungsvermögen erkennt, theils auch daran, dass die Innenfläche in dichtstehende kleine Säulchen zerklüftet ist, welche pallisadenartig an einander gereiht sind und mit ihren Köpfchen buckelartig gegen die Weichtheile vorspringen.

Am deutlichsten markirt sich diese Bildung der Cuticula an Präparaten, die von frischen Würmern stammen, oder solchen, die in schwacher Chromsäurelösung u. dergl. gehärtet sind. Bei Anwendung von absolutem Alkohol und anderen stark wasserentziehenden Reagentien verdichtet sich die Cuticula (unter gleichzeitiger Verdünnung) in einem solchen Grade, dass sie in ganzer Dicke eine nahezu gleichartige Beschaffenheit annimmt.

Im Gegensatze zu der Cuticula verstatten die nach innen darauf liegenden Weichtheile nur dann eine genügende Einsicht, wenn die Würmer nach starker Erhärtung mit dem Mikrotom behandelt werden. Die besten Präparate erhielt ich durch Anwendung von warmem Sublimat, Auswaschen, Uebertragung in absoluten Alkohol und Färbung mit Hämatoxylin. Zur Vermeidung der Schrumpfung empfiehlt es sich, das Object mit Xylol aufzuhellen.

Der Versuch, den Bau dieser Weichtheile in frischem Zustande zu analysiren, führt zu keinem genügenden Resultate. Man muss zu dem Zwecke den Wurm zerschneiden oder den Fruchthälter entfernen. Beide Male aber hebt man die Spannung auf, die der letztere auf die Leibeswände ausübt. In Folge dessen ziehen sich diese stark zusammen. Sie nehmen mehr als das Doppelte der früheren Dicke an und bilden in diesem Zustande eine undurchsichtige Masse von zäher Beschaffenheit, die weder mit der Nadel sich bearbeiten lässt, noch auch durch Zusatz von Essigsäure und andern Reagentien einen weiteren Aufschluss gestattet. Das Einzige, was man darin erkennt, sind zahlreiche bläschenförmige Kerne (0,002 mm), die in unregelmässiger Anordnung neben und über einander gelagert sind, so dass die Weichtheile in ganzer Dicke davon durchsetzt werden. Die kör-

nerreiche Innenschicht erhebt sich vielfach in Form von Buckeln und Zotten, die durch Einlagerung von Fettkörnern und gelblichen Tröpfchen meist dunkel gefärbt sind und einen bald einfachen, bald auch doppelten und selbst dreifachen Kern in sich einschliessen.

Nach der Analogie mit den gewöhnlichen Nematoden haben wir in dieser Leibeswand den Hautmuskelschlauch unserer Würmer vor uns. Aber vergebens suchen wir darin nach Muskelzellen, die doch sonst durch ihre regelmässige Anordnung und ihre Fibrillenzüge so leicht in die Augen fallen. Höchstens dass man die ungeformte weiche Marksubstanz der Muskelzellen, die sonst den Fibrillen aufliegt und nicht selten auch buckelförmig in den Leibesraum hinein vorspringt, zur Vergleichung heranziehen könnte, obwohl der Mangel einer territorialen Abgrenzung der Zellen selbst dann noch immer einen auffallenden Unterschied bedingen würde.

Dieser Unterschied wird auch durch die scharfen Bilder nicht beseitigt, welche die Anwendung der Schnittmethode liefert. Die Substanzmasse der Leibeswand ist, wenn wir einstweilen von den eben erwähnten Vorsprüngen und der zugehörigen dunkeln Parenchymlage absehen, in der That nirgends aus distincten Zellen zusammengesetzt. Sie bildet ein von Kernen durchsetztes sog. Syncytium, das der Innenfläche der Cuticula aufliegt, wie sonst die Muskelschicht, und dieser auch morphologisch entspricht, obwohl die fibrilläre Substanz bis auf unbedeutende Spuren darin zu Grunde gegangen ist. Auf diese möchte ich wenigstens die spärlichen, aber immer noch scharf gezeichneten Strichelungen beziehen, die unterhalb der Cuticula der Länge nach in der Substanz der Leibeswand hinziehen. Die letztere hat eine ziemlich gleichmässige helle Beschaffenheit, enthält aber zahlreiche äusserst kleine Lückenräume von meist rundlicher Form, die während des Lebens vermuthlich mit einer Flüssigkeit gefüllt sind und vielfach so dicht sich drängen, dass das zwischenliegende Parenchym ein fast netzartiges Aussehen annimmt. Von Färbestoffen wird dieses Parenchym nur schwach imprägnirt. Die Kerne, die in den Schnittpräparaten weniger unregelmässig liegen und vornehmlich auf die mittlere und innere Zone der Leibeswand beschränkt sind, bleiben bis auf die darin spärlich eingelagerten Chromatinkörner farblos. Ihre Zahl aber ist eine so bedeutende, dass Allantonema entschieden den Polymyariern zugezählt werden müsste,

wenn ein jeder derselben als Centrum einer Muskelzelle zu deuten wäre.

Unsere Schnittpräparate belehren uns aber weiter von der Thatsache, dass die oben erwähnten Vorsprünge, die mit der zugehörigen Substanzlage früher als integrirende Theile der Leibeswand erschienen, nicht ohne Weiteres derselben zuzuzählen sind, vielmehr eine Auflagerung darstellen, die sich an den meisten Stellen sehr scharf dagegen absetzt (Fig. 3). Allerdings existirt zwischen dieser Auflagerung und der Leibeswand im engeren Sinne allerorten ein fester Zusammenhang, wie das schon erwähnt wurde. Es finden sich in ihr auch zahlreiche Kerne von durchaus ähnlicher Beschaffenheit, wie die oben beschriebenen. Aber bei weiterer Untersuchung ergeben sich zwischen beiderlei Gebilden gar beträchtliche Unterschiede. Und das nicht bloss in anatomischer, sondern auch, was noch wichtiger ist, in genetischer Hinsicht.

Wie wir später noch weiter sehen werden, ist diese Auflagerung nämlich nichts Anderes, als das Ueberbleibsel eines zelligen Parenchyms, das auf früherer Entwickelungsstufe die Leibeshöhle unseres Wurmes bis auf den von den Geschlechtsorganen in Anspruch genommenen Raum fast vollständig ausfüllt (Taf. I, Fig. 4). Es entspricht dasselbe offenbar dem sog. Zellenkörper von Gordius, einem Gebilde, das SCHNEIDER am liebsten als Marksubstanz der Muskelschicht zurechnen möchte [1]), während es VEJDOWSKY, dem wir die neueste Arbeit über Gordius verdanken [2]), auf eine Wucherung peritonealer Zellen zurückführt. Ich werde bei einer späteren Gelegenheit auf dieses merkwürdige Gebilde, das bekanntlich die mannichfachsten Deutungen erfahren hat — MEISSNER sah darin einen Darmkanal, [3]) VILLOT ein Depot unverbrauchter Embryonalzellen [4]) —, zurückkommen, will aber schon hier erwähnen, dass mir die Ansicht von VEJDOWSKY der Wahrheit am nächsten zu liegen scheint. So viel ist jedenfalls gewiss, dass, falls die von mir vertretene Ansicht von der morpholo-

1) Monographie der Nematoden. 1866. S. 199.

2) Zur Morphologie der Gordiiden. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie, 1886. XLIII. S. 369.

3) Beiträge zur Anatomie und Physiologie der Gordiaceen. Ebendas. 1856. Bd. VII. S. 79.

4) Monographie des dragonneaux. Archives zool. expér. T. III. p. 240.

gischen Natur des Leibeswand richtig ist, das betreffende Gebilde bei unserem Wurme der Marksubstanz nicht identifizirt werden kann.

Für das ausgebildete Allantonema ist übrigens die Bezeichnung »Zellenkörper« oder, wie Grenacher wollte[1]), »perienterisches Bindegewebe« kaum die richtige. Wohl bildet die Auflagerung auch im ausgebildeten Wurme eine Ausfüllung des Leibesraumes, besonders im vorderen Körperende, das von dem Genitalapparate nur unvollständig durchsetzt wird (Fig. 3), aber sie stellt doch eine nur wenig compacte Masse dar, und übt Functionen, die offenbar mehr nutritiver, als mechanischer Art sind.

Histologisch schliesst sich das betreffende Gebilde insofern noch an die früheren Zustände an, als es einen entschieden zelligen Charakter hat. Allerdings sind die Zellen gegen früher vielfach verändert. Während sie in der Jugendform (Fig. 4) durch ihre scharfe Begrenzung, ihre unregelmässige polyedrische Gestalt und ihr ziemlich helles Protoplasma den Elementen des Zellenkörpers von Gordius ähneln, auch eine im Ganzen sehr gleichmässige Grösse besitzen (0,015—0,02 mm), erscheinen sie jetzt als hüllenlose körnige Ballen von vielfach wechselnder Form und Grösse. Sie sind bald mehr, bald minder dicht an einander gedrängt und gehäuft, je nach den räumlichen Verhältnissen, und mitunter sogar, nach der Zahl der in ihnen enthaltenen Kerne, zu zweien oder dreien in eine gemeinschaftliche Masse verschmolzen. Die Kerne sind bläschenartig, wie die der anliegenden Leibeswand, mit denen sie auch durch ihre Grössenverhältnisse so ziemlich übereinstimmen, meist aber nur mit einem einzigen grösseren Chromatinkörnchen (Nucleolus) versehen. Das körnige Protoplasma hat eine grosse Verwandtschaft zu Farbestoffen, so dass die Zellen — im Gegensatze zu der Substanz der eigentlichen Leibeswand — an Imbibitionspräparaten durch ihre intensive Färbung auffallen. Die hier und da im Innern vorkommenden kleinen Hohlräume enthalten während des Lebens die schon mehrfach erwähnten gelben Fetttröpfchen.

So weit der Uterus den Körperwandungen anliegt und diese dehnt, besitzen die Zellen eine fast epitheliale Anordnung. Sie bilden eine nur einfache Lage und sind in verschiedenem Grade abgeplattet,

1) Zur Anatomie der Gattung Gordius. Zeitschr. f. wissensch. Zool. 1868. Bd. XVIII. S. 330.

meist aber noch etwas bauchig, und weniger regelmässig geformt, als wirkliche Epithelzellen. Hier und da wölbt sich sogar eine Zelle unter gleichzeitiger Aufhellung, und dann von beträchtlicher Grösse, (bis 0,05 mm), buckelförmig nach innen. Noch häufiger ist das an solchen Stellen (Fig. 3) der Fall, die nur einem geringen Drucke unterliegen und der Erhebung keinen Widerstand entgegensetzen. So besonders auf der Höhe des Uterusgrundes, also bei Beginn des vorderen Körperendes, das oftmals in einer Länge von 0,3—0,4 mm von den Geschlechtsorganen frei bleibt und bis auf einzelne mit Blutgerinnsel gefüllte Hohlräume von wechselnder Weite und unregelmässiger Gestaltung nur mit den Ueberresten des früheren Zellenkörpers gefüllt ist. Bei manchen, besonders jungen Würmern hat ein Theil dieser Zellen (0,03 mm) mit der eckigen Form auch den früheren Zusammenhang beibehalten, aber die grössere Menge derselben zeigt doch eine weit lockerere Fügung, was freilich nicht ausschliesst, dass sie hier oder da wieder dichter sich drängen und gruppenweise zu grösseren oder kleineren Haufen sich vereinigen. Wo letztere, wie besonders im vorderen Körperende, fest auf der Körperwand aufsitzen, da ziehen sich die einzelnen Zellen gewöhnlich in einen nach aussen gerichteten mehr oder minder langen Fortsatz aus. Auch sonst wechselt die Form der Zellen vielfach nach den Druckverhältnissen, die darauf einwirken, obwohl im Grossen und Ganzen die Kugelform bei ihnen vorwaltet.

Ich brauche wohl kaum darauf aufmerksam zu machen, dass die buckel- und zottenförmigen Vorsprünge, die der Innenfläche der Körperwand aufsitzen, vornehmlich von den hier beschriebenen Zellen und Zellengruppen herrühren. Dass dieselben nach der Entfernung des Genitaltractus höher und zahlreicher sind, als im unverletzten Thiere, in dem man dieselben meist nur im Vorderleibe und auch hier nur von geringer Entwicklung antrifft, ist die Folge der Zusammenziehung, welche die Weichtheile durch die Veränderung der Spannungsverhältnisse erlitten haben.

Ob die Hervorragungen der inneren Körperfläche übrigens sämmtlich unter den hier hervorgehobenen Gesichtspunkten zu betrachten sind, steht dahin. Schon oben habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass einzelne der Wandzellen durch Schwellung und Aufhellung in eigenthümlicher Weise sich verändern. Auf diese Weise entstehen

gelegentlich blasenartige Auftreibungen von sehr beträchtlicher Grösse (Fig. 3). In einzelnen Fällen messen dieselben bis zu 0,2 mm, aber gewöhnlich bleiben sie kleiner, meist nur 0,08—0,1 mm. Und auch das nur im längsten Durchmesser, während die Höhe kaum die Hälfte misst. Der Inhalt besteht aus einer fein vertheilten Körnermasse, bisweilen auch aus einem förmlichen Gerinnsel, als wenn die Räume im Leben mit einer Flüssigkeit gefüllt wären. Mitunter sieht man in der Körnermasse auch einen bläschenförmigen Kern, der über die Zusammengehörigkeit mit den perienterischen Zellen keinen Zweifel lässt. Andere Male freilich habe ich, besonders in den körnchenlosen Blasenräumen, vergebens darnach gesucht.

Von Seitenlinien und Seitenschläuchen ist bei Allantonema eben so wenig eine Spur vorhanden, wie bei Gordius. Da gleichzeitig auch die Medianlinien fehlen, so ist die Bildung der Leibeswand in allen Radien genau die gleiche. Eine Orientirung über Rücken und Bauch ist aus anatomischen Gründen somit unmöglich. Und das um so mehr, als unsere Würmer zugleich des excretorischen Apparates mit dem sonst bauchständigen Porus entbehren, und die Geschlechtsöffnung eine völlig terminale Lage einhält. Nach den Krümmungsverhältnissen wird man sich übrigens zumeist versucht fühlen, die concave Körperfläche für die ventrale zu halten. Ein sicheres Urtheil hierüber wird sich jedoch erst dann gewinnen lassen, wenn es gelingt, die Entwicklung des Wurmes auf die nematoide Larve zurückzuführen.

Eine gleiche Ungewissheit herrscht über das Nervensystem unseres Thieres. Dass dasselbe nur eine unbedeutende Entwicklung besitzt, war bei der Reduction der activen Lebensthätigkeiten, die unser Parasit erlitten hat, von vornherein zu erwarten. Aber auch bei aufmerksamster Betrachtung meiner Schnittserien ist es mir nicht möglich gewesen, die Existenz nervöser Elemente ausser Zweifel zu stellen. Das Einzige, was möglicher Weise darauf zu beziehen ist, sind ein Paar Zellen von 0,02 mm, die ich an einem meiner Präparate in geringer Entfernung vom vorderen Körperende auf der concaven Körperfläche auffinde. Sie liegen im Innern der Muskelschicht und sind durch den Besitz eines distincten, wenn auch nackten Zellenleibes deutlich gegen die umgebende Substanzmasse abgesetzt. Aehn-

liche Zellen finden sich, gleichfalls in die Lebenswand eingebettet, im Umkreise der Genitalöffnung.

Papillen besitzt unser Wurm weder hinten noch vorne. Sie dürften ihm auch bei seiner Lebensweise, die eben so wenig, wie wir alsbald sehen werden, einen geschlechtlichen Verkehr, wie eine active Nahrungsaufnahme zulässt, völlig werthlos sein.

Natürlich gilt das nur von der parasitären Form unseres Thieres. So lange dasselbe in nematoider Gestalt ein freies Leben führt, ist seine Bildung eine ganz andere. In diesem Zustande besitzt es (Fig. 8), wie wir später kennen lernen werden, nicht bloss einen deutlichen animalischen Organenapparat, sondern auch einen wohl entwickelten Darmtractus mit Mund und After, eine Summe von Gebilden, die nach der Einwanderung sämmtlich der Rückbildung anheimfallen und zum grossen Theile spurlos zu Grunde gehen. Es gilt das namentlich auch von dem Darmapparate, wie das schon früher bemerkt wurde. Die Art der Reduction hat sich freilich meinen Untersuchungen bis jetzt noch entzogen. Dass aber der Zellenkörper keineswegs, wie MEISSNER solches für Gordius annahm, ein Umwandlungsproduct des Darmes darstellt, dürfte gewiss sein[1]).

Es ist eine nothwendige Folge dieser Rückbildung, dass die Leibeshöhle unseres Allantonema an Stelle der sonst bei den Nematoden darin vorhandenen Organe nichts enthält, als einen Genitalschlauch, ein Gebilde freilich von so mächtiger Entwicklung, dass es nahezu den ganzen Innenraum durchzieht und ausfüllt. Bei den ausgebildeten Parasiten — und nur von diesen handeln wir zunächst — bildet dieser Geschlechtsschlauch den bei Weitem ansehnlichsten Theil der gesammten Leibesmasse. Er ist von so gewaltiger Grösse, dass man kaum übertreibt, wenn man sagt, dass der Wurm in seiner Gesammtheit nur wenig mehr als eine lebendige Umhüllung des Geschlechtsapparates darstellt (Fig. 3).

Der Typus der Geschlechtsbildung ist immer der weibliche. Männliche Thiere existiren nicht. Allerdings besitzen unsere Para-

1) Nachdem durch GRENACHER inzwischen (a. a. O.) der Nachweis geliefert ist, dass Gordius zeitlebens einen Darm besitzt, der — MEISSNER hielt ihn für ein Excretionsorgan — mit der Mundöffnung in Verbindung steht, kann über den Irrthum der MEISSNER'schen Darstellung kein Zweifel mehr obwalten.

siten ein mit Sperma erfülltes Receptaculum seminis — man findet ein solches auch schon bei jugendlichen Parasiten (Fig. 4), die noch ohne Embryonen und Eier sind, bei Würmern, die freilich nicht im ausgebildeten Rüsselkäfer, sondern in den Larven und Puppen leben — aber das Sperma wird nicht durch eine Begattung übertragen, sondern ist, wie wir im Laufe unserer Darstellung uns überzeugen werden, das Product einer der weiblichen Reife vorausgehenden männlichen Entwicklung, die das spätere Ovarium zunächst zur Erzeugung von Samenelementen befähigt.

Unser Allantonema ist mit anderen Worten hermaphroditischen Geschlechts, es ist ein protandrischer Hermaphrodit ohne specifische männliche Organe. Schon früher haben wir Gleiches bei gewissen anderen Nematoden kennen gelernt, aber immer nur bei Arten, die dem Genus Rhabditis (Leptodera und Pelodera Schn.) zugehören, oder diesem systematisch nahe stehen, wie die sog. Ascaris nigrovenosa (Rhabdonema nigrovenosum Lt.), die sog. Anguillula intestinalis (Rhabdonema strongyloides Lt.) und Angiostoma.[1])

Die zuletzt genannten drei Wurmformen sind bekanntlich heterogone Nematoden und nur in ihrer parasitären Form protandrisch, während die frei lebenden Nachkömmlinge derselben zweigeschlechtliche Rhabditiden darstellen. Wir werden später den Nachweis liefern, dass auch unser Allantonema heterogon ist und sich auch sonst durch seine Lebensgeschichte an diese Würmer anschliesst. Der protandrische Hermaphroditismus ist auch bei Allantonema nur den Parasiten eigen, nicht aber der frei lebenden Rhabditisgeneration, die in gleicher Weise, wie bei Rhabdonema und Angiostoma, vorkommt und sich, wie bei diesen, aus männlichen und weiblichen Thieren zusammensetzt.

1) Die ersten genaueren Angaben über diese Verhältnisse verdanken wir Schneider, der (Monographie der Nematoden, S. 315) den protandrischen Hermaphroditismus nicht bloss bei sieben Species des Genus Rhabditis — später hat Vernet (Arch. des sciences et de la biblioth. univers. Genève 1872. Sept.) noch eine achte Form hinzugefügt —, sondern auch bei der bis daher für parthenogenesirend gehaltenen Ascaris nigrovenosa erkannte. Ueber Anguillula intestinalis vgl. man Grassi (Gaz. med. Ital. Lombard. 1878. No. 48) und Leuckart (Ber. der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Math.-phys. Classe. 1882. S. 85), über Angiostoma von Linstow (Arch. f. Naturgesch. 1885, Th. I. S. 1 ff.).

Was den anatomischen Bau der hermaphroditischen Geschlechtsorgane bei unserem Allantonema betrifft, so wird der weitaus massenhafteste Theil derselben von dem Fruchthälter gebildet, einem ansehnlichen Sacke, der bei einer Länge von 2,5 mm eine Weite von 1,25 mm hat und nahezu die ganze Leibeshöhle füllt, so dass nur der vordere Theil derselben frei bleibt (Fig. 3). Freilich sind es nur die völlig entwickelten Thiere, die sich also verhalten. In der Jugend, so lange die Würmer unter 1 mm messen und ihre weibliche Reife noch nicht erlangt haben (Fig. 4), ist der spätere Uterus ein verhältnissmässig enger und kurzer Canal (von 0,35 mm Länge und 0,08 mm Weite), der auch mit Einrechnung der übrigen Genitalien gegen die umgebende Körpermasse nicht unbeträchtlich zurücksteht.

Der Druck, den dieser Fruchthälter bei vollständiger Füllung (im Hochsommer) auf den Wurmkörper ausübt, hat eine solche Spannung zur Folge, dass man die Leibeswand (bei frischen Thieren) nur an irgend einer Stelle zu verletzen braucht, um den Genitalschlauch alsbald in ganzer Länge nach aussen hervortreten zu sehen. Dabei gewinnt man zugleich die Ueberzeugung, dass derselbe — was auch die weitere Untersuchung bestätigt — in ganzer Ausdehnung frei im Innern der Leibeshöhle enthalten ist. Selbst das hintere Ende des Uterus erscheint in der Regel intact, so dass ich es eine Zeit lang für blind geschlossen hielt, bis ich mich schliesslich von der Anwesenheit einer Ausmündung überzeugte. Dieselbe ist, wie wir später sehen werden, eng und mit einer Klappenvorrichtung versehen (Fig. 3), die es erklärlich macht, dass sie nicht gleich bei erster Untersuchung in's Auge fällt.

Während der Fruchthälter nun am hinteren Ende, wie eben erwähnt, durch eine enge Oeffnung ausmündet, setzt sich derselbe vorn in einen dünnen und fadenförmigen Anhang fort, der bei einer Dicke von meist 0,08 mm eine Länge von etwa 7—8 mm besitzt. Sehr bald nach seinem Ursprunge wendet sich derselbe in langgezogener Schlinge, bald so, bald anders gelagert, zwischen der Uteruswand und den Körperdecken nach hinten, um hier eine Anzahl von meist kurzen Windungen zu machen und schliesslich wiederum nach vorne emporzusteigen (Fig. 3). Das blind geschlossene letzte

Ende ist meist auf der concaven Fläche des Wurmes gelegen und gewöhnlich dem Uterusgrunde angenähert.

Ich brauche kaum zu bemerken, dass dieser Faden die Eiröhre unseres Thieres darstellt, die einzige, die dasselbe besitzt, obwohl die grössere Mehrzahl der Nematoden bekanntlich deren zwei hat. Bei mikroskopischer Untersuchung erkennt man daran alsbald einen Leitungscanal und ein Ovarium, die freilich beide nur durch die Beschaffenheit ihres Inhaltes von einander zu unterscheiden sind. Auch das Endstück des Fadens erscheint als ein Organ von specifischer Bedeutung, indem es statt der Eier bloss Eikeime in sich einschliesst. Es bildet das Keimfach des Eierstockes, eine Röhre von ansehnlicher Länge, die nahezu den sechsten Theil des gesammten Anhanges ausmacht und zur Zeit der höchsten Geschlechtsentwicklung in ihrer Mitte eine leichte Schwellung zeigt, obwohl die Dicke sonst meist merklich gegen den übrigen Faden zurückbleibt.

Eine besondere Berücksichtigung verlangt die Verbindungsweise der Eiröhre mit dem Fruchthälter. Nicht bloss, weil letzterer vor Aufnahme derselben in einen meist ziemlich ansehnlichen schlauchartigen Fortsatz ausgezogen ist (Fig. 3), der sich hornartig nach abwärts krümmt und gelegentlich zu einer Länge von 1 mm heranwächst (Weite = 0,3 mm), sondern vorzugsweise deshalb, weil sich zwischen diesen Fortsatz und das basale Ende der Eiröhre ganz constant noch ein besonderes Gebilde von kugliger Gestalt einschiebt, das sich gewöhnlich gegen die benachbarten Theile deutlich absetzt und bei genauerer Analyse als Receptaculum seminis erkannt wird. Am auffallendsten ist dieses Organ bei jugendlichen Würmern vor Eintritt der weiblichen Reife (Fig. 4), in denen es schliesslich einen Durchmesser von 0,1 mm hat und sich in Folge seiner Füllung mit Sperma schon dem unbewaffneten Auge als ein weisses Pünktchen bemerkbar macht.

In Betreff des histologischen Baues ist zu bemerken, dass die Wand des Genitalschlauches zunächst aus einer structurlosen Membran besteht, die im Fruchthälter, besonders der hinteren Hälfte, eine ziemlich derbe Beschaffenheit hat, hier auch leicht sich faltet und gestrichelt aussieht, sonst aber äusserst zart ist. Die Innenfläche trägt mit Ausnahme des Keimfaches eine feinkörnige Belegschicht, die in mehr oder minder grossen, ziemlich regelmässigen Abständen einen bläschen-

förmigen hellen Kern (0,018 mm) mit einfachem Nucleolus aufweist. Obwohl man für gewöhnlich nicht im Stande ist, in dieser Belegschicht Zellengrenzen zu unterscheiden, kann über die epitheliale Natur derselben kein Zweifel sein. Und das um so weniger, als sie im Innern des Eileiters ganz deutlich den Charakter eines Epithels zur Schau trägt. Besondere Membranen sind an den Zellen allerdings nicht wahrnehmbar, aber trotzdem erscheinen dieselben deutlich gegen einander abgesetzt. Sie sind etwas in die Länge gezogen (0,045 mm lang) und ziemlich bauchig, so dass sie nach innen vorspringen. Im Fruchthälter sind die Zellengrenzen wieder geschwunden, aber dafür trägt die Belegschicht auf der Innenfläche eine wenngleich dünne, doch sehr scharf gezeichnete und feste Cuticula, welche im Umkreise der (0,024 mm grossen) Kerne, die durch ziemlich weite Entfernungen von einander getrennt sind, buckelförmig vorspringt. In manchen Fällen erreichen diese Vorsprünge eine Höhe von 0,04 mm, fast das Zehnfache der Dicke, welche die stark gedehnte Uteruswand sonst hat.

Obwohl die Grösse und Gruppirung dieser Erhebungen sonst auf das Mannichfachste wechselt, giebt es im Uterus unseres Wurmes eine Stelle, an der dieselben nicht nur ganz constant gefunden werden, sondern auch zu einer ungewöhnlichen Entwicklung gelangen. Es ist das äusserste Ende des Fruchthälters, das sich mit einer mehr oder minder deutlich ausgesprochenen trichterförmigen Fortsetzung in die hier etwas verdickten Leibeswände einsenkt, und in eine ebenso enge, wie kurze Röhre fortsetzt, welche durch den Geschlechtsporus nach aussen führt.

An dieser Stelle erlangen die Erhebungen nicht nur eine grössere Ausbildung, so dass sie wie Zellen erscheinen, die der Uteruswand aufliegen, sie häufen sich hier auch zu einem fast selbständigen Gebilde zusammen, das, einem Muttermunde vergleichbar, bald zapfenförmig in die Uterushöhle hineinragt (Fig. 3), bald auch mehr oder minder tief in die anliegende Körperwand sich einkeilt. Trotz ihrer eigenthümlichen Bildung sind diese Hervorragungen mit den oben erwähnten Vorsprüngen in allen wesentlichen Eigenschaften identisch. Sie haben zu der Uteruswand die gleichen Beziehungen und stimmen auch in Aussehen und Bau mit ihnen völlig überein. In beiden stösst man auf dieselben bläschenförmigen Kerne, in beiden auch

auf das gleiche Protoplasma. Dass die Kerne in den terminalen Erhebungen gelegentlich in doppelter und selbst dreifacher Anzahl vorkommen, bedingt keinen wesentlichen Unterschied, zumal Gleiches hier und da auch sonst in den Uterusvorsprüngen gefunden wird. Eben so wenig der Umstand, dass die Zapfen des Muttermundes nicht selten stärker gegen die Wand des Fruchthälters sich absetzen, bisweilen selbst gestielt sind und meist auch zu einer beträchtlichern Grösse (bis zu 0,06 mm) heranwachsen.

Die functionelle Bedeutung der hier beschriebenen Bildung dürfte kaum zweifelhaft sein. Sie repräsentirt einen Verschlussapparat, der die Ausmündung des Uterus umfasst und einengt, den Zusammenhang mit aussen also auf ein Minimum beschränkt, und den Inhaltsmassen nur dann den Austritt gestattet, wenn diese dagegen andrängen. Da nun aber der Uterus eben so wenig eine distincte Musculatur besitzt, wie die Leibeswand, werden es unter solchen Umständen nur die selbständig beweglichen Embryonen sein, die das Freie gewinnen, während die Eier, die der eigenen Triebkräfte entbehren, im Innern des Uterus zurückbleiben. In der That stösst man in der Leibeshöhle der Rüsselkäfer niemals auf Eier — vorausgesetzt natürlich, dass der Parasit nicht verletzt wurde —, obwohl die Embryonen vielleicht zu Tausenden darin sich tummeln.

Eben so eng, wie das in der Axe des Verschlussapparates hinziehende Lumen, ist die Fortsetzung desselben, welche die äusseren Körperwände durchsetzt (Fig. 3). Sie würde sich der Untersuchung vollständig entziehen, wenn sie nicht von einer ziemlich derben Cuticula ausgekleidet wäre, die continuirlich mit der Aussenhülle des Wurmes zusammenhängt und somit denn auch als eine directe Fortsetzung derselben betrachtet werden darf. Da ein Innenraum für gewöhnlich nicht nachweisbar ist, so erscheint das Rohr (an Schnittpräparaten) wie ein scharf gezeichneter Doppelfaden, der geraden Wegs oder auch in gebrochenem Verlaufe durch die Körperwand hindurchzieht und schliesslich mit der Cuticularbedeckung des Wurmes sich verbindet. Die letztere ist an der Verbindungsstelle gelegentlich etwas eingezogen. In solchen Fällen ist auch wohl die nächste Umgebung der Oeffnung lippenartig aufgewulstet. Doch das erscheint als Ausnahme, denn für gewöhnlich ist der Porus

genitalis in keinerlei Weise ausgezeichnet und so unscheinbar, dass er nur bei genauer Untersuchung sich auffinden lässt.

Bei dem Mangel einer jeden Muskeleinrichtung im Umkreise des Endstückes wird der Verschluss desselben natürlich nur durch die elastische Zusammenziehung der cuticularen Auskleidung bewirkt. Die derselben anliegenden Gewebstheile zeigen an sich keinerlei Abweichung von dem gewöhnlichen Verhalten. Allerdings stösst man in der Umgebung der Geschlechtsöffnung sehr gewöhnlich auf einige Zellen, die sich trotz der Abwesenheit einer Hüllhaut deutlich gegen das Stroma, dem sie eingelagert sind, abgrenzen, allein es ist mir zweifelhaft, ob diese Gebilde, wie das schon oben erwähnt ward, der genuinen Leibeswand angehören.

Wenn wir von den Hüllen des Tractus genitalis unsere Aufmerksamkeit jetzt dem Inhalte zuwenden, dann beobachten wir in den einzelnen Abschnitten desselben eine vollständige Entwickelungsgeschichte der Eier von den ersten Anfängen bis zur Ausscheidung eines lebensfähigen Embryo.

Als Bildungsstätte der Eier fungirt das schon oben beschriebene Keimfach, ein Abschnitt, der, wie wir wissen, der epithelialen Innenlage entbehrt, dafür aber mit dicht gedrängten Eikeimen vollständig gefüllt ist. Es sind hüllenlose helle Zellen von geringer Grösse (zumeist 0,003 mm) mit einem relativ sehr ansehnlichen Keimbläschen, das einen stark chromatinhaltigen Nucleolus in sich einschliesst. Nach dem blinden Ende zu verliert die Begrenzung der Zellen allmählich die frühere Bestimmtheit, während die Keimbläschen mit ihrer Wand und ihrem Keimflecke nach wie vor, nur in geringerer Grösse, scharf hervortreten. Im äussersten Ende liegen die Keimbläschen fast unmittelbar neben einander. Vermuthlich unterliegen dieselben hier einer Theilung, die sich jedoch wegen der Kleinheit des Objectes nicht deutlich erkennen lässt.

Anders verhält es sich am entgegengesetzten Ende, welches in den eigentlichen Eierstock übergeht. Nicht bloss, dass die primitiven Eizellen hier am grössesten sind und am schärfsten gegen einander sich absetzen, man erkennt hier in der Axe der Röhre sehr bald auch eine strangförmige Ansammlung von Dottersubstanz, die freilich zunächst, im Anfange des Ovariums, nur dünn ist, aber allmählich an Masse zunimmt und rasch zu einem Gebilde wird, welches reichlich

den dritten Theil des Querdurchmessers in Anspruch nimmt. Im Umkreise desselben liegen die Eizellen Anfangs noch in drei- bis vierfacher Zahl über einander. Sobald dieselben aber, wie das nach dem Hervortreten aus dem Keimfache rasch geschieht, durch Verdickung des Protoplasmahofes sich vergrössern, ordnen sie sich in eine einfache Lage, die allseitig dem Axenstrange aufliegt. Je mehr das Grössenwachsthum fortschreitet, desto mehr vertauschen die Eier ihre ursprüngliche Kugelform mit einer mehr conischen, indem sie gegen den Axenstrang hin in eine Spitze sich ausziehen, welche sie mit demselben verbindet. Der Axenstrang ist eben Nichts, als eine Rhachis, wie sie auch bei anderen Nematoden, besonders solchen, die eine grössere Anzahl Eier erzeugen, in wesentlich gleicher Weise gefunden wird.

Mit der Grössenzunahme ändert sich zugleich die Beschaffenheit des Dotters, indem dieser allmählich ein mehr körniges Gefüge annimmt, obgleich die Rhachis ihr ursprüngliches helles Aussehen unverändert beibehält. Dafür aber verliert die letztere allmählich ihre frühere Dicke, und zwar so rasch und in einem solchen Grade, dass sie schon in der Mitte der Keimröhre nur noch als ein äusserst dünnes Fädchen erscheint, kaum ansehnlicher, als die jetzt spitzwinklig damit in Verbindung stehenden Ausläufer der Eier. Die Verdünnung ist die Einleitung zu einem vollständigen Schwunde; die Eier werden frei, und die conisch verjüngte Spitze wird eingezogen, so dass die frühere Keilform dann einer einfachen ovoiden Gestaltung Platz macht.

In dieser Form trifft man die Eier, bald einzeln hinter einander, bald auch zu mehreren auf demselben Querschnitte, in dem letzten Theile der Eiröhre, jenem Abschnitte, dessen wir oben als Eileiter gedacht haben. Sie besitzen bei einer Länge von meist 0,03 mm einen Querdurchmesser von 0,025 mm, sind aber immer noch hüllenlos und durch die in Menge eingelagerten Dotterkörner meist so undurchsichtig, dass das Keimbläschen (0,009 mm) in der der Regel erst nach vorhergangener Compression zu sehen ist.

Um aus dem Eileiter in den Fruchthälter überzutreten, müssen die Eier nun die als kuglige Anschwellung oben beschriebene Samentasche passiren, die schon vor Eintritt der weiblichen Reife, wie wir wissen, prall mit Sperma gefüllt ist. Das letztere besteht aus einer Unsumme äusserst kleiner Ballen von weniger als 0,006 mm, je mit einem das Licht stark brechenden Kerne und einem hellen Protoplasma-

hofe von geringer Dicke. Hat bei unseren Würmern die Eiproduction schon länger bestanden, dann ist der Samenvorrath grossentheils verbraucht; die Samenzellen sind dann durch die den Innenraum passirenden Eier dicht an die Wand des Receptaculum angedrängt und oftmals nur vereinzelt aufzufinden, so dass sie leicht übersehen werden können.

Die Befruchtung selbst habe ich nicht beobachtet. Unser Wurm dürfte dafür ein wenig geeignetes Object sein. Dass dieselbe aber im Receptaculum abläuft, kann nicht bezweifelt werden. Es geht mit aller Bestimmtheit daraus hervor, dass die Eier alsbald nach ihrem Durchtritte durch dasselbe Veränderungen erleiden, wie solche sonst bei den Nematoden der Befruchtung zu folgen pflegen. Die früher noch ziemlich locker gefügten Dotterkörner rücken näher an einander, das Ei selbst verkleinert sich um ein Merkliches (gelegentlich bis auf 0,02 mm), es wird dunkel und undurchsichtig, und scheidet eine Haut aus, die freilich niemals eine grössere Dicke annimmt und beständig hell bleibt, trotzdem aber den Eiern des Fruchthälters ein charakteristisches Gepräge giebt. Gleichzeitig entzieht sich das Keimbläschen, das beim Eintritt in das Receptaculum unter günstigen Verhältnissen deutlich sichtbar war, der weiteren Untersuchung.

Im Innern des Fruchthälters schliessen sich an diese Veränderungen sodann die Erscheinungen der Dotterfurchung und der Embryonalbildung, die, so weit ich sie verfolgt habe, der Hauptsache nach die bei anderen Nematoden so vielfach, neuerdings besonders von Götte und Hallez, beobachteten Erscheinungen wiederholen.

Die Furchung zeigt in ihren ersten Stadien mancherlei individuelle Verschiedenheiten, ist aber bis zur Viertheilung gewöhnlich ganz regelmässig. Da das Ei eine ziemlich bauchige Form hat, so sind die Dotterballen während der letzteren derart geordnet, dass zwei derselben — je einer ein Abkömmling der ersten zwei Furchungskugeln — den Polen angehören, die beiden andern aber den äquatorialen Raum einnehmen. Später wird die Furchung unregelmässig, indem die eine der Endzellen (bisweilen auch eine zweite anliegende) eine längere oder kürzere Zeit hindurch ungetheilt bleibt, während die übrigen Kugeln weiter zerfallen und einen Haufen kleinerer Zellen von heller Beschaffenheit liefern, die der grossen Furchungskugel sich auflagern (Fig. 5). Die letztere wird mit ihren Theilungs-

producten zum Entoderm und bildet den Chylusmagen, dessen Zellen sich durch Körnerreichthum und Grösse noch eine längere Zeit hindurch scharf gegen die peripherischen Ectodermzellen, die den übrigen Furchungskugeln entstammen, absetzen. Der Haufen, den diese Zellen Anfangs bildeten, verwandelt sich bei Beginn der Längsstreckung (Fig. 6[a]) in eine Art Keimstreifen, der mit stark verdicktem Kopfende nachen- oder schuhartig an der späteren Bauchfläche des Entodermballens hinzieht und diesen erst dann vollständig umwächst, wenn die Streckung des Embryonalkörpers weitere Fortschritte gemacht hat. Noch bevor das geschehen ist, haben sich die Zellen des Entoderms ihrer grösseren Menge nach in zwei Längsreihen geordnet und zur Bildung der späteren Darmwand an einander gefügt. Eine nach aussen gegen den Keimstreifen gelegene Zellenschicht darf wohl als die Anlage der späteren Musculatur betrachtet werden. Sie besteht aus Zellen, die nach Grösse und Aussehen zunächst gleichfalls dem Entoderm zugehören. Inzwischen macht auch das Längenwachsthum weitere Fortschritte. Da dieses nun aber vornehmlich das hintere Leibesende betrifft, die Eihaut jedoch nur wenig nachgiebt, so schlägt ersteres sich gegen die Bauchfläche um. Es entsteht die für die Nematoden schlechtweg so charakteristische kaulquappenartige Embryonalform. Der immer weiter auswachsende Schwanztheil ist schlanker, als das Kopfende, das eine fast keulenförmige Gestalt hat und seiner Hauptmasse nach aus Ectodermzellen besteht, welche das Baumaterial nicht bloss für die Leibeswände, sondern auch für den Pharynx abgeben. Die Mundöffnung lässt schon auf früher Entwicklungsstufe sich nachweisen (Fig. 6[b]).

Durch fortgesetztes Längenwachsthum entsteht nun aus diesem plumpen Geschöpfe unter merklicher Grössenzunahme ziemlich rasch ein schlanker Spulwurm von 0,3—0,32 mm Länge und 0,01—0,12 mm Dicke (Fig. 7), der im Innern der Eihaut sich zusammenknäuelt und darin eine Zeitlang verweilt, dann aber dieselbe zerreisst und in den Fruchthälter übertritt, um auch diesen schliesslich, früher oder später, mit der Leibeshöhle seines Trägers zu vertauschen.

Die Zahl der den Fruchthälter füllenden Eier darf man unter Berücksichtigung der Grössenverhältnisse auf mindestens 5—6000 veranschlagen. Sie repräsentiren natürlich die verschiedensten Entwickelungszustände, die jüngern zumeist im Grunde des Fruchthälters, die

spätern mehr dem gegenüberliegenden Ende angenähert, doch keineswegs so regelmässig vertheilt, wie das bei den Arten mit cylindrischem Uterus der Fall ist. Freie Embryonen verschiedener Grösse sind überall, in den oberen Partien des Fruchthälters so gut wie hinten anzutreffen. Dazwischen stösst man auf zahlreiche leere und collabirte Eihüllen von unregelmässiger Gestaltung, nicht selten auch auf fadenartige zarte Stränge, die wie abgestreifte Embryonalhäute aussehen und, da sie öfters im Zusammenhange mit den Eihüllen gesehen werden, der Vermuthung Raum geben, dass die jungen Würmchen schon frühe, beim Hervorschlüpfen, einer Häutung unterliegen.

Aeltere Parasiten enthalten übrigens sehr gewöhnlich eine Anzahl Eier mit mehr oder minder zerfallenem Dotter, vermuthlich solche, die früher oder später während der Embryonalentwicklung zu Grunde gegangen sind. Bisweilen hat dieses Geschick sogar die grössere Menge der Keime getroffen; ich bin auf einzelne Würmer gestossen, deren Eier fast sämmtlich ohne Entwickelung geblieben waren.

Die Brut unseres Allantonema besitzt übrigens nicht nur die Gestalt, sondern auch die Organisation eines genuinen Spulwurmes (Fig. 8), so dass man ohne Kenntniss des Mutterthieres unmöglich auf die Abstammung von einem durchaus anders gebauten Geschöpfe zurückschliessen könnte. Die langgestreckte schlanke Form, die Bildung der Körperenden, von denen das vordere stumpf abgerundet, das hintere aber verjüngt und zugespitzt ist, der den Leib durchziehende gerade Darm mit seiner Zellenwand, der helle cylindrische Pharynx (von 0,08 mm) — das Alles sind Verhältnisse, wie man sie bei fast allen jungen Nematoden in wesentlich derselben Weise antrifft. Bei näherer Untersuchung erkennt man auch die der hellen Leibeswand aufliegende zarte, aber scharf gezeichnete Cuticula mit den durch Mund und After nach Innen hineinragenden Fortsetzungen, die einstweilen freilich nur die Beschaffenheit eines kurzen und dünnen soliden Fadens besitzen. Noch deutlicher fast ist die 0,014 mm messende Geschlechtsanlage, die in einem Abstande von 0,09 mm von der Schwanzspitze — 0,07 mm von dem After — als eine zunächst nur einzellige kleine Aufwulstung gegen den Darm hin vorspringt.

Wenn die Würmchen ihre Eihülle eben verlassen haben, dann sind sie von verhältnissmässig hellem Aussehen. Es rührt dies vornehmlich daher, dass ihre Darmzellen nur spärlich mit Körnchen gefüllt sind, so dass die Kerne derselben als helle Bläschen von 0,004 mm deutlich hervortreten. Gegen Wasser sind sie in hohem Grade empfindlich; sie platzen, sobald man sie damit in Berührung bringt.

Doch das ändert sich, wenn die Würmchen eine Zeit lang in der Leibeshöhle ihres Wirthes verweilen. Nicht, dass sie hier eine neue Metamorphosenstufe erreichten; sie bleiben morphologisch so ziemlich in dem früheren Zustande, aber sie erstarken unter der Einwirkung der sie direkt umspülenden Blutflüssigkeit und wachsen und sammeln Reservestoffe, die sie später, unter anderen Verhältnissen, zu ihrer weiteren Entwicklung verbrauchen.

Ursprünglich nur wenig mehr als 0,3 mm lang und 0,012 mm dick, gewinnen die jungen Würmchen ziemlich rasch, wie das verhältnissmässig nur seltene Vorkommen von Zwischenzuständen vermuthen lässt, eine Länge von 0,45 mm und einen Querdurchmesser von 0,025 mm. Das Längenwachsthum betrifft (Fig. 9) vornehmlich den mittleren Körper, soweit derselbe von dem Chylusdarme durchsetzt wird, denn der den Pharynx umgebende Vorderleib und die dem After folgende Schwanzspitze behalten nahezu die frühere Grösse (Vorderleib = 0,088 mm, Schwanzspitze = 0,023 mm).

Gleichzeitig füllen sich die Zellen des Chylusdarmes mit einem grobkörnigen Inhalte, und das so reichlich, dass die Kerne vollständig davon verdeckt werden, und die früheren Zellengrenzen fast verloren gehen. Und nicht bloss der Darmkanal ist es, der zur Ablagerung dieser Reservestoffe dient, sondern auch die Körperwand, in der nach der Leibeshöhle zu, tief innen also, dieselben Körnchen sich ablagern. In der Umgebung des Chylusdarmes, der in Folge dieser Veränderungen an Dicke zugenommen hat und die Körperwand zusammendrückt, gruppiren sich die Körnchen gewöhnlich derart, dass man bei flüchtiger Betrachtung fast den Eindruck einer dichten Querringelung erhält.

Es unterliegt hiernach keinem Zweifel, dass die Würmchen in der Leibeshöhle ihrer Wirthe eine reichliche Menge von Nahrung geniessen. Da die Mundöffnung nun aber nach wie vor unwegsam

ist, auch der Pharynx seine histologische Beschaffenheit nicht verändert hat, nach wie vor also einer deutlichen Muskulatur entbehrt, muss diese Nahrungsaufnahme auf endosmotischem Wege durch die äusseren Bedeckungen erfolgt sein.

Doch die Veränderungen, welche die Brut unseres Allantonema erleidet, beschränken sich nicht auf ein blosses Wachsthum und die Ansammlung von Reservestoffen. Sie betreffen ganz besonders auch die Geschlechtsorgane, deren Anlage inzwischen beträchtlich vergrössert ist und auch sonst Fortschritte gemacht hat (Fig. 9). Zur Zeit der Geburt eine einfache Zelle von unbedeutender Grösse, ist dieselbe allmählich in einen langgestreckten Schlauch von 0,09 mm ausgewachsen, der bei Betrachtung der hinteren Leibeshälfte alsbald in die Augen fällt und seine Zusammensetzung aus zahlreichen neben einander liegenden Zellen deutlich zur Schau trägt.

Sind die Parasiten auf der hier beschriebenen Entwicklungsstufe angelangt, dann unterliegen sie einer Häutung. Die alte Cuticula löst sich mit ihren Anhängen von der Leibeswand los und wird durch eine neue ersetzt, die, den jetzt veränderten Volumverhältnissen entsprechend, durch derbere Beschaffenheit und grössere Resistenz von der früheren verschieden ist. Zunächst aber wird die alte Chitinhaut nicht abgestreift; sie bleibt vielmehr (Fig. 9) bei all den tausend Würmchen, die rasch beweglich in der Leibeshöhle ihres Wirthes sich tummeln, ohne dessen Befinden merklich zu beeinflussen, futteralartig im Umkreise des Körpers bestehen, ganz wie das unter ähnlichen Verhältnissen bei den Jugendformen anderer Nematoden (z. B. der sog. Filaria sanguinis im Blute des Menschen, bekanntlich der Brut der Filaria Bankrofti Cobb.) der Fall ist.

Sie erscheint in diesem Zustande als eine glashelle, äusserst dünne Hülle, deren Enden über das Würmchen nach aussen hervorragen. Das etwas aufgetriebene Kopfende zeigt drei äusserst kleine Cuticularverdickungen, die sich früher der Untersuchung entzogen. Ebenso sieht man an den Seitenflächen jetzt eine scharf gezeichnete Chitinleiste hinziehen.

Eine Gestaltveränderung ist mit der Häutung nur insofern verbunden, als der Kopftheil der Würmer, vielleicht in Folge der Dickenzunahme des Körpers, schlanker erscheint und das früher einfach conische Schwanzende nunmehr in eine deutlich abgesetzte stiftartige

Spitze (von 0,09 mm) ausläuft. Das Mundende ist abgestutzt und am Rande mit drei flachen Papillen versehen.

In dieser Form verharren die Larven, so lange sie in der Leibeshöhle verweilen. Ob Tage, ob Wochen, muss ich unentschieden lassen. Allzu kurz freilich dürfte der Aufenthalt nicht zu bemessen sein, denn ich habe die jungen Parasiten einige Male noch massenhaft in Käfern mit einem mehr oder minder stark verschrumpften Allantonema gefunden, unter Umständen also, die darauf hindeuten, dass das Mutterthier bereits vor einiger Zeit zu Grunde gegangen war.

Schliesslich jedoch kommen die Würmer nach aussen. Sie verlassen die Leibeshöhle ihrer Träger, gelangen aber nicht sogleich in's Freie, sondern zunächst erst in den Raum zwischen Flügeldecken und Rücken, wo man dieselben in erklecklicher Menge lebend und beweglich beständig antrifft, sobald die Käfer überhaupt unser Allantonema beherbergen.

Eine Zeit lang glaubte ich annehmen zu müssen, dass die Würmchen, um dorthin zu gelangen, die anliegenden Körperwände durchbohrten. Allerdings entbehren die Auswanderer aller specifischen Bohrwerkzeuge, aber ihr Kopfende ist ziemlich rigide und die Rückenhaut des Käfers im Gegensatze zu den übrigen Körperdecken dünn und von weicher Beschaffenheit. Dazu kommt, dass auch die Flügeldecken in den sie durchziehenden Röhren (den Blut und Tracheen führenden sog. Nerven) sehr allgemein eine grössere Anzahl Würmer enthalten, ausgebildete Larven so gut, wie jüngere Formen, die möglicher Weise gleichfalls durch die an Dicke und Festigkeit weit zurückstehende untere Wand der Flügeldecken hindurchbrechen könnten.

Dass die jungen Würmer auch sonst in den Bluträumen des Körpers weit verbreitet sind, indem sie nicht bloss im Abdomen und Thorax, sondern auch im Kopfe vorkommen und gelegentlich sogar, wenngleich seltener als in den Flügeldecken, in den Beinen gefunden werden, schien jener Vermuthung eben so wenig direct zu widersprechen, wie der Umstand, dass die Würmchen in den Blutröhren der Flügeldecken vielfach abgestorben sind. Trotzdem aber erwies sich die frühere Annahme als ein Irrthum. Die Auswanderung der Würmer geschieht nicht direct in den subelytralen Spaltraum, son-

dern zunächst in den Mastdarm, aus dem sie dann später durch den After hindurch an den oben erwähnten Aufenthaltsort gelangen.

Man kann kaum einen Käfer mit Allantonema untersuchen, ohne im Lumen des Enddarmes eine grössere oder geringere Menge erwachsener Larven anzutreffen, und sieht gelegentlich sogar, wie diese aus der Afteröffnung hervorkriechen. Und nicht bloss im Innern des Mastdarmes sind die Würmchen vorhanden, sie bewegen sich auch in Menge zwischen den Windungen der Malpighi'schen Gefässe, die denselben umspinnen, und unterhalb des von diesen gebildeten membranösen Ueberzuges. Gelang es auch nicht, die Würmer beim Einbohren in die Darmwand selbst zu überraschen, so konnte doch die Art und der Ort der Auswanderung unter solchen Umständen keinen Augenblick länger zweifelhaft bleiben.

Einige Male wurden neben lebenden Larven auch einzelne abgestorbene Würmchen mit zerfallenem Darme und verschrumpftem Körper, eingehüllt in eine tracheenlose zarte Bindegewebshülle, die der Darmwand anhing, bei unseren Käfern aufgefunden. Es waren verunglückte Larven, wie daraus hervorging, dass sie meist noch die (jetzt freilich vergilbten) Ueberreste der früheren Embryonalhaut deutlich erkennen liessen.

Wie lange die Larven unter den fest anliegenden Flügeldecken verweilen, ist schwer zu sagen. Man findet dieselben bei inficirten Käfern hier jederzeit und meist in grösserer Menge. Wo sie fehlen, da sucht man auch vergebens nach Allantonemen — ein Umstand, der freilich noch nicht zu dem Schlusse berechtigt, dass die Anwesenheit solcher Larven nun auch in allen Fällen die Coexistenz der Mutterthiere beweise. In meinen Zuchtgefässen, in denen inficirte und parasitenfreie Rüsselkäfer in Menge neben einander lebten, habe ich öfters constatiren können, dass die wandernden Larven, wie sie alle nur irgend erreichbaren Schlupfwinkel aufsuchten, so auch gelegentlich von aussen her unter die Flügeldecken gelangten. Wo diese Zufuhr freilich die einzige bleibt, da ist auch die Zahl der Larven nur geringe.

Dieses Vorkommen unter den Flügeldecken war es auch, das zuerst die Aufmerksamkeit auf unsere Parasiten hinlenkte. Schon vor mehreren Jahren wurden sie hier von Herrn Fabrikbesitzer Dietrich aufgefunden, dem ich mit einem Hinweis auf diesen sonderbaren Parasitismus auch mein erstes Untersuchungsmaterial zu verdanken habe.

Zunächst freilich waren es nur diese jungen Würmchen, um die es sich handelte. Ihr Herkommen liess sich erst später feststellen, nachdem ich, zum Theil wiederum durch die Güte des Herrn Dietrich, in den Besitz einer grösseren Menge lebender Käfer gekommen war.

Aber nicht bloss, dass sich die Würmchen als Abkömmlinge des oben beschriebenen Allantonema erwiesen, es gelang auch, die weiteren Schicksale derselben zu verfolgen.

Kaum verweilten die inficirten Käfer mit ihren Futterstoffen, den Tannenreisern, die sie entrinden, einige Tage in den Zuchtgläsern, da bedeckten sich die Wände der letzteren mit kleinen Nematoden, die zu Tausenden neben einander überall dort sich ansammelten, wo die Niederschläge aus der feuchten Luft ihren Bewegungen einen freieren Spielraum gestatteten. Es waren unsere jungen Auswanderer; die einen noch ganz in dem oben beschriebenen Zustande, andere ohne die frühere Embryonalhülle, gewachsen und weiter entwickelt. Ein grosser Theil der letzteren hatte bereits die Larvencharaktere abgelegt: aus den früher geschlechtlich indifferenten Parasiten waren frei lebende Geschlechtsthiere geworden, die, weit davon entfernt, ihrem Mutterthiere zu gleichen, Form und Bau der genuinen Nematoden zeigten und in unverkennbarer Weise ihre Zugehörigkeit zu der Rhabditidengruppe zur Schau trugen. Und nicht etwa bloss entwickelte Männchen werden gefunden, sondern auch Weibchen mit legereifen Eiern, Thiere also, die unmöglich wieder zu der Allantonemaform zurückzukehren im Stande waren. Da trotzdem die Zugehörigkeit zu der letzteren durch alle Zwischenformen hindurch auf das Bestimmteste sich verfolgen liess, war der Beweis geliefert, dass Allantonema gleich den schon oben zum Vergleiche angezogenen Arten des Gen. Rhabdonema und Angiostoma[1]) einen heterogonischen Generationswechsel durchläuft. Die Aehnlichkeit wird noch dadurch erhöht, dass der Entwicklungscyclus aller dieser Formen sich aus einer parasitirenden und einer frei lebenden Generation zusammensetzt. Allerdings geht die Verschiedenheit

1) Ueber die Heterogonie dieser Formen vergl. man ausser den schon oben S. 575 angezogenen Abhandlungen besonders noch Leuckart, Parasiten des Menschen. 1. Aufl. Bd. II. S. 140 ff.

dieser zwei Generationen bei Allantonema viel weiter, als es sonst der Fall ist, doch das allein kann keinen tiefer greifenden Unterschied bedingen. Es beweist nur so viel, dass Allantonema den Verhältnissen des Schmarotzerlebens in einem höheren Grade angepasst ist, als Rhabdonema und Angiostoma, die beide noch als Parasiten den genuinen Nematodentypus bewahrt haben. Andererseits aber spricht der Umstand, dass alle drei Formen in der parasitischen Generation protandrische Hermaphroditen sind, wie das schon oben hervorgehoben werden konnte, in gleicher Weise für die nahen Beziehungen, die zwischen ihnen obwalten, wie die Beschaffenheit der frei lebenden Geschlechtsthiere, die sämmtlich der Rhabditidengruppe zugehören.

Was die Rhabditisgeneration unseres Allantonema speciell betrifft, so schliesst sich diese im Grossen und Ganzen, wie schon bemerkt, an die Larvenform an, aus der sie hervorgegangen ist. Dass es zwischen beiden nicht an Unterschieden fehlt, auch dann nicht, wenn wir von der Entwicklung der Geschlechtsorgane absehen, ist selbstverständlich; repräsentiren die reifen Würmer doch eine Thierform, welche die Larven nicht bloss an Körpergrösse übertrifft, sondern davon auch mehrfach durch ihre Lebensweise abweicht.

Schon in der äusseren Erscheinung machen diese Unterschiede sich geltend. Wohl besitzen unsere Thiere nach wie vor den schlanken Körperbau der Larven, aber die Durchmesser sind nahezu um das Doppelte vergrössert, und die Körperenden in ihrer Gestaltung verändert. Es sind besonders die weiblichen Thiere (Fig. 10), die an Grösse zugenommen haben, da ihre Länge 1 mm und darüber beträgt, während die Männchen (Fig. 11) nur bis 0,85 mm messen. Dementsprechend ist auch der Querdurchmesser bei den ersteren auf 0,05—0,054 mm, bei den anderen auf höchstens 0,042 mm gestiegen. Diese Dicke besitzen die Würmer aber nur in dem mittleren Körperabschnitte, soweit dieser von den Genitalien durchzogen ist, während die Endstücke, vornehmlich das vordere, um ein Merkliches verjüngt sind. Unter solchen Umständen erscheint denn auch das Kopfende nicht mehr abgerundet wie früher, sondern eher zugespitzt, und das um so mehr, als der Mund jetzt deutlich offen ist, und die im Umkreise befindlichen Papillen fast lippenartig vorspringen. Die Oeffnung führt zunächst in eine röhrenförmige kurze und enge Mundhöhle (von 0,028 mm Länge), die eine dreikantige Beschaffenheit hat

und von einer derben Chitinhaut ausgekleidet ist. An diese schliesst sich sodann der Pharyngealapparat, der an Stelle der früher so einfachen Bildung jetzt eine Organisation zeigt, die in gleicher Weise wie der umgeformte Mund, den gesteigerten Ansprüchen des freien Lebens vollauf genügen dürfte. Wie gewöhnlich bei den Rhabditiden besteht derselbe (Fig. 10 u. 11) aus zwei auf einander folgenden Abschnitten, die beide eine ziemlich gestreckte Cylinderform besitzen und beide nach hinten zu flaschenförmig anschwellen. Die vordere dieser Anschwellungen ist stärker, als die hintere, wie denn auch sonst der vordere Abschnitt, für die Nahrungsaufnahme wohl der wichtigere, durch seine kräftige Bildung auffällt. Der hintere steht nicht bloss an Dicke zurück, er besitzt auch nur wenig rigide Wände, so dass er unter dem Zuge der daran sich ansetzenden Rückziehmuskeln öfters S-förmig sich zusammenkrümmt. Zähne oder Klappen, welche sonst bei den Rhabditiden so häufig im hintern Bulbus gefunden werden, fehlen, wie denn das Lumen des Pharynx überhaupt in ganzer Ausdehnung enge und röhrenförmig ist, und in den Anschwellungen nur wenig sich erweitert. In dem vorderen Abschnitte, der etwa 0,1 mm misst, ist dieses Lumen übrigens schärfer gezeichnet, als hinten, und bis auf das Endstück, in dem es fast völlig verschwindet, weil die gegenüberliegenden Cuticularflächen sich (im Ruhezustande) berühren, deutlich dreikantig. Mit der stärkeren Entwicklung der cuticularen Auskleidung harmonirt auch das Aussehen der Muskelwand, deren Radiärfasern auf das Schönste hervortreten, weit mehr, als an dem 0,08 mm langen hinteren Abschnitte (Fig. 10 u. 11).

Der dem Pharyngealapparate folgende Darm (Fig. 10) hat ganz das Aussehen, wie bei den beständig freilebenden Rhabditiden. Die früher so massenhaft in seinen Wandungen abgelagerten Reservestoffe sind verbraucht, so dass die Zellen trotz des noch immer körnigen Inhalts deutlich hervortreten, und das Lumen als ein heller Canal mit geschlängeltem Verlaufe durch die ganze Länge hindurch sich verfolgen lässt. Die Schlängelungen sind durch die alternirend von den Seiten vorspringenden Zellen bedingt, die durchschnittlich etwa 0,021 mm messen und jederseits zu 30—36 Stück an einander gereiht sind. Aus der Leibeswand sind die körnigen Einlagerungen vollständig geschwunden. Das frühere Aussehen hat einer fast

glashellen Beschaffenheit Platz gemacht, so dass jetzt auch der auf der Höhe des Pharyngealendes gelegene Porus excretorius nicht länger mehr der Beobachtung sich entziehen kann. Die äusserlich den Körper umgebende Cuticula ist derb und zeigt eine feine Ringelung.

Wie die Bildung des Darmes, so wiederholt auch die Anordnung und der Bau des Geschlechtsapparates die gewöhnlichen Verhältnisse der Rhabditiden. Die männlichen Organe, um mit diesen zu beginnen, bestehen, wie gewöhnlich (Fig. 11), aus einem langgestreckten Hoden, dessen Vorderende trotz der nach hinten umgeschlagenen Spitze an der Bauchfläche bis in die Nähe des Pharynx emporragt, und einem geraden, ziemlich weiten Ductus ejaculatorius, der mit dem unteren Ende in den engen und kurzen Mastdarm einmündet und nicht selten samenblasenartig mit Sperma gefüllt ist. Die reifen Samenelemente erscheinen als gekernte runde Körperchen von 0,0008 mm, gleich den Spermazellen des parasitischen Allantonema, aber grösser, als diese. Wie bei den übrigen Nematoden, entstehen dieselben durch Viertheilung der Samenmutterzellen, die (Fig. 11) in dem mittleren Abschnitte der Hodenröhre in einfacher Reihe säulenartig über einander gruppirt sind und in dieser Anordnung so frappant den noch dotterlosen jungen Eizellen gleichen, dass die bekanntlich zuerst von Reichert[1]) betonte Homologie dieser beiderlei Zeugungsstoffe sehr augenfällig hervortritt. Die Spicula sind zwei bogenförmig gekrümmte dünne Stäbe von 0,02 mm, die mit ihrem convexen Rande einem äusserst kleinen accessorischen Stücke (0,008 mm) aufliegen. Eine Bursa fehlt, doch finden sich vor der Geschlechtsöffnung zwei Paare kleiner Papillen. Sonst erinnert das männliche Schwanzende mehrfach an die bei den Larven vorkommenden Verhältnisse. Es besitzt, wie bei diesen, die Form eines kurzen und plumpen Kegels (von 0,045 mm Länge), der nach der Bauchfläche etwas eingekrümmt ist und auf der Spitze, wie das auch früher der Fall war, eine schlanke Papille trägt.

Ganz anders verhält es sich mit dem Schwanzende der weiblichen Thiere (Fig. 10), das der Endpapille entbehrt und in Gestalt eines schlanken Kegels von 0,063 mm über den After nach aussen hervor-

1) Archiv f. Anatomie u. Physiologie. 1847. S. 115.

ragt, das Endstück des männlichen Körpers also fast um die Hälfte an Länge übertrifft.

Die Vulva liegt in unbedeutender Entfernung hinter der Körpermitte auf einer kleinen warzenartig vorspringenden Hervorragung. Sie communicirt durch Hilfe eines senkrecht stehenden engen Ganges mit dem nach vorn und hinten sackartig sich ausweitenden Uterus, der mit einer ziemlich derben Cuticula ausgekleidet ist und nach der Begattung reichliche Massen von Samenkörperchen aufweist. Die beiden Säcke bilden je (Fig. 10) den unteren Abschnitt einer Geschlechtsröhre, einer vorderen und einer hinteren, die beide etwa die Hälfte der Leibeshöhle durchziehen, am äussersten Ende aber gewöhnlich, gleich dem Hoden, eine kurze Strecke weit umgeschlagen sind. Der grösseste Theil der Geschlechtsröhren wird von dem Ovarium gebildet, dessen Producte durch einen kurzen und engen Leitungscanal dem Uterus zugeführt werden. Eine Rhachis fehlt; die Eikeime liegen, von dem äussersten Ende abgesehen, in einfacher Reihe hinter einander, mit der Entfernung vom Keimfach immer mehr an Grösse zunehmend. Trotz der ziemlich beträchtlichen Menge der Eikeime sind reife und ausgewachsene Eier stets nur in geringer Zahl vorhanden. In der Regel enthält ein jeder Eierstock deren ein einziges. Ebenso beschränkt ist die Zahl der Uteruseier, die nur selten über drei hinausgeht. Dieselben haben eine ziemlich schlanke Form, da der Längsdurchmesser nahezu das Doppelte (0,053—0,6 mm) der Dicke beträgt, und besitzen eine derbhäutige Schale, die darauf hinweist, dass die Embryonalentwicklung ausserhalb des mütterlichen Körpers geschieht. In der That verweilen die Eier im Uterus nur bis gegen das Ende der Furchungsperiode.

Eine Vergleichung dieser Geschlechtsthiere mit den früher beschriebenen Larven belehrt uns über die Veränderungen, die unsere Würmer während der Metamorphose erlitten haben. Es ist auch nicht schwer, dieselben direct zu verfolgen, wenn man die Larven isolirt aufzieht. Freilich gelingt der Versuch nicht in allen Fällen, da die Würmer sowohl im Wasser, wie in feuchter Erde leicht zu Grunde gehen. Die besten Resultate erhielt ich in dicht schliessenden Gefässen, deren Boden mit einer Schicht befeuchteten Sandes bedeckt war.

So lange die Würmer ihre Larvenhaut tragen, bedürfen die-

selben keiner Nahrung, obwohl sie an Grösse und Entwicklung zunehmen. Beides geschieht auf Kosten der im Innern angesammelten Reservestoffe, die immer vollständiger schwinden, je länger die Thiere im Freien leben, und je näher die Zeit der Häutung heranrückt. Des Sommers erfolgt letztere meist 5—6 Tage nach der Auswanderung, bei küh em Wetter später, vielleicht nach Ablauf einer Woche, wenn die Würmer etwa 0,7—0,8 mm messen, und durch die Bildung der Geschlechtsorgane und des Darmapparates in gleicher Weise zur Fortpflanzung, wie zu einer selbständigen Ernährung befähigt sind. Schon einige Zeit vorher, nach kaum viertägigem freien Leben, sieht man diesen Zustand sich vorbereiten. Die in die Leibeswand eingelagerten Körner sind fast vollständig verbraucht. Da gleichzeitig auch die Darmzellen einen Theil ihres Inhalts verloren haben, erscheinen die Würmchen jetzt (bei einer Grösse von 0,6 mm) weit heller und durchsichtiger, als das früher der Fall war. Die Genitalanlage ist gewachsen, einstweilen aber noch von einfacher Form und bei allen Individuen gleich. Trotzdem aber beginnt bereits die geschlechtliche Differenzirung. Man erkennt das am frühesten daran, dass das Schwanzende bei manchen Würmern die frühere Kegelform verliert und nach dem Rücken zu sich auftreibt. Die Thiere, welche diese Veränderung zeigen, sind die späteren Männchen. Sie beruht theils auf der Wucherung der dem Enddarme anliegenden Zellen, theils auch darauf, dass die Leibeswand dicht hinter dem After sich verdickt, auf Vorgängen, durch welche die Bildung sowohl des Spicularapparates, wie auch namentlich[1]) des Ductus ejaculatorius eingeleitet wird. In ähnlicher Weise entsteht bei den weiblichen Würmern die Vulva. Auch hier ist es zunächst eine Verdickung der Leibeswand, die sich bildet, nur dass diese nicht an der Basis des Schwanzendes gefunden wird, sondern weiter vorn, in der Mitte der Genitalanlage, die dadurch in zwei von jetzt an gleich sich entwickelnde Hälften getheilt wird.

1) Bei der männlichen Rhabditisform von Rhabdonema nigrovenosum habe ich mich inzwischen direct davon überzeugt, dass die Bildung des Ductus ejaculatorius nicht ausschliesslich von der Genitalanlage ausgeht, sondern zum Theil auch auf einer selbständigen Zellenwucherung beruht, die von dem Mastdarme aus emporwächst und erst später mit dem Geschlechtsschlauche in Verbindung tritt.

Dass die Begattungswerkzeuge, welche diesen Verdickungen ihren Ursprung verdanken, mit der Larvenhaut in keinerlei Verbindung stehen, braucht kaum besonders hervorgehoben zu werden. Man sieht, sobald diese sich gelöst hat, deutlich, wie sie futteralartig über die mit den ersteren gleichzeitig entstandene definitive Cuticula hinzieht, und erkennt darunter die für Mann und Weib fortan so charakteristische Bildung des Schwanzendes.

Während der Umformung des Geschlechtsapparates geht nun aber auch mit Mund und Pharynx, die gleichfalls bis dahin der functionellen Verwendung entbehrten, eine Reihe von Veränderungen vor sich. Letzterer gliedert sich unter Verlust der früheren Cylinderform durch eine Einschnürung in zwei auf einander folgende Abschnitte, die, histologisch wie morphologisch noch weiter sich differenzirend, schliesslich zu der gewöhnlichen Pharyngealbildung der Rhabditiden hinführen. Ebenso entsteht an Stelle des bis dahin geschlossenen Mundes der spätere orale Hohlraum, und zwar dadurch, dass sich im Umkreis des anhängenden Chitinfadens eine starre Cuticularmembran ablagert, die auch nach Abstreifen der Cuticula nicht zusammenfällt, und somit denn — im Zusammenhang mit dem inzwischen vollständig entwickelten Pharynx — dem Wurme fortan die Möglichkeit einer selbständigen Nahrungszufuhr sichert.

Die nächste Folge dieser Zufuhr ist die Reifung der Geschlechtsproducte, die bis dahin bei beiden Geschlechtern durch eine ziemlich indifferente Zellenmasse vertreten waren. Dass die männliche Reife rascher eintritt, als die weibliche, die Männchen demnach schon begattungsfähig sind und auch den Begattungsact vornehmen, wenn die Weibchen noch dotterlose Eier besitzen, kann uns um so weniger überraschen, als bekanntlich Gleiches bei vielen anderen Würmern vorkommt.

In den zur Reinzüchtung verwendeten Gefässen, die den Entwicklungsbedingungen offenbar weniger genügten, als die grösseren Zuchtgläser, die mit den Käfern zugleich Abfälle der verschiedensten Art enthielten, verharren die Würmer nicht selten eine längere Zeit im Innern der gelösten Larvenhaut. Es kommt auch vor, dass sie überhaupt nicht ausschlüpfen und unter der Umhüllung absterben. Am häufigsten beobachtete ich diese Erscheinung bei männlichen Würmern, meist solchen, die ihre Spicula nur unvollständig zur Aus-

bildung gebracht hatten. Die Bewegungen, die für gewöhnlich durch die Larvenhaut in keinerlei Weise behindert sind, ermatten, die Darmzellen verblassen und zerfallen, der Körper verschrumpft, die weit abstehende Hülle aber bleibt unverändert. Die anhängenden Chitinfäden, welche Mund und After und Porus excretorius früher durchzogen, die seitlich daran hinlaufenden Längsleisten und die feine Ringelung lassen über die wahre Natur derselben nicht den geringsten Zweifel [1]).

Hier und da stösst man auch wohl auf Würmer, die zwei lose Cuticularhüllen an Stelle der einen haben, beide nach Beschaffenheit und anatomischer Bildung völlig übereinstimmend, so dass sie beide vor Eintritt der geschlechtlichen Reife gebildet sein müssen. Ob eine solche doppelte Häutung beständig bei unsern Würmern stattfindet, oder nur unter gewissen Bedingungen, will ich nicht entscheiden, doch möchte ich mich angesichts der Thatsache, dass die Geschlechtsreife bei Sphaerularia, wie schon Schneider bemerkt hat, constant durch zwei rasch auf einander folgende Häutungen eingeleitet wird, auch Atractonema, wie wir später sehen werden, Aehnliches zeigt, fast für Ersteres mich aussprechen. Bei andern Nematoden ist eine solche doppelte Häutung freilich bis jetzt noch nicht beobachtet worden.

Im Gegensatze zu dem Verhalten der parasitischen Allantonemen werden die Eier der frei lebenden Rhabditisgeneration, wie schon bemerkt, nach aussen abgelegt. Obwohl so ziemlich von derselben Grösse, wie die Eier der ersteren, sind sie von diesen doch dadurch unterschieden, dass sie eine festere Schale besitzen, die einen besseren Schutz gewährt. In der Regel geschieht die Eierlage in einem ziemlich vorgerückten Stadium der Furchung, so dass die fernere Entwicklung nur einen kurzen Zeitraum beansprucht. Das Product derselben ist ein wiederum rhabditisartiges kleines Würmchen (Fig. 12), das die Eihülle durchbricht und dann gleichfalls zunächst ein freies Leben führt. Gestalt und Grösse — die Länge beträgt 0,3 mm, die Dicke etwa 0,012 mm — sind so ziemlich die-

1) Ich erwähne das namentlich im Hinblick auf Perroncito's noch neuerlich wiederholte und mehrfach auch von anderer Seite als gültig angenommene Behauptung, dass die Nematoden während ihrer Entwicklung keine Häutung erlitten, sondern nach Trichinenart sich einkapselten.

selben, wie bei den neugebornen Jungen der parasitären Form. Bei näherer Vergleichung ergeben sich allerdings einzelne Unterschiede, allein dieselben erklären sich grössten Theils, wie die Verschiedenheiten der Eibildung, aus den bei beiden Thieren so abweichenden Lebensverhältnissen.

Dahin rechne ich vornehmlich den Umstand, dass die Mundöffnung der neugebornen Würmer nicht geschlossen, sondern offen ist, und mittelst einer kurzen (0,012 mm) Röhre, die eine ziemlich feste Cuticularbekleidung trägt, in den 0,07 mm langen Oesophagus führt. Unsere Würmchen haben also von Anfang an die Fähigkeit eines selbständigen Nahrungserwerbes. So reichlich freilich, wie im mütterlichen Körper, ist die Nahrungszufuhr nicht, wie daraus hervorgeht, dass das Körperparenchym beständig hell und durchsichtig bleibt, und die Darmzellen sich gewöhnlich nur mässig mit Reservestoffen füllen.

Diese ungünstigen Ernährungsverhältnisse bedingen es auch, dass unsere Würmchen schlanker bleiben, als die Embryonen von Allantonema, und namentlich auch die Pfriemenform ihres (0,015 mm langen) Schwanzendes beibehalten, die bei den letzteren rasch durch Dickenwachsthum verloren geht. Darm und Genitalanlage zeigen keinerlei bemerkenswerthe Unterschiede. Höchstens, dass die letztere meist nach vorn, gegen die Körpermitte zu, etwas verschoben ist.

Was wir über die Lebensgeschichte der oben erwähnten heterogonen Nematoden, und namentlich die des Rhabdonema nigrovenosum kennen[1]), legt die Vermuthung nahe, dass die eben beschriebenen Würmchen, die Abkömmlinge der frei lebenden Rhabditisgeneration, den Jugendzustand der späteren Parasiten darstellen, also früher oder später in den Rüsselkäfer einwandern und hier dann die Allantonemaform annehmen.

Zunächst freilich ist das Verhalten unserer Thiere dieser Annahme nur wenig günstig. Nicht bloss, dass sie, gleich ihren Eltern, im Freien leben; sie beginnen auch alsbald zu fressen und ohne auffallende Gestaltveränderung zu wachsen, als wenn sie zu einer zweiten Rhabditisgeneration sich entwickeln sollten. Schon nach

1) Man vergl. hierzu die (S. 580 und 600) angezogenen Schriften des Verf.'s, sowie die Abhandlung von v. Linstow.

wenigen Tagen erscheinen sie als Würmchen von 0,65 mm mit schlankem (0,03 mm breitem) Leibe, der sich nach dem Kopfe zu etwas verjüngt und hinten in einen pfriemenförmigen Schwanz von 0,05 mm Länge ausläuft (Fig. 13). Die Bildung des Darmapparates und besonders auch des Pharynx ist im Wesentlichen dieselbe, wie bei den geschlechtsreifen Würmern, von denen sie abstammen. Auch durch die äussere Körperbildung erinnern sie mehr an diese, als an deren Jugendformen, obwohl sie den letzteren nach ihrem Entwicklungszustande und der indifferenten Beschaffenheit ihrer Geschlechtsanlage, die inzwischen zu einem Schlauch von etwa 0,07 mm ausgewachsen ist, weit näher stehen. Wir greifen wohl nicht fehl, wenn wir bei der Beurtheilung dieser Verhältnisse die Lebensgeschichte und namentlich die Ernährungsweise der betreffenden Thiere als massgebend in Anspruch nehmen.

Was aus diesen Würmern schliesslich wird, liess sich nicht mit Sicherheit feststellen. In den Isolirschälchen gingen dieselben schon nach wenigen Tagen zu Grunde, und auch in den grösseren Zuchtgefässen schienen sie ihre Eltern nur eine kurze Zeit zu überleben. Allerdings stiess ich in letzteren einige Male auf Würmer im Zustande der Häutung und Geschlechtsentwicklung, welche nach der Bildung ihrer Schwanzspitze dieser zweiten Rhabditisgeneration zugehören könnten, bei der Schwierigkeit der Diagnose ist aber die Möglichkeit eines Irrthums um so weniger ausgeschlossen, als sich in meinen Zuchtgläsern neben den zu Allantonema gehörenden Rhabditiden mit der Zeit noch andere verwandte Formen einstellten[1]), durch welche die Controle in hohem Grade erschwert wurde.

1) Als besonders charakteristisch erwähne ich unter diesen eine Rhabditis mit weiter und kurzer Mundhöhle, zweigetheiltem langen Pharynx ohne Klappen und einer pfriemenförmigen langen Schwanzspitze. Eine Bursa fehlt. Durch die der ganzen Länge nach auf dem Körper hinziehenden stark markirten Längsstreifen erinnert die Form an Rhabditis plicata Schn. Weiter hervorzuheben ist ein schöner Diplogaster, im geschlechtsreifen Zustand mit Hornspitzen am Mundrande und drei kräftigen, kurzen Hornleisten in der kugligen Endanschwellung des ersten Pharyngealabschnittes. Der Schwanz des Weibchens ist lang und pfriemenförmig, wie der der Larven, während er bei dem Männchen kurz und conisch ist, wie bei der männlichen Rhabditisform des Allantonema, und auch, wie bei dieser, am Ende mit einem kurzen Endstift versehen. Im Larvenzustande sind die Hornwaffen sowohl des Mundes, wie des Pharynx unvollständig entwickelt.

Ich will übrigens nicht verschweigen, dass ich eine Zeit lang der Ansicht huldigte, dass auch diese zweite Rhabditisgeneration im Freien zur Geschlechtsentwicklung komme und sich fortpflanze. Ich habe mich auch auf der Naturforscherversammlung zu Magdeburg, als ich zum ersten Male die merkwürdige Lebensgeschichte unseres Allantonema in weiteren Kreisen bekannt machte, in diesem Sinne ausgesprochen [1]). Ausser der oben erwähnten Beobachtung war dabei vornehmlich der Umstand massgebend, dass die Entwicklung der Würmer, soweit dieselbe im Freien ablief, trotz aller Grössenzunahme nicht die geringste Annäherung an die so abweichenden Form- und Organisationsverhältnisse des parasitischen Allantonema erkennen liess. Die Umwandlungen aber, welche der gestreckte lange und agile Leib unserer Rhabditiden mit seinem doch immerhin ziemlich complicirten Organenapparate erleiden muss, um zu einem puppenartig plumpen und bewegungslosen Körper zu werden, der überdies des Darmes entbehrt, sind so fundamentaler Art, dass es mir wahrscheinlich schien, dieselben müssten an eine frühere Entwicklungsstufe anknüpfen, als diejenige ist, zu der wir unsere Würmer im Freien sich ausbilden sehen, müssten vielleicht schon eingeleitet werden, wenn diese eben erst ihre Eihülle verlassen haben.

Dazu kam der Umstand, dass wir in der gleichfalls heterogonen Rhabditis (Lepdotera) appendiculata durch die Beobachtungen von Claus [2]), die ich bestätigen kann, einen Wurm kennen gelernt haben,

1) Vergl. das Tageblatt der Magdeburger Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte, 1884. S. 320.

2) Beobachtungen über die Organisation und Fortpflanzung der Leptodera appendiculata. Marburg 1868. (Die neuerlich in der Deutsch. medic. Wochenschrift, 1886, Nr. 11 ff., von Lichtenstern gemachte Angabe, der zufolge es demselben gelungen sei, aus den rhabditisförmigen Jugendformen von Dochmius duodenalis eine geschlechtsreife Rhabditisform zu erziehen, die sich durch eine unbegrenzte Zahl von Generationen hindurch fortpflanze, ziehe ich hier nur an, um meinem Zweifel an der Richtigkeit derselben einen Ausdruck zu geben. Man muss die Schwierigkeiten sowohl der Artdiagnose, wie der Controle bei derartigen Untersuchungen aus eigener Erfahrung kennen, um zu wissen, wie leicht hier ein Irrthum durch Einschleppen fremder Keime stattfinden kann. Die von mir über die Lebensgeschichte und die Entwicklung des Dochmius trigonocephalus einst angestellten Experimentaluntersuchungen, die den Ausgangspunkt alles dessen bilden, was wir in

bei welchem der parasitischen Form in der That eine grössere Menge freier Geschlechtsgenerationen folgt.

Die Gründe aber, die damals meine Ansichten bestimmten, scheinen mir heute nicht mehr in gleicher Weise zwingend. Was zunächst die Lebensgeschichte der Rhabditis appendiculata betrifft, so verliert diese für die vorliegende Frage dadurch an Gewicht, dass der Parasitismus hier ausschliesslich auf die Larvenzeit beschränkt ist, indem die ursprünglich parasitische Form im geschlechtsreifen Zustande frei lebt, wie die Zwischengenerationen. Rhabditis appendiculata macht hierdurch den Uebergang zu den beständig frei lebenden Rhabditiden, an die sie auch dadurch sich anschliesst, dass ihre Schmarotzerlarven zu getrenntgeschlechtlichen Würmern werden und nicht zu protandrischen Weibchen sich entwickeln, wie die von Rhabdonema und Angiostoma. Da nun aber unser Allantonema nicht bloss, wie schon oben beschrieben, durch das Vorkommen eines durchaus analogen Hermaphroditismus mit den zwei letztgenannten Arten übereinstimmt, sondern weiter auch dadurch, dass das Schmarotzerleben den Eintritt der Geschlechtsreife überdauert, so dürfte deren Lebensgeschichte auch wohl weiterhin für unser Thier massgebend sein, und das in einem höheren Grade, als die der Rhabditis appendiculata.

Und dieser Umstand berechtigt uns denn auch zu der Annahme, dass es die directen Nachkommen der frei lebenden Generation sind, welche in die parasitäre Form sich umbilden. Dass diese Thiere eine längere Zeit hindurch nach Larvenart ein freies Leben führen, und im Laufe desselben auch eine weitere Entwicklung erfahren, steht mit dieser Annahme keineswegs im Widerspruch. Mag man immerhin zugeben, dass der Zustand einer geringern Differenzirung, wie ihn etwa die eben erst ausgeschlüpften Würmchen zeigen, weitgreifende Umgestaltungen, gleichgiltig, ob diese als Rückbildungen oder Weiterbildungen sich kundthun, eher und leichter gestattet, als eine höhere Entwicklungsstufe, so darf man doch auch andrerseits nicht übersehen, dass unsere Larven noch keineswegs vollständig ausgebildet und mit festen Eigenschaften begabt sind, die

dieser Hinsicht von dem Dochmius duodenalis des Menschen (Anchylostomum) wissen, haben nichts ergeben, was auf eine Heterogonie hinwiese.)

eine Umgestaltung in der oben angedeuteten Weise unmöglich machten. Es gilt das besonders von der Genitalanlage, deren Entwicklungszustand einstweilen noch so indifferent ist, dass daraus ebenso gut der Genitalapparat der Allantonemaform, wie jener der frei lebenden Rhabditiden hervorgehen kann. Allerdings ist der Unterschied zwischen beiden nichts weniger als gering, im Ganzen aber doch, wenn wir die specifischen Eigenthümlichkeiten ausser Acht lassen, kaum grösser, als zwischen den männlichen und weiblichen Genitalien einer frei lebenden Rhabditis, die doch gleichfalls beide aus der den Larven gemeinsam zukommenden Anlage sich hervorbilden.

Wie die definitive Form des Geschlechtsapparates zu der indifferenten Anlage, so verhält sich auch die Allantonemabildung der Leibeswand zu dem Muskelschlauch der Rhabditis. Die Grenzen der Muskelzellen — so dürfen wir auf Grund der vorliegenden Organisationsverhältnisse annehmen — gehen bei dem jungen Parasiten alsbald nach der Einwanderung verloren, während die Körnerlage zunimmt, und die Kerne sich beträchtlich vermehren. Die fibrilläre Substanz wird in Folge der Formveränderung des Wurmes und der Massenzunahme seines Körpers über eine grössere Fläche verbreitet und zurückgebildet. Auf der Innenseite der Körperwand entsteht (von dem peritonealen Ueberzuge aus?) eine mächtige Wucherung von Zellen, welche die Leibeshöhle durchwachsen und den Darm verdrängen, später aber den Geschlechtsorganen, wenn diese zu ihrer vollen Entwicklung kommen, Platz machen, und schliesslich auf einen verhältnissmässig nur dünnen Belag der Leibeswand reducirt werden.

Die Veränderungen, die wir voranstehend gezeichnet, sind allerdings auffallend und tief, aber doch kaum grösser, als bei vielen andern Thieren mit vollständiger Metamorphose, wie etwa den Fliegen und Schmetterlingen. Durch die Annahme, dass der Eintritt in den parasitären Zustand, wie der Uebergang in das Puppenleben der Insekten, durch eine Häutung vermittelt werde, verliert auch die Formveränderung des Wurmes und der Schwund von Mund und After gar manches von dem Auffallenden, was diese Vorgänge sonst vielleicht besitzen.

Ich habe leider vergebens versucht, für diese Constructionen eine empirische Grundlage zu finden. Da die ausgebildeten Insekten immer nur Allantonemen mit Eiern und Embryonen enthielten, es

also klar war, dass die Einwanderung der Parasiten in die Käfer in einer früheren Entwicklungsperiode stattfinden müsse, auf einem Stadium, das auch aus anatomischen und biologischen Gründen den jungen Würmern zugänglicher sein dürfte, als das fertige Insekt, habe ich mich natürlich bemüht, meine Untersuchungen auch auf die Larven und Puppen unseres Hylobius auszudehnen. Lange Zeit hindurch vergebens, bis ich durch die freundliche Theilnahme der Herren Oberförster VON PRAUN und Professor NITSCHE, denen ich auch hiefür meinen Dank schulde, in den Besitz des gewünschten Materiales kam. Aus dem mir übersendeten Holze gelang es, eine Anzahl Larven und Puppen verschiedenen Alters zu sammeln, von denen in der That auch manche sich als inficirt erwiesen. Ganz junge Larven freilich liessen sich nicht beschaffen — ein Umstand, den ich um so mehr bedaure, als die sonstigen Befunde es mir wahrscheinlich machen, dass die Einwanderung und die Metamorphose der eingewanderten Würmchen in die erste Zeit des Larvenlebens fällt. Die von mir bei halbwüchsigen Larven aufgefundenen jüngsten Parasiten besassen sämmtlich schon die Allantonemaform (Fig. 14), hatten also die Häutung, durch welche die Rhabditis in letztere übergeführt wird, bereits bestanden. Dass die früheren Zustände in Folge der grösseren Schwierigkeit der Untersuchung (besonders der Puppen, deren Fettkörper in zahllose isolirte Zellen zerfallen ist) vollständig mir entgangen sein sollten, ist kaum anzunehmen, da es mir vielfach gelang, die Rhabditisform unserer Würmer auf verschiedener Entwicklungsstufe nicht bloss in nächster Umgebung der Larven, zwischen den Resten ihrer Minirarbeit und ihres Frasses, sondern auch in deren Mastdarm[1]) lebend aufzufinden. Die Leibeshöhle dagegen erwies sich überall frei von Rhabditiden; offenbar, dass diese nicht mehr vermocht hatten, die mit einer ziemlich derben Cuticula bekleideten Wandungen zu durchsetzen. Immerhin aber ist dieses Vorkommen insofern von einigem Interesse, als es vermuthlich den Weg anzeigt, den die Würmer bei ihrer Einwanderung einschlagen.

Was nun die im Innern der Larven von mir aufgefundenen

1) Ganz ähnliche — wenn nicht gar damit identische — Rhabditisformen sind mir auch in dem Enddarme der Larven von Hylesinus micans aufgestossen.

Würmer betrifft, so erschienen diese, wie gesagt, schon in den jüngsten Exemplaren unverkennbar als Allantonemen. Wenngleich beträchtlich kleiner (0,4 mm), als später, auch vielleicht etwas schlanker, besassen sie doch bereits die für unsere Parasiten so charakteristische bauchige Körperform (Fig. 14). Die Enden waren meist gleichmässig verjüngt, so dass vorn und hinten nicht unterschieden werden konnte, die eine Fläche, dieselbe, welche wir früher vermuthungsweise als Bauchfläche deuteten, erschien erst wenig eingekrümmt oder ganz eben. Bewegungen wurden an den Würmern nicht beobachtet; in der Mehrzahl der Fälle waren diese auch bereits in eine einstweilen freilich nur äusserst dünne und nahezu tracheenlose Bindegewebshaut eingeschlossen.

Obwohl an Länge somit nicht unbeträchtlich hinter den Rhabditisförmigen Jugendzuständen zurückstehend, repräsentirten unsere Würmer doch eine ungleich grössere Masse, da der Querdurchmesser um mindestens das Zehn- bis Zwölffache gegen früher gewachsen ist.

So kleine Allantonemen, wie die hier eben erwähnten, sind mir übrigens nur einige wenige Male, und immer nur in jüngeren Larven, die noch lange nicht ausgewachsen waren, aufgestossen. Der Mehrzahl nach besassen die aufgefundenen Parasiten eine schon beträchtlichere Grösse, wenngleich ihr Längsdurchmesser niemals, auch nicht in den ältesten Larven und den Puppen, viel über 1 mm (grösste Breite = 0,35 mm) hinausging. Der Grössezunahme entsprechend hatte auch die umhüllende Bindegewebsschicht eine stärkere Entwicklung und einen grösseren Tracheengehalt. So reich freilich, wie später in den Käfern, wird letzterer in den Larven niemals.

Wie durch ihre Körperform, so erinnern diese jungen Allantonemen auch sonst durch ihr Aussehen an die späteren Zustände. Sie erscheinen als undurchsichtige Körper von schmutzig weisser Färbung, mit verwaschenen dunklen Flecken bedeckt, wie wolkig. Bei durchfallendem Lichte erkennt man im Umkreis der dunklen Masse eine hellere Rindenschicht von ziemlich homogener Beschaffenheit (Fig. 14). Letztere repräsentirt die eigentlichen Körperwände, in der sich ausser den Kernen und der Zwischensubstanz jetzt auch noch deutliche Fibrillen unterscheiden lassen. Besondere Zellengrenzen sind nicht mehr nachweisbar. Im Gegensatze dazu besteht die dunkle Innenmasse des Körpers zum weitaus grössten Theile aus einem deutlich

zelligen Gewebe, dem schon erwähnten Zellenkörper (Fig. 4). Die Zellen besitzen eine Durchschnittsgrösse von etwa 0,028 mm, sind bei den jüngeren Exemplaren aber kleiner und so dicht gefügt, dass sie meist polyedrisch gegen einander sich abgrenzen. Der Kern (0,008 mm) ist bläschenförmig, hell und mit einem scharf gezeichneten Nucleolus versehen. Die sonst ziemlich klare Inhaltsmasse umschliesst eine bald grössere, bald auch kleinere Gruppe distincter Körnchen, deren Menge mit dem Alter der Würmer zunimmt und an den dunkel durchscheinenden peripherischen Körperstellen beträchtlicher ist, als in der Tiefe.

Der Darm ist schon in den jüngsten Würmern spurlos zu Grunde gegangen. Die Eingeweide bestehen, von dem Zellenkörper abgesehen, einzig und allein aus dem Genitalschlauche, der zunächst freilich von der späteren Bildung und Grösse noch weit entfernt ist, indem er einen in ganzer Länge ziemlich gleichmässig röhrigen Kanal darstellt, der in unregelmässiger Windung (Fig. 4) durch den Zellenkörper hinzieht und an dem einen Ende des Wurmes durch eine nur wenig ausgezeichnete Oeffnung nach aussen führt.

Wie später, so lassen sich übrigens schon jetzt an diesem Gebilde drei Abschnitte unterscheiden: zu oberst ein fadenförmiges blindes Endstück von ziemlich ansehnlicher Länge (0,7 mm lang, 0,01 mm breit), dasselbe Gebilde, welches in dem erwachsenen Wurme das Ovarium mitsammt dem Eileiter darstellt, sodann ein mehr oder minder kugliges Receptaculum seminis von höchstens 0,1 mm Durchmesser, und schliesslich ein 0,35 mm langes und gestrecktes Rohr, das allmählich sich verjüngend gegen das hintere Ende des Wurmes hinläuft und hier schliesslich ausmündet. Obwohl an Weite hinter dem Receptaculum zurückstehend, ist dieses Rohr doch nichts anderes, als der spätere Uterus — zunächst freilich nur im jungfräulichen Zustande. Die Bildung der Eier hat noch nicht begonnen. Unsere Würmer sind nicht Weibchen, wie später, sondern zunächst Männchen, wie das schon oben erwähnt ward. Dies beweist nicht bloss der aus Spermazellen bestehende Inhalt des Receptaculum, auch nicht bloss der Umstand, dass dieser mit der zunehmenden Grösse der Würmer immer massenhafter wird und letzteres immer stärker auftreibt, sondern bestimmter noch der Inhalt der Geschlechtsdrüse, der uns die Bildungsgeschichte der Samenele-

mente in übersichtlichem Zusammenhange vorführt. Der bei Weitem grösste Theil derselben ist mit gekernten hellen Zellen von etwa 0,001 mm gefüllt, die zu mehreren auf demselben Querschnitte neben einander liegen und auf den ersten Blick leicht für dotterlose Eikeime gehalten werden könnten. Die ferneren Schicksale derselben aber lassen über ihre wahre Natur keinen Zweifel. Statt in Eier sich zu verwandeln, behalten sie ihre ursprüngliche Beschaffenheit, bis sie in der Nähe des Receptaculum je in vier Ballen zerfallen, die dann die definitiven Samenkörperchen darstellen. Ein jedes derselben hat einen soliden, äusserst kleinen Kern von starkem Lichtbrechungsvermögen und einen hellen Protoplasmahof.

Würmer mit unvollständig entwickeltem Sperma habe ich nicht aufgefunden. Auch die kleinsten, die ich sah, enthielten in ihrem Receptaculum bereits ausgebildete Samenzellen, aber einstweilen nur in geringer Menge, so dass der Behälter noch eine längliche Form hatte und gegen den nachfolgenden Abschnitt wenig sich absetzte.

Eben so wenig, wie den Eintritt der männlichen Reife, habe ich auch den der weiblichen zur Beobachtung bringen können. Keines der von mir in den Jugendzuständen unseres Käfers, Puppen sowohl wie Larven, aufgefundenen Allantonemen enthielt Geschlechtsproducte, die sich mit Sicherheit als Eier beanspruchen liessen. Ich glaube deshalb auch annehmen zu müssen, dass die Eibildung erst im Imagozustande beginnt. Die Uebergangsperiode selbst aber muss eine nur kurze Dauer haben, denn schon bei Käfern, die ihr Puppenquartier noch nicht verlassen hatten, fand ich Allantonemen, allerdings von nur geringer Grösse (1,5 mm), mit einem Uterus, der neben Eiern verschiedener Entwicklung bereits einzelne freie Embryonen aufwies. Käfer mit eierlosen Parasiten, solchen also, die noch vor der weiblichen Reife standen, sind mir niemals vor Augen gekommen.

Bei dieser Gelegenheit will ich übrigens nicht unterlassen, einer Beobachtung zu gedenken, die, so isolirt sie steht, und so weit sie auch von dem eben Beschriebenen abweicht, doch immerhin geeignet sein dürfte, auf die Frage nach der Metamorphose unseres Parasiten einiges Licht zu werfen.

Dieselbe betraf einen Wurm, den ich zusammen mit einem ausgewachsenen Allantonema in der Leibeshöhle eines Käfers antraf. Zunächst war es nur die unbedeutende Grösse und die schlankere

Körperform, sowie das ungewöhnlich helle, fast pellucide Aussehen, was an dem Wurme auffiel. Freilich muss ich dabei bemerken, dass derselbe alsbald nach Uebertragung in Wasser, noch bevor er einer genaueren Untersuchung unterworfen werden konnte, platzte und den Genitalschlauch hervortreten liess. Der letztere erwies sich bis auf den eben erst sich hervorbildenden hornförmigen Aufsatz als völlig normal und enthielt auch trotz seiner geringen Grösse bereits eine Anzahl von Embryonen. Durch das Austreten des Genitalschlauches aber war mit unserem Wurme eine auffallende Formveränderung vor sich gegangen. Der ursprünglich gedrungene Körper hatte jetzt, wo er mit dem Uterus zugleich die formgebende Füllung verloren, eine unverkennbare Nematodenähnlichkeit angenommen. Er war zu einem spiralig aufgewundenen kurzen Cylinder (von 1,9 mm Länge) geworden, der in der Mitte einen Durchmesser von 0,4 mm hatte und nach den abgerundeten Enden zu dünner wurde. Was aber noch auffallender war, und die Nematodenähnlichkeit noch weiter erhöhete, war der Besitz eines 0,07 mm breiten Kanales, der in Form eines platten Bandes frei, wie sonst das Darmrohr, den Innenraum des Wurmes durchsetzte. Das Verhalten der Enden habe ich leider nicht feststellen können, es wollte mir auch nicht glücken, den Wurm mit dem Mikrotom zu behandeln und die Beschaffenheit des Zellenkörpers festzustellen, aber trotzdem glaube ich kaum zu irren, wenn ich den im Innern hinlaufenden Kanal als den früheren Darm in Anspruch nehme, der, statt zu Grunde zu gehen, in rudimentärer Bildung hier persistirte. Dass derselbe trotz seiner Grössenentwicklung in Wirklichkeit nur ein bedeutungsloses Ueberbleibsel war, ging mit Sicherheit schon aus der Beschaffenheit seiner Wand hervor, die an Stelle eines Epithelbelags nur eine zusammenhängende Körnerlage aufwies, eine Masse, die offenbar durch Degeneration und Zerfall der früheren Zellen ihren Ursprung genommen hatte.

Nach dem, was ich über die Jugendformen von Allantonema mitgetheilt habe, kann der hier beschriebene Wurm unmöglich als der Repräsentant eines normalen Entwicklungszustandes betrachtet werden. Er ist vielmehr als eine Missbildung anzusehen, deren Eigenthümlichkeiten am einfachsten durch die Annahme einer gehemmten Entwicklung zu erklären sein dürften. Unter solchen Umständen aber gewinnt die Anwesenheit des Darmrudimentes, die für

die Missbildung vermuthlich das Massgebende war, und auch wohl ihrerseits erst die unvollständige Ausbildung der Allantonemaform zur Folge gehabt hat, für die Frage nach den genetischen Beziehungen unseres Parasiten desshalb ein besonderes Interesse, weil sie auf eine gewisse Widerstandsfähigkeit des primitiven Darmes zurückschliessen lässt, auf eine Eigenschaft, die wir bei Rhabditiden eines weiteren Entwicklungszustandes vielleicht eher zu erwarten haben, als bei eben erst ausgeschlüpften Embryonen.

Die Analyse unserer Missbildung führt also gleichfalls zu dem Resultate, dass es die zuletzt beschriebenen rhabditisartigen Larven sind, welche unter dem Einfluss des parasitischen Lebens die Allantonemaform annehmen. Die Lücke, die ich wider Wunsch in meinen Beobachtungen lassen musste, wird auf diese Weise nahezu geschlossen, und unsere Kenntniss von der Lebensgeschichte eines der merkwürdigsten Parasiten zu einem fast vollständigen Gesammtbilde abgerundet.

Die hauptsächlichsten Züge dieses Bildes sind dieselben, welche auch die Lebensgeschichte von Rhabdonema und Angiostoma kennzeichnen. Alle diese Würmer sind protandrische Schmarotzer-Nematoden mit heterogoner Fortpflanzung. Andererseits aber unterscheidet sich unser Allantonema durch die Eigenthümlichkeiten seiner parasitären Form von den Verwandten in einer so auffallenden Weise, dass wir dasselbe wohl mit Recht als den Repräsentanten eines besonderen Genus betrachten dürfen. Einstweilen ist unser Allantonema mirabile allerdings der einzige Vertreter desselben. Ob dem aber immer so sein wird, steht dahin. Schon jetzt möchte ich auf eine Form aufmerksam machen, die nach Allem, was darüber bekannt ist — es ist freilich nur Weniges und Unvollständiges — unserer Art sehr nahe zu stehen scheint. Es ist der »interessante Schmarotzer«, den v. Siebold[1]) in der Bauchhöhle von Aphodius fimetarius auffand und »vor der Hand, seinem äusseren Habitus nach«, in Anschluss an das Genus Filaria als F. rigida benannte, »da derselbe nie eine Bewegung äusserte, sondern stets starr und steif dalag, obwohl derselbe immer aus lebenden Käfern hervorgezogen wurde«. v. Siebold traf den Wurm bei Danzig unter 22 Käfern

1) Müller's Archiv f. Anat. u. Physiol. 1836. S. 33 Anm.

fünfzehn Mal an, und zwar zu drei, sechs, zehn, ja einmal zu dreissig Individuen beisammen. Die Beschreibung, welche v. SIEBOLD von seinem Parasiten entwirft, lautet folgendermassen: »Die Länge des Körpers beträgt 1½ Linie. Weder von einem Maule, noch After, noch von einem Darmkanale war irgend eine Spur an diesem Wurme zu finden. Beide Enden des Wurmes sind stumpf abgerundet, nach dem einen Ende hin verdickt er sich allmählich, und nicht weit von der Spitze des andern dünnen Endes ragt eine Papille hervor, die die Stelle der Vulva andeutet, welche zu einem einfachen Schlauche, dem Uterus, führt. Dieser Uterus liegt mit einem mässig langen Ovarium wenig gewunden, als das einzige deutliche Organ im Leibe des Wurms, dessen Parenchym aus einer feinkörnigen Masse besteht. In dem Fruchthälter sieht man zwischen den Eiern schon lebende Junge; merkwürdig bleibt es mir, dass ich unter 70 Individuen nur trächtige Weibchen und nie ein Männchen angetroffen habe.«

Leider ist es mir unmöglich gewesen, diese Filaria rigida aufzufinden. Die von mir untersuchten Exemplare von Aphodius fimetarius waren allerdings (im Juli) nicht frei von Parasiten, aber es waren keine geschlechtsreifen Thiere, welche mir darin aufstiessen, sondern geschlechtslose Jugendformen, die in wechselnder Zahl, meist zu mehreren, die Leibeshöhle bewohnten und ihrem Aussehen nach kaum als Rhabditiden in Anspruch genommen werden konnten.

Aber auch abgesehen von der Filaria rigida dürfte die Gruppe der allantonemenartigen Nematoden bei den Insekten mehrfach vertreten sein. So wurde ich schon vor mehreren Jahren darauf aufmerksam gemacht, dass bei Geotrupes in der Leibeshöhle gelegentlich ein mit jungen Nematoden gefülltes Säckchen vorkomme, und ebenso weiss ich durch Mittheilungen meines ehemaligen Assistenten und Schülers, des Prof. CHUN, dass Ophion luteus (in Königsberg) nicht selten einen viviparen darmlosen Nematoden beherbergt, der, wenn er auch nicht generisch mit Allantonema zusammenzustellen ist, doch immerhin den nächsten Verwandten desselben zugehören dürfte.

II.

SPHAERULARIA BOMBI.

Mit Tafel II.

Historisches. Unter dem Namen *Sphaerularia bombi* beschrieb der verdienstvolle französische Entomotom Léon Dufour im Jahre 1837 einen 6—8 Linien langen Eingeweidewurm aus der Leibeshöhle von *Bombus terrestris* und *Bombus hortulorum*, den er keiner der damals bekannten Helminthenformen anzureihen vermochte und Anfangs sogar für eine schmarotzende Insektenlarve zu halten geneigt war. »Teres, albido-pellucida, mollis, filiformis; haud annulata, undique sphaerulis vesiculariformibus granulata, antice posticeque obtusa, subrotundata«, so lautete die Diagnose des Wurmes[1]), eines Thieres, dessen systematische Stellung ungewiss blieb, bis v. Siebold schon nach kurzer Zeit den Nachweis lieferte[2]), dass die gemeinschaftlich mit dem Wurme in der Leibeshöhle der Hummeln lebenden Jugendformen nach Bau und Entwicklungsweise ganz unverkennbar den Nematodentypus besässen. Bei den Mutterthieren freilich liess sich letzterer nicht mit gleicher Bestimmtheit nachweisen. Höchstens, dass diese, wie v. Siebold hervorhebt, noch durch ihre cylindrische Körperform und die Bildung ihrer Geschlechtsorgane einigermassen an Nematoden erinnerten, während sie sonst sehr auffallend davon abwichen. Und das nicht bloss durch den Verlust der Beweglichkeit und die Beschaffenheit der Körperhaut, die »mit ihren blasenförmigen Erhabenheiten einen sehr artigen Anblick gewährt«, sondern auch dadurch, dass Mund und After fehlen, und »an Stelle des Darmkanales eine Reihe an einander klebender länglicher Schläuche sich hinzieht, um welche sich die stets nur in weiblicher Form vorhandenen und durch ein einfaches Rohr repräsentirten Geschlechtsorgane herumwinden«.

Wie wir durch A. Schneider später erfahren haben[3]), war v.

1) Annales des scienc. natur. 1837. T. VII. p. 9.

2) Archiv f. Naturgesch. Jahrg. 1838. Th. I. S. 305; vgl. auch Anatomie der wirbellosen Thiere. 1848. S. 138. Anm. 1.

3) Zoologische Beiträge. Th. I. S. 1. 1883.

SIEBOLD übrigens nicht der Erste, der die spulwurmartigen Embryonen der Sphaerularia auffand. Schon RÉAUMUR[1]) hat dieselben in den Hummeln gesehen und als Aelchen (»anguilles«) erkannt, auch die Thatsache festgestellt, dass es immer nur weibliche, aber sterile Hummeln sind, welche dieselben »zu Millionen« beherbergen. Ueber die Ursache der Sterilität war RÉAUMUR im Zweifel: »soit que leur ponte fût finie, soit que l'état violent, où elles se trouvaient, n'eût pas permis à leur oeufs de se développer«. Ebenso war es ihm unbekannt, dass neben diesen Würmchen auch deren Mutterthiere in den Hummeln schmarotzten. Selbst die eigentliche Wohn stätte der Parasiten ist seiner Beobachtung entgangen, denn er versetzte dieselben aus der Leibeshöhle in den Magen der Hummeln, den er unter dem Einflusse der Insassen zu einer fast kirschgrossen rundlichen Masse sich auftreiben liess. Was RÉAUMUR aber als »estomac prodigieusement dilaté« deutet, ist den beigegebenen Abbildungen zufolge in Wirklichkeit nicht dieser, sondern der gesammte Darm, dessen Windungen von den Malpighi'schen Gefässen umsponnen und knauelartig zusammengehalten werden. In Fig. 11 der Tab. IV sieht man aus diesem Knauel auch ganz deutlich zwei Sphaerularien hervorragen. Ebenso erkennt man in Fig. 10 derselben Tafel zwei Sphaerularien seitlich neben dem Knauel[2]).

Auf die Gestaltung unserer Kenntnisse von den Sphaerularien hat die RÉAUMUR'sche Beobachtung natürlich keinen Einfluss ausüben können. Die Angaben LÉON DUFOUR's und v. SIEBOLD's waren die einzigen Ausgangspunkte derselben und bildeten eine lange Zeit hindurch den ganzen Inhalt dessen, was wir über den sonderbaren Parasiten wussten. Erst durch die im Jahre 1861 veröffentlichten Untersuchungen LUBBOCK's[3]) werden uns neue und überraschende Aufschlüsse. Nicht bloss, dass durch sie zum ersten Male die Häufigkeit und die weite Verbreitung der Sphaerularien unter den im Frühling fliegenden Hummeln, welche sämmtlich überwinterte Weibchen sind, bekannt wurde — LUBBOCK zählt acht Species auf, die freilich

1) Mémoires pour servir à l'histoire des insectes. Paris 1742. T. VI. p. 22.

2) In der beigegebenen Kupfererklärung wird das Knauel als »estomac« bezeichnet, »qui n'est qu'un massiv de vers«.

3) On Sphaerularia bombi. Nat. hist. review. 1861. p. 44—57. Tab. I.

in verschiedenem Procentsatz von unserem Parasiten und oftmals zu mehreren (bis zu 11) heimgesucht werden —, auch nicht bloss, dass die anatomische Structur des sonderbaren Wesens jetzt zum ersten Male vollständig ihre Darlegung fand, weit wichtiger noch und in hohem Grade überraschend war der Nachweis, dass die Sphaerularia an dem einen Körperende, demselben, welches das Ovarium enthält, mit einem äusserst kleinen Wurme in Verbindung steht, der im Gegensatze zu der bisher allein bekannten Form ebenso unverkennbar, wie die Embryonen, die Merkmale eines genuinen Nematoden an sich trägt. Unter Hinweis auf den sonderbaren Syngamus trachealis mit dem anhaftenden Zwergmännchen[1]) glaubte Lubbock dieses Würmchen vermuthungsweise gleichfalls als Männchen in Anspruch nehmen zu dürfen. Den Beweis für die Richtigkeit seiner Deutung weiss derselbe allerdings nicht zu erbringen. Ein Spicularapparat, wie solcher sonst den männlichen Nematoden zukommt, fehlt dem anhängenden Wurme, es liessen sich auch im Innern desselben weder Geschlechtsorgane, noch Samenelemente auffinden, aber trotzdem erschien die von Lubbock versuchte Deutung bis auf Weiteres als die einzige, welche die Beziehungen der beiderlei Wesen zoologisch dem Verständnisse zugänglich machte[2]).

In dieser Auffassung wurde Lubbock noch bestärkt, als er bei einer späteren Untersuchung[3]) die Thatsache constatirte, dass die Grössenunterschiede zwischen der Sphaerularia und dem anhängenden Würmchen Anfangs, wenn die Hummeln eben zu fliegen beginnen, noch fehlen und erst im Laufe der Zeit immer stärker hervortreten. In einem Fälle war das muthmassliche Weibchen sogar kleiner, als das anhängende Würmchen. Es gelang jetzt auch, im Innern des letzteren eine Körnermasse aufzufinden, welche, da sie an den späteren Veränderungen keinerlei Antheil nahm und schliesslich auch bei dem erwachsenen Parasiten im unteren Ende

1) Vgl. Nathusius im Arch. f. Naturgesch. Jahrg. 1837. Th. I. S. 60.

2) Lubbock selbst spricht sich (l. c. p. 11) in Betreff seiner Annahme vorsichtiger Weise dahin aus, dass »until the spermatozoa and the transformations of this little creature are known to us, the fact can not be regarded as being conclusively established«.

3) Report british association Cambridge 1862. p. 110. (Leuckart's Jahresbericht f. 1861 u. 1862. S. 67.)

der Geschlechtsröhre nachgewiesen wurde, kaum etwas Anderes, als Sperma sein konnte.

Obwohl nun unter solchen Umständen die Auffassung LUBBOCK's, der zufolge die sonderbare Sphaerularia ein in Copulation befindliches Nematodenpärchen ist, an Wahrscheinlichkeit gewinnen musste, blieben doch in anatomischer Hinsicht grossentheils die Unterschiede fortbestehen, die schon v. SIEBOLD zwischen dem vermeintlichen Weibchen und den typischen Nematoden hervorgehoben hatte. In manchen Punkten wurde allerdings die Bedeutung derselben durch LUBBOCK's Darstellung abgeschwächt, aber dafür ergaben sich andererseits wieder neue und schwer wiegende Verschiedenheiten. So namentlich in Betreff der Leibeswand, deren Beschaffenheit in keiner Weise mit dem Verhalten der Nematoden in Einklang zu bringen war, und die auch dann noch in hohem Grade abweichend erscheinen musste, wenn man mit LUBBOCK die Erhebungen derselben als modificirte Stacheln ansieht. Jedenfalls ist eine Leibeswand, die nicht bloss der Muskeln und Nerven entbehrt, sondern auch aus einer einzigen Substanzlage besteht — und so ist nach LUBBOCK die Leibeswand der Sphaerularia beschaffen — für einen Spulwurm mindestens sehr ungewöhnlich. Andererseits aber wurde der an Stelle des Darmes durch den Innenraum hinziehende und an beiden Körperenden befestigte Schlauch von LUBBOCK dem von MEISSNER inzwischen bei Mermis albicans aufgefundenen Fettkörper zur Seite gestellt und dadurch einigermassen den Organisationsverhältnissen der Nematoden angepasst. Der Bau spricht durchaus zu Gunsten dieser Deutung, denn der betreffende Strang besteht, wie jener Körper, aus zwei Reihen alternirend gestellter Zellen von wechselnder Grösse, nur dass diese bei Sphaerularia im Innern je 7—8 kuglige Kerne enthalten. Dass das in unregelmässigen Windungen hinziehende lange Genitalrohr von allen Eingeweiden am meisten den Nematodentypus hat, ist bereits von v. SIEBOLD betont worden. Es besteht aus einem Ovarium mit Rhachis im Innern, das den bei Weitem ansehnlichsten Theil der Röhre bildet, und einem zweiten ziemlich gestreckten Abschnitte, dem Uterus, in dem die Eier ihre ersten Bildungsstadien durchlaufen, bis sie durch die Vulva, die auffallender Weise das der

1) Zeitschrift f. wissensch. Zoologie. 1854. Bd. V. S. 248. Tab. XIII. Fig. 21.

Anheftungsstelle des vermuthlichen Zwergmännchens gegenüber liegende Körperende einnimmt, in die Leibeshöhle der Hummel übertreten und hier in die durchaus nematodenartigen Jugendformen sich umwandeln. Die Zahl der mit der Zeit daselbst sich ansammelnden Würmchen wird für gewöhnlich auf 50—60000 geschätzt. In einem Falle soll dieselbe sogar über 100 000 betragen haben.

Trotz dem Widerstreit einzelner Thatsachen war die Deutung Lubbock's im Ganzen so verführerisch, dass sie fast allgemeine Anerkennung fand. Die Bedenken, welche A. Schneider einige Jahre nach ihrer Veröffentlichung dagegen geltend machte[1]), wurden kaum beachtet[2]) — vornehmlich wohl desshalb, weil sie als Ausgangspunkt und Stütze für eine Auffassung dienten, die auf den ersten Blick fast bizarr erscheinen musste, da sie weit aus dem Kreise des sonst Bekannten hinaustrat.

Unter Berücksichtigung des Baues der Sphaerularia und der Verbindungsweise mit dem Lubbock'schen Männchen glaubte Schneider nämlich annehmen zu müssen, dass erstere nicht, wie Lubbock wollte, ein erst nachträglich zur Copulation gekommenes Weibchen sei, sondern einen Theil des anhängenden Würmchens darstelle, das Schneider seinerseits als Weibchen in Anspruch nahm. Es sei, so behauptete unser Autor, der Uterus, der, Anfangs von geringer Grösse, aus der Geschlechtsöffnung hervorgestülpt wäre und dabei das ursprünglich im Wurmleibe gelegene Ovarium, sowie eine Darmschlinge (den sog. Fettkörper) in sich hineingezogen habe.

Die Behauptung, dass sich der Geschlechtsapparat eines Thieres in der hier vermutheten Weise zu einem fast selbständigen Wesen entwickele, während der ursprüngliche Träger desselben seine frühere Bildung behält und schliesslich zu einem unscheinbaren Anhange wird, war in der That nur wenig geeignet, ohne empirische Begründung alsbald zur Anerkennung zu kommen. Sie erschien als ein zoologisches Paradoxon, das auch durch den Hinweis auf die eigenthümliche Entwicklung von Phoronis, die nach Schneider's mehrfach seither bestätigten Untersuchungen[3]) gleichfalls durch Umstülpung

1) Monographie der Nematoden. 1866. S. 322.

2) Vgl. hierzu u. a. Huxley, Anatomie der wirbellosen Thiere. 1878. S. 568.

3) Arch. f. Anatomie u. Physiol. 1862. S. 47.

eines ursprünglich im Innern der Jugendform, der sog. Actinotrocha, gelegenen Schlauches entsteht und den Darm der letzteren in sich aufnimmt, kaum an Wahrscheinlichkeit gewinnen konnte. Und das um so weniger, als SCHNEIDER zur theoretischen Begründung seiner Ansicht unglücklicher Weise auf den Steenstrup'schen Generationswechsel zurückgriff, indem er den nach aussen umgestülpten Uterus als den Repräsentanten einer besonderen dem »Nährthiere« entsprossenen »Geschlechtsgeneration« in Anspruch nahm.

Doch SCHNEIDER wusste für seine Auffassung auch eine Anzahl realer Verhältnisse geltend zu machen. Er hob nicht bloss den Umstand hervor, dass dem anhängenden Würmchen die Merkmale des männlichen Geschlechts vollständig abgingen, sondern wies weiter auf die Eigenthümlichkeiten hin, die sowohl im Bau der Schlauchwand, wie in der Verbindung des Schlauches mit dem Wurmkörper obwalteten, auf Verhältnisse, die in der That weit mehr mit der neuen Anschauungsweise stimmten, als mit den Ansichten LUBBOCK's.

Was zunächst die Wand der Sphaerularia betrifft, so erkannte SCHNEIDER darin eine einfache Epithellage, von hexagonalen Zellen gebildet, die je in ihrer Mitte eine der für unsern Wurm so charakteristischen Hervorragungen tragen und durch ihr Verhalten, wie hervorgehoben wird, in hohem Grade »an die sonst bei den Nematoden im Uterus vorkommenden Epithelzellen« erinnern. Den äusseren Bedeckungen eines Nematoden lasse sich dieses Epithel in keinerlei Weise vergleichen. Ebenso sei die Verbindung des Schlauches mit dem anhängenden Wurme keine mechanische, wie man nach LUBBOCK anzunehmen habe, sondern eine organische, indem sie auf einem directen Zusammenhange beider Leiber beruhe, und überdiess an einer Stelle stattfinde, die bei ihrer weiten Entfernung von der Uterusöffnung eine Copulation kaum erwarten lasse, dagegen in ebenso einfacher, wie natürlicher Weise durch die Annahme erklärt werde, dass sie die Austrittsstelle des vorfallenden Uterus bilde. Die Lage derselben stimmt auch so ziemlich mit der sonst bei den Nematoden üblichen Anordnung der Vulva. Ebenso deute die terminale Oeffnung des Eierganges darauf hin, dass der denselben umgebende Schlauch durch einen Vorfall des Uterus entstanden sei.

Man muss SCHNEIDER beistimmen, wenn er behauptet, dass die Organisation der Sphaerularia sich weit ungezwungener seiner Auf-

fassung anpasst, als der von Lubbock. Aber der Vorgang, den Schneider annahm, war ein bisher unerhörter; seine Deutung war auch nicht der unmittelbaren Beobachtung entnommen, sondern auf Grund gewisser Thatsachen bloss erschlossen — und so konnte es denn geschehen, dass die Auffassung Schneider's zwei Jahrzehnte hindurch ohne Beachtung blieb und vielleicht sogar der Vergessenheit anheimgefallen wäre, wenn Schneider schliesslich (1884) nicht selbst wieder durch neue Beobachtungen die Aufmerksamkeit darauf hingelenkt hätte [1]).

Den directen Beweis für die Richtigkeit seiner Auffassung ist Schneider freilich auch dieses zweite Mal schuldig geblieben. Nicht die Bildungsgeschichte des Schlauches war es, die er beobachtete, sondern die Thatsache, dass die Brut der Sphaerularia nach einem längeren Aufenthalte im Freien sich ohne wesentliche Form- und Grössenveränderung zu männlichen, wie weiblichen Nematoden entwickele, die ihren zoologischen Merkmalen nach »ohne Zweifel der Gattung Anguillula Schn. (Tylenchus Bast.) zugehörten«. Eine Begattung wurde nicht beobachtet. Da die Weibchen noch ohne entwickelte und befruchtungsfähige Eier waren, die Männchen aber immer nur in der abgestossenen Larvenhaut zur Beobachtung kamen, so glaubte Schneider zunächst annehmen zu müssen, dass dieselbe erst im Innern der Hummeln geschehe.

Dass die Embryonen, wenn man sie ihrem Wohnthiere entnimmt, Monate lang am Leben bleiben, war schon früher sowohl von Lubbock [2]), wie auch von mir [3]) beobachtet worden. Da dieselben aber diese ganze Zeit hindurch ohne Veränderung blieben, wurde die Beobachtung dahin ausgelegt, dass die Jugendformen als solche in die Hummeln einwanderten und erst im Innern derselben zur Geschlechtsreife kämen. Auch Schneider hielt dies, bevor er die Geschlechtsthiere kannte, für wahrscheinlich und machte

1) Ueber die Entwicklung von Sphaerularia bombi. Zoologische Beiträge von A. Schneider. Bd. I. 1883. S. 1 ff.

2) L. c. p. 7.

3) Jahresbericht f. 1876—1879. S. 153. (Da diese Mittheilung dem Referate über eine von v. Linstow gelieferte Beschreibung der Sphaerularia-Embryonen eingefügt war, hat Schneider dieselbe irrthümlicher Weise dem Letztern zugeschrieben. A. a. O. S. 3 Anm.)

sogar eine Reihe von Versuchen, die Hummeln künstlich mit den Embryonen zu inficiren, ohne dabei jedoch das erwünschte Resultat zu erzielen.

Mit der Erkenntniss, dass die Embryonen schliesslich im Freien zur Geschlechtsreife kommen, mussten diese Experimente natürlich eine andere Richtung nehmen. An Stelle der Embryonen wurden jetzt die Geschlechtsthiere verfüttert — freilich wiederum ohne befriedigende Erfolge. Es gelang allerdings mehrfach, junge erwachsene Königinnen zur Aufnahme von Sphaerularien zu veranlassen, aber die Parasiten blieben im Darmkanale unverändert und wanderten auch nicht durch die Darmwand hindurch in die Leibeshöhle. Ebenso wenig drang jemals ein Wurm von aussen durch die Haut ein. Etwas anders verhielten sich die Würmer in den Hummellarven, insofern wenigstens, als sie hier deutlich wuchsen und sich verdickten. Aber auch hier kam es nicht zur Einwanderung in die Leibeshöhle, vielleicht, wie SCHNEIDER annahm, desshalb nicht, weil die Larven, die zum Zwecke der Fütterung aus den Waben genommen werden mussten, sämmtlich nach 4—5 Tagen zu Grunde gingen.

Nichtsdestoweniger glaubte SCHNEIDER auf Grund dieser Erfahrungen annehmen zu dürfen, dass die Infection der Hummeln in die Zeit des Larvenlebens falle. Er dachte sich, dass die Sphaerularien von den Arbeitern in die Hummelnester verschleppt würden und hier den Nahrungsstoffen sich beimischten. Natürlich sollten es unter solchen Umständen auch nicht bloss die Larven der Königinnen sein, welche sich mit jungen Sphaerularien inficirten, sondern mit gleicher Wahrscheinlichkeit auch die übrigen Insassen des Nestes, nur dass diese ihre Parasiten nicht zur vollen Entwicklung brächten, weil nur die Königinnen den Winter überdauerten und lange genug lebten, um die Metamorphose der Sphaerularien sich vollenden zu lassen.

Ueber die Art und den Gang dieser Metamorphose giebt die neue Entdeckung keinerlei Aufschluss. Nach wie vor bleiben wir in dieser Hinsicht auf Vermuthungen angewiesen, wenn auch diese immer mehr zu Gunsten der SCHNEIDER'schen Auffassung hinneigen. Das nematoide Würmchen entbehrt des Spicularapparates, der doch, wie wir durch SCHNEIDER wissen, der männlichen Sphaerularia zukommt, es trägt den Schlauch an derselben Stelle, an der das jungfräuliche Weibchen die Vulva besitzt, es lässt sich auch der Schlauch

selbst ungezwungen auf die in nur einfacher Zahl vorhandene weibliche Geschlechtsröhre zurückführen. Das alles scheint in der That die Annahme zu unterstützen, dass die ausgewachsene Sphaerularia ein weiblicher Wurm mit vorgefallenem Uterus sei. Und doch kann man sich Angesichts der colossalen Grösse und der selbständigen Entwicklung des anhängenden Schlauches der Bedenken nicht erwehren. Ein Organ, das unabhängig von seinem Träger wächst und ganz nach Art eines selbständigen Wesens sich entwickelt, ein solches Organ war nach wie vor noch nirgends sonst beobachtet. Mochten immerhin die Verhältnisse des parasitischen Lebens, die ja so vielfach anders sind, als die der freien Geschöpfe, die Existenz eines derartigen Gebildes ermöglichen, mochten selbst viele und gewichtige Thatsachen zu Gunsten derselben zusammenstimmen — die Auffassung Schneider's konnte erst dann auf eine unbedingte Anerkennung rechnen, wenn es gelang, für ihre Richtigkeit den directen Beweis zu erbringen. Und das konnte nur dadurch geschehen, dass die Schicksale der eingewanderten Würmer und die Bildung des Schlauches Schritt für Schritt verfolgt wurden.

Doch dieser Nachweis sollte nicht lange ausbleiben, denn schon nach wenig mehr als Jahresfrist konnte ich meinen Fachgenossen die Mittheilung machen[1]), dass es mir, der ich dem sonderbaren Parasiten schon seit längerer Zeit mein Interesse zugewendet hatte, gelungen sei, die Ansichten, die Schneider über die Natur der Sphaerularia auf Grund ihrer Organisationsverhältnisse ausgesprochen und von Anfang an verfochten habe, durch directe Beobachtung ausser Zweifel zu setzen. Die Möglichkeit dieses Nachweises verdanke ich zum grossen Theile der freundlichen Unterstützung des Herrn Fritz Rühl in Zürich-Hottingen, des Vorsitzenden des Schweizer entomologischen Tauschvereins, der mit gewohnter Findigkeit es verstand, die Hummelköniginnen in ihren Winterquartieren aufzusuchen und solche schon gegen Ausgang Winters (im Februar und März) in ge-

1) Ueber die Entwicklung der Sphaerularia bombi. Zoolog. Anzeiger 1885. Nr. 194. (Die betreffende Abhandlung wurde bereits Ende März gedruckt und um dieselbe Zeit auch an Freunde und Fachgenossen versendet.) Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften waren meine Beobachtungen ihren wesentlichen Ergebnissen nach bereits in der Sitzung vom 5. März desselben Jahres mitgetheilt worden.

nügender Menge mir zur Disposition stellte. An diesem Materiale konnte ich mit Bestimmtheit nicht bloss die Bildung und Metamorphose des Anhangsschlauches beobachten, nicht bloss sehen, wie derselbe als ein Anfangs nur unbedeutendes Zäpfchen aus der Vulva hervortritt und sich verändert, sondern weiter auch die Thatsache constatiren, dass die weibliche Reife, d. h. die Production befruchtungsfähiger Eier, erst auf einer sehr späten Entwicklungsstufe auftritt, wenn der Schlauch nahezu seine volle Grösse erreicht hat.

In anderer Hinsicht ergaben sich freilich aus meinen Beobachtungen Resultate, die mit den Ansichten und Schlussfolgerungen von SCHNEIDER nicht recht stimmen wollten. So glaubte ich zunächst der Angabe nicht beitreten zu können, dass die Begattung unserer Würmer erst im Innern der Hummel vor sich gehe. Sie geschehe schon vorher im Freien, wo die Männchen ebenso gut, wie die Weibchen ihre Larvenhaut abstreiften. Die männlichen Sphaerularien führen meinen Beobachtungen zufolge überhaupt niemals ein parasitisches Leben. Nur die befruchteten Weibchen sind es, die in die Hummeln einwandern, aber nicht etwa schon zur Zeit des Larvenlebens, sondern erst dann, wenn diese ihre Metamorphose bestanden haben und ihre Winterquartiere aufsuchen, so dass es natürlich erscheint, dass es immer nur Königinnen sind, die mit Sphaerularien besetzt gefunden werden.

Was ich in meinen Mittheilungen veröffentlichte, hat einige Monate später durch SCHNEIDER's »fortgesetzte Mittheilungen über Sphaerularia bombi«[1]) seine Bestätigung gefunden. Königinnen, die derselbe in Blumentöpfen mit geschlechtsreifen Würmern einige Wochen zusammenhielt, inficirten sich und enthielten schon Ende October junge Parasiten »mit eben ausgestülptem Uterus«.

Mit diesen Entdeckungen haben unsere Kenntnisse über einen der sonderbarsten Parasiten in der Hauptsache ihren Abschluss gefunden. Es kann nicht länger bezweifelt werden, dass es ein Irrthum war, wenn man die Sphaerularia als ein copulirtes Pärchen dimorpher Geschlechtsthiere ansah. Sie ist nicht mehr und nicht weniger, als ein Weibchen mit vorgefallener und mächtig entwickelter Geschlechtsröhre. Das Wachsthum und die Entwicklung des An-

1) Zoologische Beiträge. 1885. Bd. I. S. 247.

hangsschlauches geht augenscheinlicher Weise ganz unabhängig von dem Wurme vor sich. Nicht bloss, dass letzterer seine früheren Dimensionen beibehält, während der Schlauch um das Tausendfache wächst, der Wurm wird auch im Laufe der Zeit bewegungslos und geht sogar in vielen Fällen schon vor Eintritt der Geschlechtsreife verloren [1]. Kein Wunder unter solchen Umständen, dass man den Schlauch eine Zeit lang für ein selbständiges Wesen halten konnte, und auch Schneider noch Anfangs darin das genuine Geschlechtsthier der Sphaerularia sah. Heute freilich ist eine solche Auffassung nicht mehr gerechtfertigt. Der Schlauch ist ein Organ des weiblichen Körpers, ein Organ aber, das nach Art eines transplantirten Gebildes in einem fremden Leibe die Bedingungen seines Wachsthums und seiner Entwicklung findet. Bei einem frei lebenden Thiere wäre ein solches Verhalten absolut unmöglich. Auch der sonderbare Hectocotylus kann dagegen nicht als Beispiel angezogen werden, da er nach der Abtrennung von dem zugehörigen Männchen wohl den Begattungsact vollzieht, aber weder Nahrung aufnimmt, noch irgendwie sich verändert. Das freie Leben macht Voraussetzungen, die nur durch eine vollständigere Instrumentirung und eine grössere Zahl in einander greifender Leistungen erfüllt werden können.

Obwohl wir somit nun die Lebensgeschichte und den Bau der Sphaerularia in ihren allgemeinen Umrissen ziemlich vollständig kennen, ist damit doch noch lange nicht der ganze Inhalt dessen erschöpft, was der Wurm an Eigenthümlichkeiten uns entgegenträgt. Unsere Sphaerularia ist nicht bloss biologisch und entwicklungsgeschichtlich, sondern vielfach auch anatomisch und histologisch ein so ungewöhnliches Geschöpf, dass eine genauere Durchforschung derselben nicht ohne Gewinn für unsere Wissenschaft sein dürfte. Und von diesem Gesichtspunkte aus wird denn auch, wie ich hoffe, die nachstehende Darstellung einiges Interesse gewähren — und das selbst dann, wenn es mir nicht gelungen sein sollte, davon ein bis in alle Einzelheiten zutreffendes und erschöpfendes Bild zu liefern.

Lebensgeschichte und Bau. Unseren heutigen Erfahrungen zufolge hat die Sphaerularia unter den Hummeln eine weite Verbrei-

1) Schneider stellt diese Angabe unrichtiger Weise in seiner letzten Mittheilung in Abrede.

tung. Sie findet sich nicht nur in Deutschland, Frankreich und der Schweiz, in England und Italien, sondern nach DIMMOCK [1]) auch in Nordamerika. Und nicht bloss einzelne wenige Hummelarten sind es, die von dem Parasiten heimgesucht werden, sondern vermuthlich alle, so viele deren an Ort und Stelle existiren. Allerdings hat es den Anschein, als ob nicht sämmtliche Arten mit gleicher Häufigkeit den Parasiten beherbergten — am häufigsten findet man ihn sowohl bei uns, wie auch in England und in der Schweiz, bei Bombus lapidarius und B. terrestris —, allein das dürfte wohl weniger durch die specifische Natur der Träger, als durch die Verschiedenheit der Umstände bedingt sein, die eine Infection herbeiführen. Denn dass es das Aufsuchen der Winterquartiere ist, das damit verbundene Umherkriechen auf der Erde zwischen Moos und Abfällen, welches den um diese Zeit an den Standorten der Hummeln mehr oder minder massenhaft verbreiteten Geschlechtsthieren Gelegenheit zur Einwanderung bietet, wird wohl schwerlich bezweifelt werden können. Damit aber ergiebt sich dann ohne Weiteres eine Reihe von Momenten, welche jene Ungleichheiten erklären. Denn nicht bloss, dass die Hummeln keineswegs alle unter denselben Verhältnissen überwintern, auch die Bedingungen für die Geschlechtsentwicklung der Sphaerularien sind nicht allerorten die gleichen.

In der Regel ist es, den Erfahrungen RÜHL's zufolge, ein moosbedeckter Waldboden, besonders ein mit Fichten bewachsener, den die Hummeln zum Zwecke der Ueberwinterung aufsuchen, eine Localität also, die durch die ihr inhaerirende Feuchtigkeit für die Aufzucht der jungen Sphaerularien schon an sich geeignet erscheint. Dicht unterhalb dieser Moosdecke findet man die Hummeln freilich nur Anfangs, wenn sie die Winterquartiere eben bezogen haben oder dieselben bei Beginn der wärmeren Jahreszeit zu verlassen im Begriffe sind. Während der Winterkälte liegen sie tief in der Erde vergraben, gelegentlich in Metertiefe, und immer vereinzelt, so dass oftmals ganze umfangreiche Strecken durchwühlt werden mussten, bevor einige wenige Hummeln gefunden wurden. Besonders ergiebig erwies sich bei Zürich der Uetliberg, aber auch hier lieferte die Arbeit eines Tages nur selten mehr, als zwei oder drei Exem-

1) Psyche. 1886.

plare. Zum Glücke waren aber gerade die am Uetliberge gegrabenen Hummeln fast sämmtlich mit Sphaerularien besetzt und meistens sogar mit einer grösseren Anzahl (6—8 und noch mehr), während das bei den anderwärts gesammelten Thieren keineswegs in gleichem Maasse der Fall ist.

Auch in der Umgegend Leipzigs kenne ich Localitäten, die bei Beginn des Frühlings in fast jeder Hummel Sphaerularien und meist in mehrfacher Anzahl[1]) aufweisen, und andere, in denen die Parasiten nur äusserst selten sind. Damit stimmt auch die Angabe Schneider's, dass es manchmal nur ein kleines Thal oder ein Wald sei, in dem die Sphaerularien häufig vorkämen, während sie sonst weit und breit vergebens gesucht würden.

Es hat sogar den Anschein, als wenn ganze mehr oder minder ausgedehnte Landstrecken in dieser Beziehung sich verschieden verhielten. So macht schon Schneider darauf aufmerksam, dass die Umgegend Giessens an Sphaerularien ausserordentlich arm sei. Unter mehr als dritthalbtausend Hummeln, die er in vier Jahren daraufhin untersuchte, waren nur 19, die Sphaerularien enthielten (1 : 140). Meine persönlichen Erfahrungen stimmen damit überein, denn ich habe während meines neunzehnjährigen Aufenthaltes daselbst nur einige wenige Male Gelegenheit gehabt, die schon von Göttingen aus mir wohlbekannte — obwohl auch hier im Ganzen nur selten gesehene — Sphaerularia aufzufinden.

Ob die Hummel übrigens das einzige Insekt ist, welches unsern Parasiten beherbergt, steht dahin. Cobbold bezeichnet auch Vespa rufa und V. vulgaris als dessen Träger[2]), giebt wenigstens an, in den diesen Thieren von anderer Seite (im Mai) entnommenen Würmern Sphaerularien erkannt zu haben. Bei der ziemlich nahen systematischen und biologischen Verwandtschaft, welche die Wespen mit den Hummeln haben, müssen wir nicht bloss die Möglichkeit eines solchen Vorkommens zugeben, sondern selbst daran denken, dass viel-

1) In einem Falle zählte ich in einem Bombus terrestris deren nicht weniger als 32 Stück, sämmtlich — es war am 6. Mai — von etwa Centimeterlänge. Es war die grösseste Zahl, der ich begegnete. Fälle von 6—8 Parasiten gehören auch bei uns eben nicht zu den Seltenheiten.

2) Transact. Linnaean Society. Zoology. 1 83. Vol. II. p. 358.

leicht noch andere gleich den Hummeln als befruchtete Weibchen in der Erde überwinternde Hymenopteren von unserem Parasiten (oder ähnlichen Formen) heimgesucht werden.

Réaumur lässt die mit Sphaerularien besetzten Hummelköniginnen, wie das oben erwähnt ist, steril sein. In der That trifft man unter denselben gelegentlich auf Exemplare, die in ihrem Geschlechtsapparate kein einziges reifes Ei enthalten. Anatomisch sind diese Organe vollständig entwickelt, auch in den blinden Enden der Ovarialschläuche mit Eikeimen besetzt, aber ausgebildete Eier fehlen. Indessen ist es nicht immer so. In andern Fällen trifft man neben den Eikeimen auch auf Eier von durchaus normaler Beschaffenheit. Aber mir ist keine Königin mit Sphaerularien vorgekommen, in der die Ovarialröhren so gleichmässig und reich mit Eiern besetzt gewesen wären, wie das bei gesunden Hummeln um diese Zeit der Fall ist. In der Regel trifft man nur auf einzelne wenige Eier, bisweilen nur auf ein einziges.

Offenbar ist die Fruchtbarkeit der inficirten Königinnen eine weit geringere, als die der gesunden Hummeln. Die Ursache dieser Erscheinung liegt auf der Hand. Sie beruht noch augenscheinlicher, als bei den mit Allantonemen besetzten Rüsselkäfern, darauf, dass die Parasiten einen grossen Theil der sonst den sich entwickelnden Eiern zu Gute kommenden Nahrungsüberschüsse für sich selbst beanspruchen, vielleicht auch schon durch ihre blosse Anwesenheit die vegetativen Functionen ihrer Wirthe in nachtheiliger Weise beeinflussen.

Diese geringe Fruchtbarkeit trägt denn auch die Schuld, dass die inficirten Hummelköniginnen es niemals, wie Schneider angiebt, zur Bildung einer Colonie bringen. Ihre Flugzeit dauert bis weit in den Juni hinein, während die gesunden Königinnen meist schon Anfangs oder Mitte Mai ihren Ausflug einstellen und es den inzwischen erbrüteten Arbeitern überlassen, die Nahrungsvorräthe zu sammeln. Bei einer Nestkönigin aber ist weder von Schneider, noch von mir jemals eine Sphaerularia gefunden worden, obwohl wir solche von Localitäten untersuchten, die diese Parasiten sonst in reicher Menge aufwiesen.

Dass die inficirten Hummeln freilich niemals den Versuch machen, einen Staat zu gründen, möchte ich nicht behaupten. Ange-

sichts des sonst so zwingenden Fortpflanzungstriebes wird man vielmehr der Annahme zuneigen, dass es wenigstens da geschehe, wo überhaupt noch Eier reifen. Aber der Staat, den die Sphaerularienträger gründen, wird auch im günstigen Falle so volkarm bleiben, dass sich die Königinnen den Pflichten des Nahrungserwerbs nicht entziehen können. Unfähig, auf die Dauer sich zu erhalten, wird derselbe vermuthlich schon frühe dem Untergange anheimfallen, und das um so sicherer, als die in der Leibeshöhle der Königin allmählich massenhaft sich ansammelnden jungen Sphaerularien dem Leben derselben vorzeitig ein Ziel setzen.

In der zweiten Hälfte des Juli sieht man keine Königin mehr fliegen. Die gesunden haben ihren Flug eingestellt; sie gehen unter der Pflege der immer zahlreicher erbrüteten Arbeiter der Zeit ihrer grössten Fruchtbarkeit entgegen, die inficirten aber sind abgestorben. Schwach und krank infolge ihres Parasitenleidens haben sie sich unter Moos und Erde verkrochen und hier oder vielleicht auch in den Nestern ihr Leben geendigt.

In vielen Fällen mag der Tod der Hummel nun auch den Untergang ihrer Parasiten zur Folge haben. Aber so ist es nicht immer. Ich habe mehrere Male gesehen, dass die jungen Sphaerularien in meinen Zwingern massenhaft aus den Leibern der abgestorbenen Hummeln ausschwärmten und an der anliegenden Glaswand emporstiegen. Es geschah immer nur dann, wenn die todten Hummeln dem feuchten Boden auflagen, und auch dann nicht in allen Fällen. Vielleicht, dass die Würmer, um selbständig auswandern zu können, einen gewissen Reifezustand besitzen müssen, den sie erst nach längerem Verweilen in ihrem Träger erlangen. Auch bei Culturversuchen, die man mit den aus den Hummeln entnommenen Würmern anstellt, geht stets ein bedeutender Procentsatz, zumeist wohl jüngere Thiere, die noch nicht gehörig erstarkt sind und ihre Reservestoffe noch nicht vollständig gesammelt haben, mehr oder weniger frühe zu Grunde.

Wenn die abgestorbenen Hummeln zu faulen beginnen, dann sterben die Würmer. Anders da, wo dieselben in Folge der mangelnden Feuchtigkeit austrocknen. In solchen Fällen verfallen die Würmer in eine Art Trockenstarre, aus der sie noch nach mehreren Tagen durch Befeuchtung wieder zum Leben gebracht werden kön-

nen. Ein vollständiges Austrocknen ist für unsere Parasiten freilich eben so tödtlich, wie für die meisten übrigen Nematoden.

Aber nicht bloss aus den todten Hummeln, auch aus den lebenden können die jungen Sphaerularien auswandern, und zwar auf demselben Wege, auf dem, wie wir oben (S. 592 [28]) sahen, auch die junge Brut der Allantonemen in's Freie kommt, durch den Darm hindurch. Schon SCHNEIDER hat in seiner letzten Mittheilung auf diese Art der Auswanderung aufmerksam gemacht. Er hält dieselbe sogar für die einzige, die überhaupt stattfindet, und glaubt, das die Würmchen im Stande seien, den Darm in ganzer Länge, von der Honigblase bis zum After zu durchbohren. Es will mir indessen scheinen, als wenn die Durchbruchstelle, wie bei Allantonema, auf den Mastdarm allein beschränkt sei. Wohl sieht man auch auf der Wand des vorderen Darmes vielfach junge Sphaerularien aufliegen und oftmals so dicht gestreut zwischen den Falten und Muskelzügen, dass man auf den ersten Blick geneigt ist, dieselben nach innen zu verlegen. Bei näherer Untersuchung aber erkennt man den Irrthum, und das um so sicherer, als zwischen den Würmern meist auch zahlreiche Eier mit mehr oder minder entwickelten Embryonen vorhanden sind, die doch unmöglich in das Innere des Darmes gelangt sein können. Nur im Mastdarme der Hummeln habe ich unzweifelhaft junge Sphaerularien aufgefunden, nicht bei allen Hummeln, aber doch bei vielen und in wechselnder Menge. Freilich muss man auch hier im Urtheile vorsichtig sein. Denn auch hier liegen nicht alle Würmer, die man sieht, im Innern. Viele sind gleichfalls dem Mastdarm bloss äusserlich angeheftet. Andere sind nur unvollständig eingedrungen, indem sie wohl die Aussenwand durchbohrt haben, nicht aber die chitinöse Tunica intima, so dass sie einstweilen noch zwischen beiden Häuten gelegen sind.

Dass diese Würmer schliesslich aus dem Darme nach aussen kommen, unterliegt keinem Zweifel. Um so weniger, als die wechselnde Füllung des Mastdarmes (mit einer bald pollenfreien, bald auch pollenhaltenden Flüssigkeit) zur Genüge beweist, dass die Hummeln den Inhalt des Mastdarmes von Zeit zu Zeit entleeren. Und die auf diese Weise frei gewordenen jungen Würmer werden unter günstigen Umständen natürlich eben so gut, und ihrer vollständigen Reife wegen vielleicht noch sicherer, als diejenigen, welche aus den

todten Hummeln auswanderten oder zum Zweck künstlicher Cultur denselben entnommen wurden, eine weitere Entwickelung eingehen.

Um die Embryonen zu züchten, darf man sie übrigens nicht in Wasser übertragen. Wohl bleiben dieselben eine Zeitlang darin lebendig, aber schon nach Tagesfrist werden sie, viele sogar schon nach wenigen Stunden, starr und bewegungslos. Was die Würmchen zu ihrer Existenz bedürfen, ist eine feuchte Luft und eine feuchte Unterlage. Beiden Bedingungen genügt man nach meiner Erfahrung am besten durch Uebertragung in ein geschlossenes Glas mit stark befeuchtetem Sand. Auch auf feuchter Erde geht natürlich die Entwicklung vor sich, für unsere Zuchtgefässe aber eignet diese sich viel weniger als Sand, da sie fast immer eine Menge organischer Keime, besonders Pilzsporen, enthält, die oftmals schon nach kurzer Zeit die Zucht vernichten. Einer Nahrungszufuhr bedürfen die jungen Sphaerularien nicht, wie das auch Schneider neuerlich angiebt. Sie zehren während ihres ganzen freien Lebens von den Reservestoffen, die sie als Parasiten sammelten. Trotzdem aber sind dieselben in beständiger Bewegung. Sie schlängeln sich lebhaft in der dünnen Flüssigkeitsschicht, welche den Sand bedeckt, oder steigen an der feuchten Glaswand nach oben, wobei sie sich mit ihren Leibern nicht selten in grösserer Zahl strangartig an einander legen.

Beim Eintritt in das freie Leben besitzen unsere Würmchen (Taf. II. Fig. 1) eine Länge von meist 1 mm oder etwas darüber. Ihr Körper ist schlank, höchstens 0,028 mm dick, und nach den Enden zu mässig verjüngt. Vorn ist derselbe abgerundet, hinten mehr kegelförmig, mit stumpfer, nach der Bauchfläche etwas eingekrümmter Spitze. Die Bildung ist so charakteristisch, dass die junge Sphaerularia kaum mit einem anderen jugendlichen Nematoden verwechselt werden kann.

Die fein geringelte Cuticula, die den Leib bekleidet, hat eine derbe Beschaffenheit. Sie gewährt dem Thiere offenbar einen kräftigen Schutz, wie schon daraus hervorgeht, dass Färbeflüssigkeiten nur schwer durch sie hindurchdringen. So wenigstens, wenn die Würmer älter sind und die zum Auswandern nöthige Reife erlangt haben, während jüngere Individuen rasch und vollständig von Färbemitteln, besonders Haematoxylin, durchtränkt werden.

So weit der Pharynx reicht, ist der Wurmkörper — in einer

Ausdehnung von 0,18 mm — hell und durchscheinend, sonst aber bis auf das äusserste (kaum 0,045 mm lange) Schwanzende undurchsichtig, so dass unsere Thiere bei auffallendem Lichte eine weissliche Farbe besitzen. Es rührt das daher, dass der Chylusdarm, der fast die ganze Leibeshöhle füllt, in seinen Zellen eine Unmasse von Körnchen und Kügelchen enthält, die ein starkes Lichtbrechungsvermögen besitzen, als wenn sie aus Fett beständen, und so dicht gehäuft sind, dass sie die Zellenkerne verdecken und die Grenzen der Zellen mehr oder minder vollständig verwischen. Eben so wenig lässt sich im Innern des Darmes — auch nicht auf Querschnitten (Fig. 2) — ein offenes Lumen nachweisen. Die Zellen beider Seitenflächen liegen, mit der Inhaltsmasse prall gefüllt, so dicht auf einander, dass man an Stelle des Lumens höchstens die in geschlängelter Linie verlaufenden Innengrenzen unterscheiden kann.

Wo die Füllung weniger stark ist, da gewinnt man die Ueberzeugung, dass die Zellen alternirend, wie bei den verwandten Würmern, in zwei Längsreihen einander gegenüber liegen. Sie besitzen eine langestreckte Form, sind aber von ungleicher Grösse (durchschnittlich 0,05 mm), so dass ihre Kerne (0,007 mm) in verschiedenen Abständen auf einander folgen. Die Endzellen der Rückenreihe bilden an der Insertionsstelle sowohl des Pharynx, wie des Rectums einen zipfelförmigen Vorsprung (Fig. 1).

Der Chylusdarm der jungen Sphaerularien zeigt hiernach mancherlei eigenthümliche Verhältnisse. Dieselben werden uns jedoch verständlich, sobald wir berücksichtigen, dass unsere Würmer, wie schon bemerkt, im Freien keinerlei Nahrung geniessen, und das auch dann nicht, wenn sie, wie es mitunter geschieht — ich habe solche Fälle in meinen Zuchtgefässen mehrmals constatirt — ohne Eintritt der geschlechtlichen Entwicklung den Winter überdauern und bis weit in den folgenden Sommer hinein, vielleicht bis zum Herbst, also länger als ein Jahr hindurch, am Leben bleiben. Während dieser ganzen Zeit zehren die Sphaerularien ausschliesslich von dem Inhalte ihrer Darmzellen, die ihr früheres Aussehen allmählig verlieren, indem die Körner und Kugeln, die sie füllen, immer mehr einschmelzen. In einem noch höheren Grade geschieht solches beim Eintritte der Geschlechtsreife, die in der Regel übrigens gleichfalls erst nach Ver-

lauf einer geraumen Zeit, gewöhnlich gegen Ende September oder im October (auch noch im November) stattfindet.

Die Inhaltsmassen der Darmzellen repräsentiren also das Nahrungsmaterial der jungen Sphaerularien. Sie sind Reservestoffe, welche dieselben während ihres parasitischen Lebens sammelten, wie wir das in ganz ähnlicher Weise schon oben bei den rhabditisförmigen Jugendformen von Allantonema gesehen haben. Nur dass bei letzteren die Darmzellen weniger vollständig gefüllt werden, dafür aber auch ein Theil der Reservestoffe in die Leibeswand eingelagert ist, was bei Sphaerularia nicht geschieht.

Die jungen Sphaerularien bieten uns also das Beispiel eines Thieres, das trotz monatelangen Aufenthaltes im Freien ausschliesslich von den Reservestoffen lebt, die es in früherer Zeit, unter oeconomisch günstigen Verhältnissen, in seinem Innern aufgespeichert hat. Mit diesem Mangel einer selbstständigen Nahrungsaufnahme harmonirt auch die Bildung sowohl des Mundes und Pharynx, wie des Rectums, die beide unfähig sind, in gewöhnlicher Weise zu functioniren. An Stelle der Mundöffnung trägt das Kopfende ein kleines von drei flachen Hervorragungen umgebenes Grübchen, das sich nach hinten in einen soliden Chitinstab fortsetzt, der die obliterirte Mundhöhle vertritt. Schneider hält dieses Gebilde für einen Stachel, wie solcher bei verwandten Arten, besonders gewissen Pflanzennematoden, in der Mundhöhle vorkommt, und lässt denselben auch gelegentlich nach aussen hervortreten, was ich niemals, auch nicht bei den Geschlechtsthieren, gesehen habe, obwohl das Stäbchen hier stärker ist und mehr als bei den Jugendformen in die Augen fällt. Da demselben zugleich die sonstigen Requisiten eines Nematodenstachels (besonders dessen Dicke und Zuspitzung) fehlen, das hintere Ende überdies der dreilappigen Verdickung entbehrt, die zum Ansatze der Vorziehmuskeln dient, auch keine Stacheldrüsen vorkommen, wie das gewöhnlich bei den betreffenden Arten der Fall ist, halte ich die Schneidersche Deutung für irrig. Und das um so mehr, als auch die sonst röhrige Chitinwand des Pharynx bei unserer Sphaerularia von einem soliden Chitinfaden vertreten ist, der vorn direct in den Pseudostachel übergeht, obwohl er sehr viel feiner ist, hinten aber bis an den Chylusdarm sich verfolgen lässt. Die äussere Umhüllung des Fadens wird von einer ziemlich dicken und hellen Substanzlage gebildet, die

am Hinterende fast bulbusartig anschwillt, aber nirgends eine deutlich fibrilläre Structur zeigt. Wo die Anschwellung beginnt, da wird der Pharynx ringförmig von einer zelligen Masse umfasst, die wohl als Nervenhalsband zu deuten ist.

Eben so unwegsam, wie Mund und Pharynx ist das Rectum unserer Würmer: ein solider Chitinfaden von unbedeutender Dicke, der in einer Entfernung von 0,048 mm von der Schwanzspitze der cuticularen Körperdecke verbunden ist und von da bis an das Ende des Chylusmagens sich verfolgen lässt. Eine Afteröffnung fehlt, obwohl die Körperoberfläche an der Insertionsstelle des Fadens nicht selten durch eine kleine Einbiegung markirt ist.

Ein ganz ähnlicher Chitinfaden wird dicht vor dem hinteren Pharyngealende mit der Bauchfläche der Cuticula in Verbindung gesehen. Ich brauche kaum zu bemerken, dass er dem Excretionsapparate zugehört.

Der Darmtractus ist übrigens nicht das einzige Organ, welches den Körper unserer Sphaerularien von vorn bis hinten in ganzer Länge durchzieht. Man braucht das Microscop nur oberflächlich einzustellen, um an den Seitenwänden des Körpers unter der Cuticula rechts wie links die scharf gezeichneten Contouren eines breiten Bandes (0,009 mm) zu erkennen, das sich bis in die äussersten Leibesenden hinein verfolgen lässt und hier, wo es den Chylusmagen überragt, noch deutlicher in die Augen fällt, als im übrigen Verlaufe. Das Band stellt die Seitenfelder dar, die bei unserm Wurme eine ungewöhnliche Entwicklung besitzen, wie das schon vor längerer Zeit von Linstow[1]) hervorgehoben hat. Um ihr Verhalten vollständig zu übersehen, muss man Querschnitte machen, was bei der Dünne der Würmer allerdings seine Schwierigkeit hat. An derartigen Präparaten (Fig. 2) sieht man, dass die Seitenfelder zwei ansehnliche Schläuche darstellen, die dicht auf der Cuticula aufliegen und mehr oder weniger weit, je nach den räumlichen Verhältnissen der Leibeshöhle, nach innen vorspringen. Im Innern enthalten dieselben eine pulpöse Masse, die von einer Anzahl bläschenförmiger Kerne (0,0038 mm) durchsetzt ist. Die aufliegende Cuticula zeigt eine leistenartige Verdickung.

1) Archiv für Naturgesch. 1878. Bd. I. S. 242. (Bei Schneider geschieht dieser Gebilde keine Erwähnung.)

Im Gegensatze zu diesen Seitenfeldern sind die sogenannten Medianlinien von einer nur unbedeutenden Entwicklung, so dass sie leicht übersehen werden könnten, wenn ihre Anwesenheit nicht durch eine Unterbrechung des den äusseren Bedeckungen aufliegenden Muskelschlauches sich kund thäte. Dadurch nun, dass dieser Muskelschlauch die Zwischenräume zwischen den Seitenfeldern und den Medianlinien einnimmt, erscheint derselbe (Fig. 2) in vier Felder getheilt, die je, wie man am deutlichsten an gelungenen (mit Beale'schem Carmin gefärbten) Imbibitionspräparaten sieht, zwei langgestreckte Muskelzellen von 0,04 Länge in sich aufnehmen. Auf den Querschnitten liegen also immer acht Muskelzellen neben einander, jedoch nicht der Art angeordnet, dass die stark verjüngten Enden die gleiche Höhe einhalten, sondern verschränkt, so dass jedes Muskelfeld von einem breitern und einem schmälern Segmente gebildet wird. Unsere Würmer erweisen sich demnach als sog. Platymyarier mit wenig zahlreichen flächenhaften Muskelzellen. Auch die Fibrillen der einzelnen Muskelzellen sind in nur geringer Menge vorhanden. Ich zählte deren nur selten mehr als vier in jeder Zelle.

Wie sonst bei den Jugendformen der Nematoden, so sind natürlich auch bei unserer Sphaerularia die Geschlechtsorgane einstweilen nur in der Anlage vorhanden. Dieselbe ist klein und unscheinbar, so dass sie sich besonders bei stärkerer Füllung der Darmzellen leicht der Untersuchung entzieht. Sie erscheint als ein spindelförmiges helles Körperchen von 0,008 mm, das in einiger Entfernung hinter der Körpermitte, gewöhnlich auf der Höhe der achten Darmzelle, dicht der Bauchwand aufliegt (Fig. 1).

In dem hier geschilderten Zustande verharren nun die jungen Würmer ohne merkliche Veränderung Wochen und Monate lang, bis gegen den Spätherbst hin die Geschlechtsentwicklung eintritt. Hat man dieselben, wie es gewöhnlich geschieht, direct der Leibeshöhle entnommen, dann geht freilich der bei Weitem grössere Theil vorzeitig zu Grunde. Und das um so eher, je weniger die äusseren Verhältnisse den Bedürfnissen genügen. Wenn übrigens die Resultate unserer Zuchtversuche einen Rückschluss gestatten, dann ist es weder mir noch Schneider bisher gelungen, die Einrichtungen unserer Zuchtapparate diesen Bedürfnissen vollständig anzupassen.

Trotz sorgfältiger Ueberwachung und Pflege kamen immer nur einige wenige Exemplare zur vollen Geschlechtsreife. Die übrigen gingen in der langen Zeit des Larvenlebens entweder verloren oder blieben unverändert, wie das schon oben bemerkt ist.

Die ersten Zeichen der nahenden Metamorphose bestehen darin, dass die Geschlechtsanlage, die Anfangs nur eine einzige Zelle repräsentirt, eine immerfort wachsende Zahl von Kernen erkennen lässt, und schlauchartig auswächst. In einzelnen Fällen beginnt diese Vergrösserung schon nach wenigen Wochen, in der Regel jedoch später, meist erst nach Monaten. Ist dieselbe bis zu einem gewissen Grade vorgeschritten, dann häutet sich der Wurm. Die quergestreifte derbe Cuticula löst sich mit ihren Anhängen (Pseudostachel, Rectalauskleidung, Ductus excretorius) los, ohne jedoch sogleich abgestreift zu werden. Sie bleibt futteralartig auf dem Wurmkörper liegen, der inzwischen eine neue Cuticula gebildet hat, und jetzt rasch, unter gleichzeitigem starken Verbrauch der Reservestoffe und merklicher Verkleinerung, seine Geschlechtsorgane zur Entwicklung bringt. Die Bewegungen werden durch die locker anliegende Hülle so wenig behindert, dass der Wurm sich im Innern derselben sogar vollständig umzukehren vermag und mit dem Kopfende dann nach hinten sieht. Noch bevor indessen die Geschlechtsmerkmale vollständig ausgebildet sind, unterliegt der Wurm, immer noch unter dem Schutze der Larvenhaut, einer abermaligen Häutung. Aber die Cuticula, die dabei abgestossen wird, hat die Beschaffenheit weder der früheren, noch jener, welche zu ihrem Ersatze das spätere Geschlechtsthier umgiebt. Während die letztere in Dicke und Sculptur mit der Larvenhaut übereinstimmt, besitzt ihre Vorgängerin eine sehr viel zartere Beschaffenheit. Sie erscheint als eine äusserst dünne Membran, die meist schon vor Eintritt der völligen Reife abgestreift wird, und dann vielfach gefaltet den Zwischenraum zwischen Wurm und Aussenhaut einnimmt (Fig. 3). Anhänge, besonders auch Pseudostachel, habe ich an derselben mit Bestimmtheit nicht nachweisen können.

Dass SCHNEIDER, als er die geschlechtsreifen Sphaerularien zuerst beobachtete, diese abgestossenen Häute während der ganzen Zeit des freien Lebens in deren Umkreis persistiren liess, ist schon oben bemerkt worden. Die lange Dauer der Encystirung macht den Irrthum erklärlich. Stösst man doch häufig auf Thiere, die unter der alten

Cuticula nicht etwa blos die äusseren und inneren Attribute ihres Geschlechts zur Entwicklung gebracht haben, sondern auch (Fig. 3) auf Männchen, deren Ductus ejaculatorius prall mit Sperma gefüllt ist. Selbst abgestorbene und verschrumpfte Würmer werden nicht selten unter der Umhüllung aufgefunden. Der Tod ist in solchen Fällen eingetreten, bevor die Insassen frei wurden.

Es sind übrigens immer nur die männlichen Sphaerularien, die ihre Geschlechtsproducte in so früher Zeit zur Ausbildung bringen. Die Eireife der Weibchen fällt in eine sehr viel spätere Entwicklungsperiode. Sie tritt erst ein, wenn die Würmer nach der inzwischen erfolgten Begattung in ihre Wirthe eingewandert sind und den Schlauch gebildet haben. Erst im Inneren des letzteren gewinnen die bis dahin nur unvollständig entwickelten Geschlechtsorgane und Geschlechtsproducte ihre volle Ausbildung. Natürlich werden auch erst auf diesem Stadium die Eier befruchtet.

Ob der Umstand, dass man die Männchen trotz ihrer relativen Seltenheit häufiger encystirt findet, als die Weibchen, darauf hindeutet, dass letztere eine kürzere Zeit in ihren Hüllen verweilen, will ich dahin gestellt sein lassen.

Was nun die Geschlechtsthiere selbst betrifft, so gleichen sich diese, Männchen (Fig. 3) und Weibchen (Fig. 4), in ihrer äusseren Erscheinung der Art, dass man beide erst bei genauerer Betrachtung unterscheiden lernt. Allerdings sind die Männchen um Einiges kleiner als die Weibchen — meist nur 0,88 gross, während die letzteren reichlich 1 mm messen — aber die Statur ist bei beiden dieselbe, und die Geschlechtsunterschiede springen nur wenig in die Augen. Wie die Grösse, so ist auch die Körperform im Ganzen gegen früher nur wenig verändert. Am abweichendsten erscheint der Schwanztheil, indem dieser die früher, im Larvenzustande, bekanntlich ziemlich plumpe Form ohne Veränderung der Länge mit einer schlankeren vertauscht hat und am Ende nicht mehr gerundet, sondern zugespitzt ist. Und das in beiden Geschlechtern, nicht bloss bei den Weibchen, wie Schneider Anfangs behauptete. Dass das männliche Schwanzende abgeplattet sei, kann ich nicht bestätigen, wie ich denn auch die von Schneider erwähnten zwei Seitenpapillen vergebens gesucht habe.

Die wichtigste Auszeichnung des Männchens besteht in der An-

wesenheit eines Spicularapparates (Fig. 3), aber auch dieser macht sich seiner unbedeutenden Grösse wegen nur wenig bemerklich, da die Spicula nicht mehr als 0,014 mm messen. Sie erscheinen als zwei bogenartig gekrümmte dünne Hornstäbe, denen an dem nach hinten gerichteten convexen Rande noch ein äusserst kleines — und deshalb auch wohl von SCHNEIDER übersehenes — hohlsondenartiges Gleitstück anliegt. Ob daneben noch der früher ganz unverkennbare rectale Chitinfaden vorhanden ist, muss ich unentschieden lassen. Bisweilen glaube ich ihn gesehen zu haben, in anderen Fällen aber habe ich wenigstens bei den Weibchen vergebens darnach gesucht. Höchstens, dass die Stelle, wo er früher der Cuticula verbunden war, durch eine kleine Einbuchtung ausgezeichnet ist. Die weibliche Geschlechtsöffnung liegt eine Strecke weit vorher, 0,12—0,15 mm vor der Schwanzspitze (Fig. 4), also ungewöhnlich weit nach hinten. Sie nimmt, wie SCHNEIDER das von Anfang an ganz richtig erschlossen hat, die Stelle ein, die später den Schlauch trägt. Besondere Auszeichnungen fehlen, kaum einmal, dass die Lippenränder etwas sich aufwulsten.

Wie die Körperform, so ist auch die innere Organisation der Geschlechtsthiere bis auf die jetzt ausgebildeten Generationsorgane im Wesentlichen die frühere. Es gilt das namentlich auch von dem Pseudostachel, der freilich an Dicke und Länge zugenommen hat, sonst aber dem Mundstachel eines Tylenchus in Nichts ähnlicher geworden ist. Auffallender sind die Veränderungen des Chylusdarmes, dessen Reservestoffe grossentheils verbraucht und der Art geschwunden sind, dass derselbe gegen früher hell und zusammengefallen aussieht. Bei Würmern, die sich der Geschlechtsreife nähern, hat man Gelegenheit, den Resorptionsprocess in seinen Einzelheiten zu verfolgen. Man sieht nicht blos, wie die den Darmzellen eingelagerten groben Körner allmählich kleiner werden, oftmals auch eine ovale oder stäbchenförmige Gestalt annehmen, sondern erkennt in deren Umkreis je einen hellen Hof, der auf Kosten der eingeschlossenen Masse immer mehr sich vergrösserst und verflüssigt, bis schliesslich an Stelle des früheren Zelleninhalts nur noch eine von feinen Körnchen durchsetzte helle Substanz geblieben ist.

Was aber vor allem Andern unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, ist die Bildung der Geschlechtsorgane, die den

Entwicklungszustand unserer Würmer am bestimmtesten zum Ausdruck bringt. Auf den ersten Blick freilich fallen die betreffenden Theile nur wenig in die Augen. Sie haben nahezu dasselbe blasse Aussehen, wie der Chylusdarm, dem sie dicht anliegen, und sind keineswegs überall so scharf contourirt, dass sie gleich von vornherein in ihrem ganzen Verlaufe sich übersehen liessen.

Der männliche Apparat, mit dem wir unsere Darstellung beginnen, erscheint (Fig. 3), wie gewöhnlich bei den Nematoden, als eine einfache Röhre, die von der Geschlechtsöffnung nach dem Kopfe zu emporsteigt. Ihre Länge ist nicht eben bedeutend und ihr Verlauf sehr einfach, indem sie nur wenig über die Körpermitte hinausreicht und höchstens am obersten Ende, das meist hakenförmig umbiegt, von der geraden Richtung abweicht. Auf halber Höhe ist sie durch eine tiefe Einschnürung in zwei Abschnitte getheilt, einen oberen, den Hoden, und einen unteren, der nach eingetretener Reife prall mit Sperma gefüllt ist und dadurch sich als Ductus ejaculatorius zu erkennen giebt. Der letztere misst reichlich (Fig. 3) den dritten Theil der gesammten Körperlänge und hat im gefüllten Zustande eine so beträchtliche Dicke (0,034 mm), dass er dicht an den Leibeswänden anliegt und den daneben hinziehenden Theil des Chylusdarmes zusammendrückt. Da der Hoden nach der Füllung der Samenblase stark zusammenfällt, und in seinem oberen Theile fast fadenartig dünn wird, darf man wohl annehmen, dass die männlichen Sphaerularien eine nur zeitlich begrenzte Brunstperiode durchlaufen und das Begattungsgeschäft sehr bald nach dem Eintritte der Reife vornehmen.

Die Samenkörperchen selbst sind von ausserordentlicher Kleinheit, so dass ihre Grösse mit den gewöhnlichen Messvorrichtungen nicht genau sich bestimmen lässt. Es gilt das namentlich von den stark lichtbrechenden runden Kernen, die überall so dicht gedrängt beisammen liegen, dass die sie umgebenden zarten Protoplasmahöfe nur selten deutlich hervortreten. Ueber die Entwicklung der Samenelemente weiss ich ein Näheres nicht anzugeben. Unsere Sphaerularia ist ein für solche Untersuchungen nur wenig geeignetes Object.

Die weiblichen Organe (Fig. 4) stimmen insofern mit den männlichen überein, als sie gleichfalls eine nur einfache Geschlechtsröhre aufweisen, wie solches schon von Schneider bemerkt ist. Eben-

so zeigt der Verlauf und die Anordnung derselben eine grosse Uebereinstimmung mit dem Verhalten der männlichen Theile, insofern wenigstens, als auch der weibliche Genitalschlauch sich von der Geschlechtsöffnung aus in gerader Richtung bis in das vorderste Körperdrittheil hinein verfolgen lässt. Das letzte dünne Ende ist gewöhnlich gleichfalls hornartig umgebogen. Wie bei anderen Nematoden mit einfacher weiblicher Geschlechtsröhre (Tylenchus), ist bei unserem Wurme übrigens, wie schon SCHNEIDER hervorhebt, noch das Rudiment eines zweiten Genitalschlauches vorhanden, ein divertikelartiger kurzer Anhang, der eine nach hinten gerichtete Fortsetzung der Scheide darstellt. Die Scheide selbst ist ein etwa 0,17 mm langes, ziemlich kräftiges Rohr, das im Innern ein Epithel erkennen lässt, und in einen längern (0,38 mm) und weitern zweiten Abschnitt, den Uterus, überführt, dessen Innenfläche nach SCHNEIDER mit grossen polyedrischen Zellen bekleidet sein soll. Das fadenförmige dünne Endstück erweist sich als Ovarium: der Innenraum desselben ist von äusserst kleinen hüllenlosen Eikeimen von höchstens 0,001 mm Grösse gefüllt, die je ein scharf gezeichnetes glänzendes Kernchen in sich einschliessen.

SCHNEIDER glaubt in den hier geschilderten Organisationsverhältnissen der geschlechtsreifen Sphaerularien hinreichende Gründe für die Annahme zu finden, dass dieselben dem Genus Tylenchus Bastian (= Anguillula Schn.), das sonst nur Pflanzenparasiten enthält, einzureihen seien. Indessen will mir scheinen, dass sich gegen diese Auffassung gar Manches einwenden lasse. Zunächst der Umstand, dass unser Wurm weder Mundstachel, noch Pharyngealbulbus besitzt, zwei Merkmale, die den übrigen Arten des Genus Tylenchus ausnahmslos zukommen und schon bei oberflächlichster Betrachtung in die Augen fallen. Allerdings wird auch unsere Sphaerularia, wie schon hervorgehoben ist, von SCHNEIDER mit einem Mundstachel ausgestattet, doch das Gebilde, welches dieser dafür hält, lässt keinen Vergleich mit einem wirklichen Stachel zu und kann nach meinen Untersuchungen unmöglich damit identificirt werden. Dazu kommt die Eigenthümlichkeit der Lebensgeschichte und das Verhalten der geschlechtsreifen Weibchen, das von allem bisher Bekannten in auffallendster Weise abweicht und schon für sich allein hinreichen dürfte, die Selbständigkeit des Genus Sphaerularia — in einem gegen früher

allerdings beträchtlich modificirten Sinne — für alle Zeit zu rechtfertigen[1]).

Wie lange unsere Würmer nach ihrer geschlechtlichen Ausbildung im Freien leben, muss ich unentschieden lassen. In meinen Zuchtgefässen gingen dieselben rasch an Zahl zurück[2]), zumal diese ohnehin immer nur eine geringe war. Es wollte mir nicht einmal gelingen, den Begattungsact zu sehen oder frisch begattete Weibchen aufzufinden[3]). Trotzdem zweifle ich keinen Augenblick, dass unsere Würmer sich während des freien Lebens begatten, und nicht etwa erst in der Hummel, wie Schneider Anfangs annahm. Es ist theils die Beschaffenheit des männlichen Geschlechtsapparates, besonders die frühzeitige Füllung der Samenblase, die meine Ansicht bestimmt, theils auch der Umstand, dass in den Hummeln immer nur begattete Weibchen gefunden werden. Allerdings hat mir die Gelegenheit gefehlt, Hummeln zu untersuchen, deren Würmer erst eben begattet waren, — die jüngsten von mir gefundenen Parasiten stammten aus

1) Auch die Speciesbezeichnung »bombi« wird von Schneider neuerdings beanstandet, »da nach einer von Rudolphi mit Recht aufgestellten Regel ein Eingeweidewurm seinen Namen niemals von seinem Wirthe tragen darf« (a. a. O. S. 251). Sie wird unter Berücksichtigung der — schliesslich auch von Schneider anerkannten — Thatsache, dass die Sphaerularien erst dann in die Hummeln einwandern, wenn die Arbeiter und Drohnen bereits zu Grunde gegangen sind, durch das Beiwort »cunctatrix« ersetzt. Ich kann dieser weiteren Aenderung ebenso wenig beistimmen, wie der früheren. Die von Rudolphi »mit Recht« getadelte Benennungsweise betrifft meines Wissens nicht die Wirthe der Eingeweidewürmer — Rudolphi selbst hat zahlreiche Arten nach ihren Wohnthieren benannt —, sondern bezieht sich auf die Sitte, Eingeweidewürmer nach Autoren zu nennen, wie es in älterer und neuerer Zeit häufig geschehen ist. Aber gesetzt auch, dass ich in dieser Annahme irrte, so kann doch die Benennung nach dem Wirthe nicht ohne Weiteres für verwerflich gehalten werden, wenigstens nicht so lange, wie man bei frei lebenden Thieren den Specialnamen dem Vaterlande entnimmt, und auch dann noch beibehält, wenn diese anderswo gefunden werden. Unter solchen Umständen sehe ich keine Veranlassung, unsere Sphaerularia bombi anders zu benennen, als Léon Dufour einst es gethan hat.

2) Schneider hielt die jungen Sphaerularien nach Eintritt der Häutung etwa drei Wochen am Leben. A. a. O. S. 249.

3) Ebenso scheint es auch Schneider ergangen zu sein, obwohl derselbe über eine grössere Menge geschlechtsreifer Sphaerularien disponirte.

der zweiten Hälfte des Winters, aus einer Zeit also, die vermuthlich um mehrere Monate später fällt, als die Begattung —, aber ich habe doch mehrfach Sphaerularien gesehen, die erst im Anfange der Schlauchentwicklung standen, sonst aber in ihrem Verhalten von den frei lebenden Weibchen so wenig verschieden waren, dass man daneben wohl auch die Existenz von männlichen Würmern hätte erwarten sollen, falls diese überhaupt ein parasitisches Leben führten. Ebenso hat SCHNEIDER in den durch Cohabitation mit freien Geschlechtsthieren von ihm inficirten Hummeln, die er Ende Octobers, höchstens zwei bis drittehalb Wochen nach der Infection, untersuchte[1]), nur weibliche Sphaerularien vorgefunden. Es ist auch sonst nicht unerhört, dass der Parasitismus einer Thierform auf die Weibchen allein beschränkt bleibt. Nicht bloss, dass die Lebensgeschichte des Sandflohes (Pulex s. Rhynchoprion penetrans) hier als längst bekanntes Analogon sich anziehen lässt, wir werden später in dem so vielfach an Sphaerularia sich anschliessenden und systematisch ihr nicht ferne stehenden Atractonema auch einen Wurm kennen lernen, der sich genau so verhält, wie wir für unsere Sphaerularia es annehmen.

Die Einwanderung selbst geschieht, wie kaum zu bezweifeln ist, sehr bald nach Eintritt der Reife und der Begattung, vermuthlich dann, wenn die Hummeln, wie schon oben bemerkt, an den mit Geschlechtsthieren besetzten Localitäten ihre Winterquartiere aufsuchen. So beweist schon — von der oben angezogenen Beobachtung SCHNEIDER's abgesehen — der Umstand, dass die Reifeperiode unserer Würmer so ziemlich in dieselbe Zeit fällt, in der die neu erbrüteten Königinnen nach kurzem Fluge sich zur Einwinterung anschicken. Im Einzelfalle mögen freilich bei beiden Erscheinungen mancherlei zeitliche Unterschiede obwalten, so dass die Infection das eine Mal früher, das andere Mal später geschieht, doch das kann unser Urtheil um so weniger bestimmen, als die Factoren, die diese Schwankungen bedingen (vornehmlich wohl Temperaturunterschiede), auf den Reifetermin der Würmer voraussichtlich in derselben Weise einwirken, wie auf die Flugzeit der Hummeln.

Ob die Würmer in ihren Wirthen nun sogleich nach der Ein-

1) Vgl. dessen letzte Mittheilungen in den Zoolog. Beiträgen. Bd. I. S. 249.

wanderung ihre Metamorphose beginnen, und diese dann eine bald längere, bald auch kürzere Zeit hindurch fortsetzen, wird vermuthlich von den äusseren Bedingungen abhängen, namentlich wiederum von der Höhe der umgebenden Temperatur. So lange die Hummeln beweglich sind, werden wahrscheinlich auch die jungen Einwanderer in ihrer Entwicklung Fortschritte machen, mehr oder minder langsam und weit, je nach den Umständen. Tritt dann später der Winterschlaf ein, dann wird die Metamorphose unterbrochen, wie das auch sonst bei den Parasiten der Kaltblüter in mehr oder minder augenfälliger Weise der Fall ist[1]). Die Sphaerularien verharren während der ganzen Dauer desselben auf dem Entwicklungszustande, den sie früher erreichten, und setzen ihre Metamorphose erst dann fort, wenn mit dem Herannahen des Frühlings für ihre Träger ein neues Leben anhebt.

Auf diese Weise erklärt es sich denn auch, dass die des Winters gesammelten Hummeln Sphaerularien beherbergen, welche in ihrer Entwickelung nicht weiter fortgeschritten sind, als Schneider es bei den von ihm inficirten Versuchsthieren bereits gegen Ende Octobers beobachtete.

Allerdings ist auch in den gleichzeitig gegrabenen Hummeln der Entwickelungszustand nicht immer derselbe, allein das beweist doch am Ende nicht mehr, als dass in solchen Fällen die Infectionszeit oder auch der Eintritt der winterlichen Ruhe nicht genau übereinstimmten. Trifft man doch nicht selten sogar in derselben Hummel auf Parasiten mit ungleich entwickeltem Schlauche, bisweilen so auffallend von einander verschieden, dass man zur Erklärung auf eine mehrfache, zeitlich verschiedene Infection zurückzuschliessen sich genöthigt sieht. Wo die Unterschiede geringer sind, da erklären sie sich vielleicht weniger durch eine wiederholte Einwanderung, als durch die Verschiedenheiten der individuellen Disposition, die bei unsern Sphaerularien eben so wenig fehlen dürften, wie bei den übrigen Thieren, bei ersteren aber um so merklicher sich geltend machen werden, als die Entwickelung des Schlauches, dessen wechselnde Grösse und Ausbildung jene Unterschiede zumeist bedingt, für gewöhnlich kaum mehr als eine Monatsfrist in Anspruch

1) Vgl. Leuckart, Allgem. Naturgesch. der Parasiten. S. 99.

nimmt. Die Veränderungen, die der Wurm selbst während des parasitischen Lebens erleidet, sind nur wenig auffallend und sämmtlich mit den Vorgängen der Schlauchbildung in innigem Zusammenhange.

Die einzige Veränderung, die man allenfalls unter einem anderen Gesichtspunkte auffassen könnte, betrifft die Grösse des Wurmkörpers, die gegen früher etwas gewachsen ist. Während die oben beschriebenen frei lebenden Weibchen auch im günstigsten Falle nur wenig mehr als 1 mm messen, besitzen die schmarotzenden Sphaerularien durchschnittlich eine Länge von 1,3 mm. Und das schon die jüngsten dieser Würmer, jene sogar, die eben erst ihren Schlauch zu bilden im Begriffe stehen, sonst aber noch unverändert sind. Es liegt natürlich nahe, diese Vergrösserung als die Folge eines Wachsthumes zu deuten. Aber es ist mir zweifelhaft, ob diese Auffassung die richtige ist. Die Vergrösserung betrifft nämlich nicht gleichmässig den gesammten Leib, sondern nur den Mittelkörper, so weit dieser von dem Genitalschlauche, und namentlich dem Uterus, durchzogen wird, wie man in denjenigen Fällen erkennt, in denen der Uterus seine ursprüngliche Lage noch nicht verlassen hat (Fig. 5). In solchen Fällen aber ist der Uterus nicht mehr leer, sondern strotzend mit Sperma gefüllt und der Art gedehnt, dass er nahezu das Doppelte der früheren Länge misst. Wenn man nun annehmen darf, dass der dadurch erzeugte Druck auf den Wurmkörper sich übertragen und auch diesen gedehnt habe, dann möchte die Grössenzunahme vielleicht eher und einfacher als die mechanische Folge der Samenaufnahme bei der Begattung, denn als Ausdruck eines vitalen Vorganges anzusehen sein.

Leider ist es mir nicht gelungen, in meinen Hummeln, auch nicht in denen, die zur Winterszeit (Februar) aus der Erde gegraben waren, jemals eine Sphaerularia in unverändertem Zustande, wie die eben begatteten und eingewanderten Würmer ihn zeigen werden, aufzufinden. Sie waren alle, auch die jüngsten, bereits in das Stadium der Schlauchbildung eingetreten. Aber der anhängende Schlauch war vielfach noch so klein und so wenig entwickelt, dass sich die Bildungsgeschichte desselben von den ersten Anfängen an fast lückenlos verfolgen liess (Fig. 5 und 6).

Schon LUBBOCK hat den Schlauch auf früher Entwicklungsstufe gesehen, zu einer Zeit, in der er nicht grösser war, als der Wurm-

körper, und sogar einen Fall constatirt, in dem derselbe an Grösse dahinter zurückstand. Es war bei einer Hummel, die im Monat März fliegend gefangen wurde. Bei meinen winterlichen Hummeln sind mir solche Fälle ziemlich zahlreich vorgekommen. Aber nur einige wenige Male stiess ich auf Würmer, bei denen der Schlauch erst unvollständig hervorgetreten war. Er erschien in diesem Zustande (Fig. 5) als ein schlanker Zapfen von wechselnder, aber immer nur unbedeutender Länge, der auf der Geschlechtsöffnung aufsass und bei näherer Untersuchung als die durch Umstülpung nach aussen hervortretende Vagina sich zu erkennen gab. Der mit Sperma gefüllte Uterus lag, wie das Ovarium, einstweilen noch im Innern des Wurmkörpers. Derselbe behält auch nach dem Uebertritte in den Schlauch noch einige Zeit hindurch seine ursprüngliche Beschaffenheit, ohne an der Bildung desselben Antheil zu nehmen. Es ist demnach ein Irrthum, wenn Schneider den Sphaerularienschlauch durch Umstülpung des Uterus entstehen lässt[1]). Nicht dieser, sondern die Scheide, und nur die Scheide, ist es, die den Schlauch bildet. Die Bildung des Schlauches repräsentirt also einen Vorgang, den man als »prolapsus vaginae cum utero gravido« bezeichnen könnte.

1) So lesen wir noch in der letzten Mittheilung Schneider's (a. a. O. S. 249), die freilich, wie derselbe bemerkt, schon druckfertig war, bevor ihm meine Beobachtungen zu Händen kamen: »Endlich am 20. October fand ich (in einer der durch mehrwöchentliche Cohabitation mit geschlechtsreifen Sphaerularien inficirten Königinnen) zwischen den Malpighi'schen Schläuchen vier sehr junge Sphaerularien von sehr verschiedener Grösse (? Lt.), sämmtlich mit dem ausgestülpten Uterus. Leider ist derselbe sehr zart, dass ich kein Exemplar erhalten konnte. An dem einen Exemplar, an welchem die Ausstülpung offenbar zuletzt eingetreten war, hatte der Schlauch etwa die Dicke, welche eine reife Sphaerularia noch vor der Ausstülpung besitzt. Die andere stärkste war von einem Viertel der Dicke, welche ein Sphaerularienschlauch im Frühling hat. Eine Sphaerularia ohne Ausstülpung fand ich nicht vor.« — »Eine zweite Königin hatte zwei Sphaerularien im Leibe, welche die gleiche Dicke, wie die stärksten der vorigen Hummel hatten.« Ich habe diese Angaben hier vollständig angezogen, um eine Vergleichung mit meinen Beobachtungen zu ermöglichen. Sie enthalten Alles, was — neben der oben angezogenen älteren Notiz von Lubbock — über die ersten Zustände des Sphaerularienschlauches bekannt ist. Eine eingehendere Darstellung des Befundes wäre jedenfalls erwünscht gewesen, zumal Schneider unter ausdrücklicher Bezugnahme auf denselben behauptet, »das Problem, welches die Entwicklung der Sphaerularia darbot, vollständig gelöst zu haben«.

Die frühesten Zustände fand ich bei einer Sphaerularia, die gegen Ende Februar zur Beobachtung kam und ihre Vagina kaum zur Hälfte umgestülpt hatte. Der Zapfen, den dieselbe bildete, besass (Fig. 5) eine Länge von 0,11 mm und eine Dicke (0,03 mm), welche nur wenig hinter der des Uteruskörpers zurückblieb. Den noch nicht ausgestülpten engeren Theil der Vagina sah man leicht geschlängelt durch die ganze Länge des Zapfens hinziehen und am Grunde desselben in die Leibeshöhle übertreten, um hier mit dem samengefüllten Uterus sich zu verbinden. Die Aussenfläche des Zapfens trug eine einfache Lage ziemlich grosser Kernzellen von 0,01 mm, die aber nach dem Ende zu kleiner wurden und schliesslich in die Epithelbekleidung des innern, von der Zapfenwand umschlossenen Vaginalabschnittes sich fortsetzten. Mit den Wandzellen des späteren Schlauches hatten dieselben einstweilen nicht die geringste Aehnlichlichkeit. Höchstens, dass sie, wie diese, nach Aussen etwas vorsprangen.

An der Anheftungsstelle des Zapfens hingen der äusseren Bekleidung des Wurmes ein Paar unregelmässig geformte dünne Hautlappen an, die sich durch Aussehen und Querstreifung als Ueberreste einer abgestossenen Cuticula zu erkennen gaben. Da ich Gleiches auch bei anderen Sphaerularien mit noch kleinem Schlauche beobachtete, sogar ein Mal das Kopfende eines Wurmes in grösserer Ausdehnung von einer lose anliegenden Cuticularkappe bedeckt sah, kann ich nicht zweifeln, dass unsere Parasiten, wenn sie zur Schlauchbildung sich vorbereiten, einer abermaligen Häutung unterliegen. Es ist also nicht richtig, wenn Schneider die Sphaerularien nur bei der oben beschriebenen Cystenbildung ihre Cuticula abstreifen lässt, und in der Zweizahl dieser Häute einen Beweis für die Richtigkeit seiner (auch sonst nicht überall zutreffenden) Behauptung findet, dass die Nematoden überhaupt nur zwei Mal sich häuteten.

Wie durch die anhängenden Cuticularfetzen, so wird diese nachträgliche Häutung bei den Sphaerularien auch dadurch ausser Zweifel gesetzt, dass die schlauchtragenden Würmer beständig des Rectums entbehren, das, wenn auch vielleicht nicht ganz constant, so doch in manchen Fällen noch bei den freilebenden Weibchen sich nachweisen liess.

Der Innenraum des Zapfens enthält aber nicht bloss das Scheiden-

rohr, so weit dieses sich noch nicht hervorgestülpt hat, sondern daneben noch (Fig. 5) ein zweites cylindrisches Gebilde, dessen anatomisches und histologisches Verhalten sich einstweilen nur unvollständig analysiren lässt. Ueber seine Natur freilich kann kein Zweifel sein. Es ist dasselbe Organ, das später den Fett- oder Zellenkörper des Schlauches darstellt. Gleich diesem lässt es sich schon jetzt durch den ganzen Zapfen hindurch verfolgen. Das Verhalten seiner Enden ist mir nicht klar geworden, doch hat es ganz den Anschein, als wenn das Gebilde an der Ansatzstelle des Zapfens in die Leibeshöhle des Wurmes übertrete und hier dem Darmkanale sich verbinde. Ist diese Auffassung richtig — und das spätere Verhalten spricht durchaus zu ihrem Gunsten — dann entsteht der Fettkörper des Schlauches unter der Form eines Darmfortsatzes. Damit soll übrigens durchaus nicht gesagt sein, dass derselbe nun auch in histologischer Hinsicht vollkommen mit dem übrigen Darme übereinstimmen müsse. Die Zellen, deren Vegetation die Bildung des Fortsatzes bedingen, sind dann freilich die Abkömmlinge von Darmzellen, aber dieser Umstand schliesst doch an sich noch keineswegs die Möglichkeit aus, dass dieselben gleich Anfangs durch gewisse Besonderheiten ausgezeichnet sind.

Was den Uterus unseres Wurmes betrifft, so bildet dieser in Folge seiner Füllung einen weiten Kanal, der sich von der Basis des Zapfens nach vorn bis fast zur Mitte des Körpers hinzieht (Fig. 5). In Wirklichkeit aber ist seine Länge noch beträchtlicher, denn die untere Hälfte verläuft nicht gestreckt, wie die obere, sondern in dichten Spiraltouren, so dass der Wurmleib oberhalb des Anhanges bis auf 0,04 mm aufgetrieben wird und gegen das schlankere Hinterleibsende stark sich absetzt. Das Ovarium ist gegen früher höchstens insofern verändert, als es am oberen Ende des Uterus schlingenförmig sich zusammengelegt hat. In anatomischer und histologischer Beziehung zeigt dasselbe noch genau die früheren Verhältnisse. Nach wie vor erscheint es als ein fadenartig dünner Anhang, der neben dem Darme emporsteigt und mit hellen Eikeimen gefüllt ist.

Das hier geschilderte Stadium, für die richtige Auffassung des Sphaerularienschlauches offenbar das wichtigste, ist mir mit unbedeutenden Modificationen während der Monate Februar und

März[1]) vier Male zu Gesicht bekommen. Die Abweichungen betrafen ausschliesslich die Entwicklung und Grösse des Vorfalls. Am weitesten gingen dieselben bei einem Wurme (Fig. 6), dessen Vagina nahezu vollständig umgestülpt war und einen Anhang von 0,25 mm bildete, welcher einen bereits ziemlich ansehnlichen Theil des Uterus in sich aufgenommen hatte. Nur das äusserste 0,02 mm lange Ende des Schlauches war davon freigeblieben. An Stelle des Uterus enthielt dasselbe den letzten, einstweilen noch nicht umgestülpten Abschnitt des Scheidenkanales. Der zunächst darauf folgende Uterustheil war nur mässig mit Sperma gefüllt und weniger ausgedehnt, als der übrige, weshalb denn auch der Schlauch an seiner basalen Hälfte die grösste Dicke hatte (0,025 mm). Die früher am untern Ende des Fruchthälters vorhandenen Spiralwindungen waren ausgeglichen.

Die hier mitgetheilten Beobachtungen beweisen zur Genüge, nicht bloss, dass es die Scheide ist, die durch ihre Umstülpung den Sphaerularienschlauch liefert, sondern weiter auch, dass die Umstülpung an der Scheidenöffnung beginnt und von da allmählich bis zum Scheidengrunde sich fortsetzt. Natürlich, dass dieser Vorgang eine treibende Kraft voraussetzt, deren Erforschung nothwendig ist, wenn die vor unseren Augen ablaufenden Veränderungen ihre Erklärung finden sollen. Diese Kraft aber kann nur in dem sich verändernden Organe selbst gesucht werden. Sie inhärirt entweder dem oben erwähnten Darmdivertikel, das bei seinem Wachsthume, wie man annehmen könnte, auf die Genitalöffnung drückt und die Umgebung derselben als Locus minoris resistentiae nach aussen hervortreibt, oder der Scheide selbst. Ich nehme kaum Anstand, für die letztere dieser Möglichkeiten mich zu entscheiden, und das um so weniger, als das oben (S. 645 [81]) hervorgehobene Zellenwachsthum meiner Meinung nach ausreicht, den Vorgang der Umstülpung mechanisch zu erklären. Es sind die Zellen des Scheidenepithels, welche dieses

1) Schneider scheint einigen Zweifel in die Angabe zu setzen, dass noch zur Winterszeit so frühe Entwicklungsstadien sich auffinden liessen, da er schon Ende October Sphaerularien »mit umgestülptem Uterus« beobachtet habe. »Falls sich diese Angabe bestätigt« (a. a. O. S. 251), soll sie beweisen, dass die Einwanderung der Sphaerularien noch in später Zeit erfolgen könne. Offenbar, dass Schneider dabei den Einfluss der Winterruhe (S. 642 [78]) unbeachtet gelassen hat.

Wachsthum erleiden, aber nicht von vorn herein, wie wir wissen, die Zellen in ganzer Ausdehnung, sondern zunächst nur diejenigen, welche der Vulva am nächsten stehen. In Folge dieses Wachsthums streckt sich der basale Theil des Scheidenkanales in die Länge und erzeugt dadurch einen Druck, der auf den benachbarten Locus minoris resistentiae sich überträgt und den Rand der Vulva, der nichts anderes ist als das Ende der Scheide, nach aussen hervortreibt. Je mehr das Zellenwachsthum gegen den Scheidengrund fortschreitet, desto weiter wird der Scheidenkanal hervortreten müssen, da die feste Einlagerung des samengefüllten Uterus eine Ausgleichung der Längsstreckung durch Emporrücken im Innern der Leibeshöhle unmöglich macht.

Ist diese Auffassung die richtige, dann erscheint die Bildung des Darmfortsatzes als ein mehr secundärer Vorgang. Er entsteht entweder dadurch, dass die sich umstülpende und immerfort wachsende Scheide den anliegenden Theil des Darmes mechanisch in sich hineinzieht, oder in Folge einer Zellenwucherung, die möglicher Weise durch die topologisch damit zusammenfallende Wachsthumsveränderung der Vaginalzellen veranlasst ist, vielleicht auch sonst damit irgendwie in Zusammenhang steht.

Auf Grund dessen, was wir hier über die erste Bildung und Beschaffenheit des Sphaerularienschlauches dargelegt und schon früher über die definitive Organisation desselben bemerkt haben, hält es nicht eben schwer, die Veränderungen zu übersehen, welche in der nachfolgenden Entwicklungsperiode daran ablaufen. Sie bestehen im Wesentlichen darin, dass die Vagina nach vollständiger Umstülpung rasch um ein Beträchtliches wächst, den Uterus mit dem anhängenden Ovarium aus dem Wurmkörper aufnimmt, seinen Innenraum gegen die Leibeshöhle abkapselt und die auf diese Weise von dem ursprünglichen Träger völlig isolirten Organe zu einer weitern Ausbildung bringt.

Am auffallendsten unter den hier aufgezählten Veränderungen ist das Wachsthum des Schlauches, das fast unerhört genannt zu werden verdient, besonders wenn man berücksichtigt, wie kurz die Zeit ist, die es für sich in Anspruch nimmt. Schläuche von 15 mm Länge und 1 mm Dicke sind schon Ausgang Aprils nichts weniger als selten; sie haben sich also in nur wenigen

Wochen aus einem Zäpfchen entwickelt, das zunächst kaum mehr als 0,25 mm lang war und eine durchschnittliche Dicke von höchstens 0,03 mm besass. In dieser kurzen Zeit hat also das ursprüngliche Volumen sich ungefähr um das 60000fache vergrössert. Und nur der Schlauch ist es, der dieses Wachsthum zeigt, denn der Wurm, der denselben trägt, verändert seine früheren Dimensionen höchstens insofern, als er nach dem Austreten des Generationsapparates zusammenfällt und sich abplattet. Auf diese Weise kommt es denn, dass der Wurm, der von dem ausgewachsenen Schlauche vielleicht 15—20000 Mal an Masse übertroffen wird, immer mehr zurücktritt, je grösser der Schlauch wird (Fig. 13). Und das um so mehr, als auch seine Lebensäusserungen allmählich erlöschen, bis er schliesslich, obwohl in seiner Organisation kaum verändert, wie eine leblose Masse, in Form eines schleifenartig oder auch anders gekrümmten dünnen Fadens, dem Schlauche anhängt. Nicht selten wird derselbe auch, besonders an den grösseren Schläuchen, vollständig vermisst, und das sogar dann, wenn diese mit äusserster Vorsicht aus der Hummel hervorgezogen werden. SCHNEIDER hat freilich gegen diese meine Angabe geltend zu machen versucht, dass ich in solchen Fällen den Wurm übersehen hätte, doch dieser Einwurf ist unrichtig, wie ich, und mit mir eine Anzahl meiner Schüler, nach vielfach wiederholter Prüfung behaupten kann. A priori dürfte sich gegen ein solches Verhalten auch schwer etwas einwenden lassen, da der Wurm für den Schlauch jede Bedeutung verloren hat, sobald dieser seine Eingeweide aufgenommen und gegen seinen Producenten sich abgeschlossen hat. Wachsthum und Entwicklung geht dann ohne alles Zuthun des Wurmes vor sich, so dass es begreiflich ist, wie die ersten Beobachter den Schlauch als ein selbständiges Wesen in Anspruch nehmen konnten. Dass diese Deutung, der auch SCHNEIDER noch in seiner ersten Publication zuneigte, morphologisch und entwicklungsgeschichtlich nicht zu rechtfertigen ist, bedarf nach unsern Darlegungen keiner weitern Begründung. Auch nach der Abtrennung des Wurmes ist der Schlauch, wie bei seiner ersten Bildung, ein Organ des Sphaerularienkörpers, ein Organ aber, das in einen fremden Organismus überpflanzt ist, und nach Art eines künstlich transplantirten Körpertheiles in diesem die Bedingungen seiner Ernährung und Weiterbildung findet. Unfähig eine selbständige Existenz zu führen,

lebt er wie der Wurm, dessen Geschichte er fortsetzt, auf Kosten seines Wirthes, als wenn er dem Organencomplexe des letzteren zugehörte.

Es ist aber nicht blos das Wachsthum des Schlauches, das unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt. Auch sonst sind die Veränderungen, welche die Entwicklung der ersten Anlage begleiten und bedingen, in ihren Einzelheiten vielfach so auffallend und eigenthümlich, dass es zum besseren Verständniss nothwendig sein dürfte, die Bildung des Schlauches auch durch die späteren Phasen hindurch zu verfolgen.

Und somit wenden wir uns denn in unserer Darstellung von den bisher betrachteten Sphaerularien zunächst zu solchen mit eben gebildetem Schlauche, zu Würmern also, bei denen die Vagina vollständig nach Aussen hervorgetreten ist und einen Anhang darstellt, der trotz der inzwischen erfolgten Aufnahme des gesammten Geschlechtsapparates einstweilen noch an Grösse hinter dem Wurmkörper mehr oder minder weit zurücksteht (Fig. 7).

Derartige Sphaerularien hat schon Lubbock (vergl. S. 616 [52]) gesehen, und vermuthlich auch Schneider bei den künstlich von ihm inficirten Hummeln aufgefunden, obwohl derselbe bei seinen Würmern nur die Dicke »des ausgestülpten Uterus« anführt, auffallender Weise aber unterlässt, die Länge zu bestimmen. Mir selbst sind Würmer dieser Entwicklungsstufe ziemlich häufig zu Gesicht gekommen, nicht blos Anfangs, im Februar, sondern auch später, bis zur Mitte März und darüber hinaus, zu einer Zeit, in der die Hummeln schon zu fliegen begonnen hatten. Sie wurden theils, wie die oben beschriebenen jüngeren Formen, frei zwischen den Malpighi'schen Gefässen und den Windungen des davon umsponnenen Darmabschnittes gefunden, theils auch zwischen den Häuten der Darmwand. Letzteres aber bloss an dem zunächst auf die Honigblase folgenden Vorderende des Chylusmagens und stets in höchst charakteristischer Haltung, so dass die Schläuche durch die Maschen des Muskelhaut frei in die Leibeshöhle hineinhingen, während die Würmer unter derselben versteckt waren. Durch den Schlauch fixirt, schienen letztere trotz der im Ganzen freilich nur wenig lebhaften schlängelnden Bewegung besonders des längeren Vorderkörpers ausser Stande, ihren Standort zu wechseln.

Das Aussehen, welches der mit Würmern besetzte Darm darbot, war besonders dann sehr auffallend, wenn die Schläuche in mehrfacher Anzahl neben einander vorkamen und bereits so weit hervorgewachsen waren, dass sie in Form von dicken Zotten millimeterlang und darüber nach Aussen hervorragten (Fig. 8). Schläuche von mehr als 2,5 mm Länge wurden übrigens niemals mehr an der Darmwand vorgefunden. Kein Zweifel also, dass dieselben schliesslich frei werden, sei es nun, dass der Wurm, der noch eine Zeit lang, wenngleich mit stets abnehmender Energie, beweglich bleibt, die Darmwand verlässt, oder, was mir nicht unwahrscheinlich dünkt, von dem Schlauche sich abtrennt. Vielleicht findet in diesem letzteren Vorgang die Thatsache ihre Erklärung, dass manche Schläuche, wie das oben erwähnt ist, des Wurmes entbehren. Und nicht blos grössere Schläuche sind es, die sich also verhalten; ich habe den Wurm gelegentlich schon an Schläuchen von erst wenigen Millimetern vermisst.

Obwohl es mir niemals gelungen ist, Sphaerularien bei den Hummeln im Innenraum des Darmes selbst zu sehen, so liegt es doch nahe, das eben geschilderte Vorkommen mit der Einwanderung der Parasiten in Beziehung zu setzen, und daraufhin die Annahme zu gründen, dass es die Mundöffnung sei, durch welche dieselben ihre spätere Wohnstätte aufsuchen. Ebenso wenig kann man sich der Vermuthung entschlagen, dass die Wachsthumsrichtung des Schlauches in derselben Weise, wie bei den Pflanzen die der Wurzeln, durch die Beziehung zu der Nahrungsquelle, hier also der blutführenden Leibeshöhle, bedingt sei.

Die jüngsten Schläuche dieser Art, die ich beobachtete (Fig. 7), besassen eine Länge von nahezu 0,6 mm, waren also halb so lang, als der Wurmkörper, den sie an Dicke (0,045 mm) übertrafen, zumal dieser durch Abgabe des Genitaltractus den früheren Durchmesser bis auf 0,032 mm verkleinert hatte.

Dass die Beschaffenheit der Schlauchwand eine besonders zarte sei, wie SCHNEIDER für seine Fälle angiebt, kann ich nicht finden, ich möchte dieselbe viel eher als derb und kräftig bezeichnen. Allerdings trennt sich der eben gebildete Schlauch bei mechanischer Behandlung gar leicht von seinem Wurme, allein das erklärt sich zur Genüge dadurch, dass die Verbindung mit demselben durch einen

Strang vermittelt wird, der kaum den dritten Theil des Wurmdurchmessers übertrifft und Wandungen hat, die an Dicke beträchtlich hinter denen des Schlauches zurückstehen.

Die letzteren tragen histologisch einen noch durchaus epithelialen Charakter. Sie bestehen aus Zellen von etwa 0,013 mm, die in einfacher Lage einer zarten Tunica propria aufliegen und halbkugelförmig vorspringen, so dass die Oberfläche des Schlauches jetzt noch weit mehr als früher ein höckriges Aussehen hat (Fig. 7). Der bläschenförmige helle Kern (0,005 mm) enthält einen scharf gezeichneten Nucleolus, der eben so chromatophil ist, wie das feinkörnige Protoplasma des Zelleninhalts. Bei Zusatz von Carminlösung (ammoniakalischem Carmin oder Boraxcarmin) nimmt der Schlauch deshalb auch rasch eine tiefrothe Farbe an, die um so mehr auffällt, als der Wurm, der ihn trägt, vollständig hell bleibt. Gegen das abgerundete freie Ende hin nimmt die Grösse der Zellen um Einiges ab, wie denn auch der Durchmesser des Schlauches hier hinter dem des Wurzelendes bisweilen zurückbleibt.

Schon bei einer früheren Gelegenheit ist bemerkt worden, dass Schneider durch die vermeintliche Aehnlichkeit dieses Zellenbelags mit dem Uterusepithel gewisser Nematoden in der Annahme bestärkt ist, dass der Schlauch einem umgestülpten Fruchthälter entspreche. Was ich auf Grund directer Beobachtungen über die erste Bildung des Schlauches oben mitgetheilt habe, dürfte die Unhaltbarkeit dieser Angabe zur Genüge nachgewiesen haben. Wenn ich trotzdem nochmals darauf zurückkomme, dann geschieht solches, um daran die Bemerkung zu knüpfen, dass die Aehnlichkeit dieser zwei Zellenformen keineswegs so gross ist, wie man nach Schneider's Bemerkung vermuthen könnte. Und das um so weniger, als die Zellen des ausgewachsenen Schlauches — und diese, nicht die Zellen des eben erst gebildeten Anhanges, hat Schneider seinem Vergleiche zu Grunde gelegt — die für die Zusammenstellung mit den Uteruszellen so massgebende beträchtliche Grösse erst im Laufe der weitern Entwicklung erreichen. Anfangs, so lange die Zellen der noch nicht vorgetretenen Scheide angehören, sind dieselben so klein, dass Niemand bei ihrer Betrachtung an die Uteruszellen etwa einer Ascaris denken würde. Später ändern sich allerdings die Verhältnisse dadurch, dass die Zellen immerfort und in immer auffallenderer Weise

wachsen (Fig. 12, 13). Die morphologische Natur des Schlauches ist für dieses Wachsthum in keinerlei Weise maassgebend. Viel näher liegt es, darin den Ausdruck einer Anpassung an die eigenthümlichen Verhältnisse zu vermuthen, unter welchen der Schlauch existirt und die eingeschlossenen Geschlechtsorgane mit dem nöthigen Bildungsmaterial zu versorgen hat.

Dieses Zellenwachsthum ist so beträchtlich, als die gewaltige Grössenzunahme des Schlauches, die wir ziffermässig oben festgestellt haben, ausschliesslich auf dasselbe zurückzuführen ist. Schläuche von anderthalb Centimeter Länge und darüber — ich habe Schläuche von 18 mm gesehen[1]) — besitzen in ihrer Wand nicht mehr und nicht weniger Zellen, wie solche von 0,6 mm. In beiden zählt man deren, wenn auch mit mancherlei individuellen Schwankungen, etwa 600—650. Sie stehen alternirend, wie man deutlich sieht, sobald die Schläuche nur einigermassen herangewachsen sind, in 60—70 Querreihen, je mit etwa 8—10 Zellen (Fig. 12), nur dass diese Zellen in den reifen Schläuchen 0,3 mm und selbst darüber messen, während sie in solchen von 0,6 mm wenig mehr als 0,01 mm gross sind.

Es dürfte nur wenige thierische Gebilde geben, deren Wachsthum in gleich ausschliesslicher Weise durch die Vergrösserung ihrer Zellen vermittelt wird.

Dass die Vermuthung, es möchte, wie das spätere Wachsthum, so auch die erste Bildung des Schlauches eine directe Folge des Zellenwachsthums sein, unter solchen Umständen eine neue Stütze gewinnt, braucht kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden.

Doch kehren wir nach dieser dem Spätern vorgreifenden Bemerkung wieder zu unseren jungen Sphaerularien zurück. Was dieselben vor den früheren Zuständen auszeichnet, ist eigentlich weniger die Grösse des Schlauches, als die Thatsache, dass, wie schon erwähnt, der früher noch im Innern des Wurmkörpers befindliche Theil des Genitalschlauches, Uterus und Ovarium[2]), jetzt in die

1) Andererseits sind mir auch völlig reife Schläuche von nur 1 cm vorgekommen.

2) Es war ein Irrthum, wenn ich das Ovarium noch bei Sphaerularien mit einem 3 mm langen Schlauche im Innern des Wurmkörpers gefunden zu haben vermeinte (Zool. Anz. a. a. O. S. 276).

schlauchartig ausgewachsene Vagina vollständig übergetreten ist (Fig. 7). Sonst sind diese Organe, zunächst wenigstens, in keinerlei Weise verändert, es müsste denn sein, dass der Uterus einen mehr gestreckten Verlauf hat und deshalb länger erscheint, als dies früher der Fall war. Als einen 0,02 mm weiten Kanal sieht man ihn die ganze Länge des Schlauches durchsetzen und am äussersten Ende desselben durch eine enge Oeffnung ausmünden. Da er in ganzer Ausdehnung mit Sperma gefüllt ist, hat er eine völlig undurchsichtige Beschaffenheit, so dass er auf den ersten Blick in's Auge fällt. Die Zellen, welche ihn auskleiden, sind kleiner, als die Wandzellen des Schlauches, so dass die Abgrenzung beider Gebilde, trotz ihres continuirlichen Zusammenhanges, keine Schwierigkeiten macht. Der etwas verdünnte hintere Abschnitt des Uterus macht im Gegensatze zu dem fast gestreckten Vordertheile einige leichte Windungen, und geht dann, in einiger Entfernung von der Ansatzstelle des Schlauches, in das fadenförmig verengte Ovarium über, das geschlängelt eine kurze Strecke den Verlauf des Uterus nach hinten fortsetzt, dann aber nach vorne umbiegt und bald darauf endigt. Die Gesammtlänge des Uterus mag bei Würmern mit 0,6 mm langem Schlauche etwa gleichfalls 0,6 mm betragen, während das Ovarium einstweilen kaum mehr als 0,25 mm misst.

Da der Innenraum des Schlauches, der diesen Genitalapparat einschliesst, trotz der bauchigen Beschaffenheit der Wandzellen einen grösseren Durchmesser besitzt, als der Uterus, so würde ersterer nur unvollständig gefüllt sein, wenn nicht der schon oben erwähnte sog. Fettkörper, dessen Bildung an die ersten Zustände der vorfallenden Scheide anknüpft, inzwischen zu einer grösseren Entwicklung gekommen wäre. Als eine strangförmige Masse, weit heller, als der samenhaltige Uterus und von geringerer Festigkeit, sieht man ihn (Fig. 7) durch die ganze Lange des Schlauches hinziehen und den Raum füllen, den der Genitalkanal übrig lässt. Gelingt es, den Strang zu isoliren, dann erkennt man in ihm eine Doppelreihe länglicher Zellen von etwa 0,04 mm, die je eine grössere Anzahl bläschenförmiger kleiner Kerne (0,003 mm), ähnlich denen der Schlauchzellen, in sich einschliessen. Dass dieser Zellenstrang nach wie vor dem Darmkanale anhängt, wird durch geeignete Präparate (Fig. 11) ausser Zweifel gesetzt. Auf den ersten Blick wird man freilich anders ur-

theilen, theils, weil die Zellen des Fettkörpers beträchtlich von den Darmzellen abweichen, theils auch, weil der Darm selbst inzwischen ein mehrfach abweichendes Verhalten angenommen hat. In Folge offenbar der Divertikelbildung ist derselbe nämlich einer rückschreitenden Metamorphose anheimgefallen. Er ist nicht bloss stark, wenn auch nicht überall gleichmässig, geschrumpft, sondern hat vielfach auch den früheren Zellenbau verloren, so dass er kaum mehr als ein mit Körnchen und Fettballen gefülltes dünnhäutiges Rohr darstellt, dessen Wand nichts anderes ist, als die frühere Tunica propria. Durch diese Rückbildung des Darmes aber haben nun die Seitenfelder Raum für eine weitere Entfaltung gewonnen. Schon früher von ansehnlicher Grösse, sind sie jetzt (Fig. 11) zu zwei weiten Röhren geworden, die um so stärker in die Leibeshöhle hinein vorspringen, je mehr der Darm zusammenschrumpft. Wenn letzterer, wie es in späterer Zeit gelegentlich geschieht, bis auf den Vordertheil schwindet, dann füllen die Seitenschläuche sogar den ganzen Innenraum des Wurmkörpers. Da dieselben zahlreiche grosse Zellen in sich einschliessen, diese auch in der Nähe des dem Wurmkörper anhängenden Genitalschlauches meist in grösserer Menge hinter einander liegen, kann man leicht in Versuchung kommen, letztere mit den Elementen des Fettkörpers in eine genetische Beziehung zu bringen. Ich selbst war einige Zeit hindurch einer derartigen Annahme zugeneigt, habe mich aber schliesslich mit aller Bestimmtheit davon überzeugt, dass die Seitenfelder mit dem Schlauche und dessen Organen[1]) in keinerlei Zusammenhange stehen und ihren Verlauf ohne irgend welche Unterbrechung und Ablenkung über die Ansatzstelle desselben bis in die Schwanzspitze hinein fortsetzen. Anders, wie gesagt, der Darm, der dem Stiele des Schlauches gegenüber sich einknickt und eine Ausbuchtung bildet, die in den Stiel hinein sich verfolgen lässt (Fig. 11).

Das über dieses Divertikel nach hinten in den Schwanztheil des

1) Ich erwähne solches nicht bloss in Betreff des sog. Fettkörpers, sondern auch deshalb, weil ich die Seitenfelder Anfangs, als ich den Bau der Sphaerularien an Querschnitten noch nicht studirt hatte, mit Verkennung ihrer wahren Natur für das noch im Innern des Wurmkörpers zurückgebliebene und schlingenartig ausgewachsene Ovarium hielt. (Vergl. S. 653 [89] Anm.)

Wurmkörpers hinein sich fortsetzende Endstück des Darmes hat in der Regel eine nur unbedeutende Länge. Da mit dem Rectum zugleich die Fixation desselben hinweggefallen ist, so liegt es völlig frei im Innern der Leibeshöhle. Später geht es gänzlich zu Grunde.

Doch es ist weniger dieses Endstück des Darmes, das unsere Aufmerksamkeit in Anspruch nimmt, als vielmehr der zapfenförmige Fortsatz, welcher in den Stiel des Schlauches eintritt und schliesslich, wie oben behauptet wurde, mit dem Fettkörper, der den letzteren durchzieht, in Verbindung steht. Damit soll jedoch nicht gesagt sein, dass der Fettkörper ohne Weiteres in den Darm hinein sich fortsetze. Die Beziehungen beider Gebilde sind, mögen sie auch genetisch in dieser Weise aufzufassen sein, doch weniger directe, wie schon aus den Unterschieden hervorgeht, die in histologischer Hinsicht zwischen ihnen obwalten. Dazu kommt, dass der Innenraum des Schlauches mit der Leibeshöhle des Wurmes nicht mehr, wie früher, in offener Verbindung steht, sondern davon abgetrennt ist. Dieser Abschluss wird durch einen Zellenpfropf gebildet, der, wie er seitlich mit den basalen Schlauchzellen sich verbindet, um die Oeffnung zu füllen, die sonst zwischen denselben bleiben würde, so auch in longitudinaler Richtung sowohl mit dem Fettkörper, wie mit dem Darme in Zusammenhang tritt, als Bindeglied zwischen beide sich einschiebend (Fig. 11).

Dass dieser Pfropf bereits auf dem hier vorliegenden Entwicklungsstadium existirt, davon habe ich mich mit aller Bestimmtheit überzeugen können. Er besitzt im Wesentlichen auch schon die spätere histologische Bildung. Aber eine nähere Untersuchung wird erst möglich, wenn der Schlauch um Einiges gewachsen ist und die Möglichkeit einer mikrotomischen Behandlung bietet.

In Schläuchen von etwa 1 mm Länge besitzt dieser Pfropf einen Querdurchmesser von nahezu 0,035 mm. Ebenso der Fettkörper, in welchen der Pfropf sich fortsetzt, während der Schlauch selbst ungefähr das Doppelte misst. Gegen die anliegenden Wandzellen ist derselbe ziemlich scharf abgesetzt. Ein Vorsprung, der nach Aussen sich erhebt und etwa den halben Durchmesser hat, dient zur Verbindung mit dem Wurme; er ist der schon oben mehrfach erwähnte zapfenförmige Darmfortsatz.

Nicht selten ragt auch die Innenfläche des Pfropfes, der in den

Fettkörper sich fortsetzt, buckelförmig eine kleine Strecke weit in die Schlauchhöhle hinein.

Die ganze Masse dieses Pfropfes nun besteht (Fig. 11) aus dicht gedrängten, plasmareichen Zellen, die gegen den Fettkörper hin etwa 0,02 mm gross sind, nach aussen aber kaum den halben Durchmesser haben. Ihre wichtigste Auszeichnung besteht in der Anwesenheit einer grössern Menge von Kernen, die freilich eine nur unbedeutende Grösse besitzen, kaum jemals mehr als 0,005—0,007 mm messen, aber deutlich bläschenförmig sind und je ein äusserst kleines Chromatinkorn als Nucleolus in sich einschliessen. Die Zahl der Kerne steigt in den grössern Zellen auf 8 bis 10 und noch mehr, während die kleineren deren eine geringere Menge enthalten. Das Protoplasma ist feinkörnig und lässt sich leicht mit Färbeflüssigkeiten imprägniren.

Es sind aber nicht bloss die Zellen des Pfropfes, die durch die Anwesenheit einer grössern Menge bläschenförmiger Kerne sich auszeichnen. Auch der Fettkörper, welcher dem Propfe aufsitzt, wird von vielkernigen Zellen gebildet[1]), wie das schon oben (S. 617 [53]) gelegentlich bemerkt ist. Die Kerne sind bläschenförmig, wie die des Pfropfes, und im Innern mit einem Chromatinkorne versehen. In anderer Hinsicht aber sind die Zellen auffallend von denen des Pfropfes verschieden. Nicht blos dadurch, dass sie meistens in zwei Reihen nebeneinander liegen, sondern mehr noch durch ihre beträchtliche Grösse und ihr Aussehen.

Schon bei Schläuchen von kaum 1 mm stösst man im Fettkörper auf Zellen, die bei einer Breite von 0,03 mm bis zu 0,15 mm lang sind. Allerdings haben nicht alle Zellen diese Grösse, denn manche messen nicht mehr als 0,08 mm und selbst weniger. Grosse und kleine Zellen folgen ohne alle Regelmässigkeit auf einander, und zwar in beiden Reihen, so dass die Zellenköpfe bald in denselben Querschnitt fallen, bald auch — und so verhält es sich gewöhnlich — ungleich hoch liegen. In der Regel sind die Enden abgerundet,

1) Schon LUBBOCK hat diese Kerne gesehen, sie aber eben so wenig ihrer wahren Natur nach erkannt, wie die Zellen, welche dieselben einschliessen. SCHNEIDER zeichnet die Zellen (in einer freilich nur schematischen Abbildung) irrthümlicher Weise als einkernig.

nicht selten auch zipfelförmig ausgezogen und gelegentlich selbst durch grössere oder kleinere Abstände getrennt, so dass der Fettkörper streckenweise von nur einer einzigen Zelle gebildet wird. Die Gesammtzahl der Zellen mag im Durchschnitt für jede Reihe des Fettkörpers etwa 10 betragen.

Die Kerne, die, wie in den Pfropfzellen, gewöhnlich zu 8—10 in diesen Zellen enthalten sind, zeichnen sich gleichfalls durch ihre Grösse aus. Sie messen durchschnittlich etwa 0,09 mm, sind aber auch gelegentlich um die Hälfte kleiner. Das Chromatinkorn im Innern nimmt oft nur den zehnten Theil des Durchmessers in Anspruch. Die Gruppirung der Kerne wechselt, indem letztere bald einander angenähert sind, bald auch in grössern Abständen liegen. Nicht selten sieht man sie in inniger Berührung mit der derben und scharf gezeichneten Zellhaut.

Das helle Aussehen, welches der Inhalt dieser Fettzellen besitzt, rührt von zahllosen Tröpfchen her, die in das feinkörnige Protoplasma eingelagert sind und dieses nach allen Richtungen durchsetzen.

Bei der unverkennbaren Aehnlichkeit, die trotz der Unterschiede in Grösse und Aussehen zwischen den schlauchartig gestalteten Zellen des Fettkörpers und denen des Pfropfes obwaltet (Fig. 11), könnte man leicht auf die Vermuthung kommen, dass letztere sich allmählich in die ersteren umwandelten, der Pfropf also gewissermassen die Wachsthumszone des Fettkörpers darstelle. Nichtsdestoweniger aber würde eine solche Auffassung nicht das Richtige treffen. Nicht bloss, dass keinerlei Uebergangsformen zwischen den Zellen des Pfropfes und des Fettkörpers existiren, — wenigstens dann nicht mehr, wenn beide differenzirt sind — es bekommt auch die Zahl der Fettzellen keinen weiteren Zuwachs, wie es doch der Fall sein müsste, wenn letztere immerfort sich ergänzten. Allerdings hält das Wachsthum des Fettkörpers gleichen Schritt mit dem des Schlauches, es steigt also die Länge desselben allmählich auf 15 mm und noch mehr, allein dieses enorme Wachsthum resultirt eben so ausschliesslich, wie das des Schlauches, aus der Grössenzunahme der Zellen, die so beträchtlich ist, dass einzelne derselben im Laufe der Zeit die seltene Länge von 2 und 3 mm erreichen. Begreiflich unter solchen Umständen, dass Lubbock, dem wir die erste genauere Darstellung des

Fettkörpers verdanken [1]), die wahre Natur dieser Zellen verkannte und sie mit v. SIEBOLD als Schläuche in Anspruch nahm.

Obwohl ich hiernach dem basalen Pfropfe des Fettkörpers die Bedeutung einer Wachsthumszone absprechen muss, möchte ich doch keineswegs behaupten, dass derselbe für die Entwicklung des letzteren bedeutungslos sei. Ich bezweifle vielmehr keinen Augenblick, dass der Zellenkörper bei seiner ersten Bildung, zur Zeit also, in welcher die Vagina sich umstülpte, ganz die Beschaffenheit des Pfropfes hatte und erst durch Wachsthum und Weiterentwicklung der in den Innenraum frei hineinragenden Zellen seine spätere Beschaffenheit annahm. Was nach dem Auswachsen dieser Zellen von der ursprünglich gleichartigen Anlage übrig blieb, das repräsentirt nun den oben beschriebenen Pfropf, ein Gebilde also, das nach der Entwicklung des Schlauches und der Differenzirung des Fettkörpers nur noch in rudimentärer Form existirt und keine anderen Functionen hat, als die eines Schluss- und Fixationsapparates.

Das gegenüberliegende terminale Ende des Fettkörpers entbehrt eines specifischen Haftapparates. Allerdings ist es nicht lose im Innern des Schlauches gelegen, sondern fest an das zunächst auf die Genitalöffnung folgende Endstück des Uterus angeheftet, aber die Befestigung wird nur dadurch vermittelt, dass der Fettkörper mitsammt dem Genitalapparate, die beide den ganzen Inhalt des Schlauches ausmachen, in eine gemeinschaftliche dünne und structurlose Umhüllungshaut eingelagert sind (Fig. 10). Diese Hüllhaut aber ist nichts anderes, als die frühere Tunica propria der Vaginalwand, jene Haut also, welche ursprünglich das Scheidenepithel trug und auch jetzt noch unter den Schlauchzellen hinzieht, die aus letzterem hervorgegangen sind. So weit der Innenraum des Schlauches von seinem Inhalt vollständig ausgefüllt wird, steht diese Hüllhaut (Fig. 9) mit den aufliegenden Zellen in dichtem Zusammenhange. Wenn aber der Querschnitt des Schlauches allmählich zunimmt, dann wird dieser Zusammenhang gelockert. Die Membrana basilaris hebt sich dann in immer grösserem Umfange von der zelligen Schlauchwand

1) SCHNEIDER betrachtetete den Fettkörper einfach als »einen Ast oder eine Schlinge« des Wurmdarmes, als ein Gebilde also, welches in seinem histologischen Bau mit letzterem übereinstimmen würde.

ab, indem eine helle Flüssigkeit zwischen beiden sich ansammelt. Die Beziehungen zu den im Innern enthaltenen Organen, die nicht in gleichem Maasse wie der Schlauch an Dicke zunehmen, werden durch diese Ablösung in keiner Weise alterirt. Und so kommt es denn, dass sich die frühere Unterhaut des Schlauches in eine Art Peritoneum umwandelt, das die Eingeweide umschliesst und zu einer Masse vereinigt, welche in Gestalt eines Axenstranges durch den Innenraum des Schlauches hinzieht (Fig. 12).

Diese Umwandlung beginnt schon in Schläuchen von 0,6 mm, und macht später noch weitere Fortschritte. Trotzdem aber ist die Lösung von der Schlauchwand nicht immer eine ganz vollständige, indem der Eingeweidestrang öfters in mehr oder minder grosser Ausdehnung, am häufigsten vorn, in der Nähe der Geschlechtsöffnung, der Länge nach durch eine Art Mesenterium der Schlauchwand verbunden bleibt.

Dass der Genitalkanal im Innern dieses Stranges eine überall wandständige Lage hat, also zur Seite des Fettkörpers unterhalb der structurlosen Hüllhaut hinzieht (Fig. 10), ist die Folge des Umstandes, dass er ein genetisch durchaus selbständiges Gebilde darstellt. Seine Beziehungen zu dem Fettkörper sind nur topologischer Art, dadurch bedingt, dass beide den Schlauch der Länge nach durchsetzen, und beide von derselben Hüllhaut umschlossen werden. Später tritt allerdings in den gegenseitigen Lagenverhältnissen dieser Organe eine Aenderung ein, und zwar dadurch, dass der Genitalkanal bei Annäherung der Legeperiode weit stärker und schneller wächst, als es vorher der Fall war, und den Fettkörper weit hinter sich zurücklässt.

Einstweilen aber sind die Grössenverhältnisse der beiden Organe noch ziemlich gleichmässig. Allerdings ist der Genitalkanal gegen früher schon merklich gewachsen, einstweilen aber noch nicht in einem solchen Maasse, dass seine Beziehungen zu dem Fettkörper und der knapp anliegenden Schlauchhaut dadurch merklich verändert würden (Fig. 7).

Wenn die Schläuche etwa 1 mm lang sind oder etwas darüber, misst der Genitalkanal im Ganzen etwa 1,6 mm, ungefähr das Doppelte der ursprünglichen Länge. Obwohl er nahezu um ein Drittheil länger ist, als der Fettkörper, genügen doch schon einige wenige

Windungen, die Unterschiede auszugleichen. Dass es vornehmlich das Ovarialende ist, welches diese Windungen macht, erklärt sich dadurch, dass dasselbe wegen seiner geringern Dicke krümmfähiger ist als der Uterintheil, der einen ziemlich gestreckten Verlauf einhält, und sich als ein Kanal von 0,025 mm durchschnittlicher Dicke von der das freie Ende des Schlauches einnehmenden Geschlechtsöffnung bis in die Nähe des Wurmkörpers verfolgen lässt. Hier geht er allmählich sich verjüngend in den fadenförmig dünnen Ovarialtheil über, der schon in kurzer Entfernung von seiner Ursprungsstelle schlingenförmig umbiegt und mehrfach gewunden, wie schon oben bemerkt, bis vielleicht zur Mitte des Schlauches wieder emporsteigt. An Länge dürfte dieser Endfaden dem Uterus so ziemlich gleich sein.

Der Innenraum des Uterus ist nach wie vor, nur weniger dicht als früher, mit Sperma gefüllt. Nur das vordere Ende, das zunächst auf die Geschlechtsöffnung folgt, erscheint beständig samenleer. Es ist auch anatomisch und histologisch in mehrfacher Hinsicht abweichend, nicht blos dünner, als der übrige Uterus, sondern auch enger, da die Epithelzellen, die das Lumen auskleiden, buckelförmig in dasselbe hinein vorspringen. In der Regel liegen diese Zellen zu vier oder fünf auf demselben Querschnitte neben einander. Grösser als die übrigen Zellen des Uterus (0,009 mm), erinnern sie durch ihre Form, wie durch die blasenartige Beschaffenheit ihres Kernes und den Besitz eines scharf gezeichneten Nucleolus an die Wandzellen des Schlauches, nur dass sie immer noch beträchtlich kleiner sind, als diese, und ein weniger chromatophiles Protoplasma enthalten. Am grössten ist diese Aehnlichkeit bei den allervordersten Zellen, die zur Bildung eines conischen Zapfens zusammentreten, mittels dessen der Uterus in die Schlauchwand sich einsenkt. Sie ist um so auffallender, als die im Umkreise der Geschlechtsöffnung gruppirten drei oder vier Schlauchzellen an Grösse merklich hinter den übrigen zurückstehen — freilich noch immer nicht so weit, dass die Unterschiede, die zwischen ihnen und den uterinen Endzellen obwalten, völlig ausgeglichen würden.

Nach innen setzt sich dieser Endzapfen übrigens nicht direct in die vorher erwähnten bauchig aufgetriebenen Uterinzellen fort. Zwischen beide schiebt sich vielmehr eine schmale aus nur wenigen Querreihen kleiner Zellen gebildete Zone ein. Die Zellen machen

den Eindruck, als wenn sie einem lebhaften Theilungsprocesse ihren Ursprung verdankten. Da nun der im Innern angehäufte Samenvorrath mit dem Auswachsen des Uterus immer weiter nach hinten rückt, es also den Anschein hat, als wenn es vornehmlich der vordere Theil des Geschlechtskanales sei, der durch sein Wachsthum die Längenzunahme bedinge, könnte man die betreffende Zone in der That leicht für eine Wachsthumszone halten. Aber die nähere Untersuchung spricht kaum zu Gunsten dieser Vermuthung. Denn nicht bloss, dass die Zellen keinerlei Merkmale besitzen, die auf Theilungsvorgänge hindeuten, auch nirgends Uebergangsformen zu den nachfolgenden Epithelzellen vorkommen, man gewinnt auch bald die Ueberzeugung, dass der Uterus zu seinem Längenwachsthume eben so wenig, wie der Schlauch und der Fettkörper, der Zufügung neuer Elemente bedarf, da die platten Epithelzellen, welche seinen Innenraum bekleiden, ihre ursprünglich rundliche Form und ihre Kleinheit immer mehr verlieren unb schliesslich zu grossen rautenförmigen Platten werden, lang genug, den Uterus um ein Vielfaches wachsen zu lassen. Einstweilen freilich zeigen die Zellen des Uterusepithels eine noch ziemlich indifferente Form und eine geringe Grösse.

Was wir über den Wachsthumsmechanismus des Fruchthälters hier gesagt haben, gilt übrigens zunächst nur für den Haupttheil dieses Gebildes. Hinten, wo derselbe allmählich sich verjüngend in den Endfaden übergeht, gestalten die Verhältnisse sich anders. Nicht nur, dass letzterer weit stärker wächst, als der Uterus — er wird im Laufe der Zeit, wie wir später sehen werden, zu dem weitaus längsten Abschnitte des Genitalkanales — es schiebt sich an dieser Stelle auch zwischen das primitive Ovarium, welches allein den Endfaden bildete, und den Uterus, in den dasselbe Anfangs einmündete, noch ein eigener röhrenförmiger Leitungsapparat ein, ein Gebilde, das nach der Beschaffenheit seiner histologischen Elemente das Product einer vollständigen Neubildung darstellt.

Schon auf der hier vorliegenden Entwicklungsstufe sind diese beiden Theile deutlich unterschieden, obwohl sie ihre definitive Ausbildung noch lange nicht erreicht haben. Es gilt das namentlich für das Ovarium, das reichlich die Hälfte des Endfadens misst und durch die dicht im Innern zusammengedrängten Eikeime zur Genüge

charakterisirt ist. Letztere erscheinen, wie früher, als hüllenlose helle Zellen mit bläschenförmigem grossen Kerne und scharf gezeichnetem Kernkörperchen. Sie füllen das ganze Lumen der Ovarialröhre und messen gegen den Eileiter hin, wo diese ihre grösste Dicke erreicht (0,02 mm), bis zu 0,007 mm. Eine Rhachis ist einstweilen noch nicht vorhanden. Der Eileiter ist dünner, als das Ovarium, und ohne Eikeime, besitzt aber dafür einen Epithelbelag von äusserst kleinen Zellen, die höchstens 0,001 mm gross sind. Nach aussen zu gehen dieselben allmählich in die Zellen des Uterusepithels über, die ihre Grösse in dem Endstücke bis auf 0,002 mm (und noch weniger) reducirt haben.

So weit der Uterus mit Sperma gefüllt ist, sind seine Zellen stark abgeplattet, so dass man ihre Anwesenheit zumeist nur an den etwas vorspringenden Kernen zu erkennen vermag. Muskelfasern sind nirgends mit Bestimmtheit nachzuweisen; es hat den Anschein, als wenn die Wand, von dem Zellenbelag abgesehen, einstweilen nur durch eine structurlose Membrana propria gebildet werde.

Was die histologische Bildung des Sphaerularienschlauches selbst betrifft, so ist zu bemerken, dass die Wand desselben nach wie vor aus einer einfachen Lage von Zellen besteht, nur dass diese, wie schon oben bemerkt, der Grössenzunahme des Schlauches entsprechend, inzwischen nicht unbeträchtlich gewachsen sind. In Schläuchen von etwa 1 mm Länge messen dieselben durchschnittlich 0,035 mm, bald etwas weniger, bald auch mehr, hier und da bis 0,04 mm. Sie besitzen eine nicht unbedeutende Dicke (0,008 mm), und sind mit ihren Seitenrändern ziemlich regelmässig zu sechseckigen Plättchen an einander gefügt. Die Aussenfläche ist mehr oder minder buckelförmig vorgewölbt. Im Innern enthalten die Zellen eine reiche Masse feinkörnigen Protoplasmas von stark chromatophiler Beschaffenheit, eine Substanz, die mit wesentlich denselben Eigenschaften, nur minder massenhaft, auch in den grossen bläschenförmigen Kernen (0,012—0,015 mm) gefunden wird. Nicht minder chromatophil ist der Nucleolus, der als ein solides Gebilde mit scharf gezeichneten, aber nicht immer ganz regelmässigen Contouren in das Kernplasma eingelagert ist.

Die Zellwand hat besonders in dem nach aussen gekehrten Segmente eine beträchtliche Dicke, besitzt aber an der Innenfläche keine

ebene Begrenzung, sondern zahllose äusserst kleine Hervorragungen, durch Zwischenräume abgegrenzt, die im Laufe der spätern Zeit zu deutlichen Porenkanälen werden.

Mit dem voranstehend geschilderten Stadium hat die Entwicklung des Sphaerularienschlauches im Wesentlichen ihren Abschluss gefunden. Die Veränderungen, welche später noch stattfinden, betreffen nur das Wachsthum und die weitere Ausbildung seiner einzelnen Theile, besonders des Geschlechtsapparates. Sie äussern sich zunächst und in augenfälligster Weise am Schlauche selbst, der rasch um ein Bedeutendes an Grösse zunimmt und den Wurm immer mehr in den Hintergrund drängt. Kaum vier Wochen nach Beendigung des Winterschlafes, schon in der zweiten Hälfte des Monats April, stösst man gelegentlich auf Hummeln, die nicht blos Sphaerularienschläuche von anderthalb Centimeter Länge und einer Dicke von nahezu 1 mm enthalten, sondern auch bereits Eier mit gefurchtem Dotter in ihrer Leibeshöhle aufweisen, wenn auch zunächst nur in geringer Menge. Andere Schläuche sind, obwohl bereits über 1 cm lang (bis 1,3 cm), noch ohne Eier im Uterus und von schlanker Statur, aber sonst vollständig ausgebildet. In einzelnen Fällen werden sogar schon bei Beginn der zweiten Aprilwoche Schläuche von nahezu 1 cm gefunden, fast immer in Gesellschaft von anderen, die erst einige Millimeter messen. Einmal habe ich auch bei einer winterschlafenden Hummel neben Sphaerularien mit eben gebildetem Schlauche eine solche mit centimeterlangem Anhange gesehen. Offenbar, dass diese, wie das auch oben (S. 642 [78]) angedeutet wurde, von einer frühzeitigen Infection herrührte, vermuthlich einer solchen, die noch während der Flugperiode eintrat, während die übrigen Parasiten nach Beschaffenheit und Zahl auf eine spätere und massenhafte, wohl unter besonders günstigen Bedingungen (etwa bei der Einwinterung) geschehene Einwanderung zurückzuführen sein dürften.

Das Wachsthum der Sphaerularienschläuche geht, wie schon die voranstehenden Bemerkungen vermuthen lassen, nicht gleich von Anfang an nach allen Dimensionen gleichmässig vor sich. Zunächst betrifft dasselbe mehr den Längendurchmesser als den Querschnitt. Jüngere Schläuche erscheinen desshalb verhältnissmässig schlank. Erst mit dem Eintritte der Legereife nehmen dieselben durch Ver-

grösserung des Querdurchmessers (bis 1,2 mm) eine mehr gedrungene Gestalt an.

Dass dieses Wachsthum nur durch eine Grössenzunahme der Wandzellen bedingt wird, ist schon oben (S. 653 [89]) hervorgehoben worden. Anfangs Epithelzellen von unbedeutenden Dimensionen, wachsen dieselben allmählich zu Gebilden von 0,3 und 0,35 mm heran. Es geschieht vollkommen autonom und unabhängig von der Lebensenergie des Wurmes, der den Schlauch einst erzeugte, seine nutritive Function aber schon längst an die den letztern direct umspülende Blutflüssigkeit der Hummel abgetreten hat.

Doch der Einfluss der veränderten Existenzbedingungen beschränkt sich nicht bloss darauf, dass die Wandzellen des Schlauches um ein Beträchtliches wachsen, sondern spricht sich auch weiter noch durch eine Veränderung ihrer Form und ihrer Structur aus (Fig. 14).

Schon die ersten Beobachter der Sphaerularien berichten von kugligen Erhebungen, die bis zu 0,25 mm messen und warzenartig auf der Aussenfläche des Schlauches aufsitzen. LUBBOCK vergleicht dieselben unpassender Weise mit den Stacheln gewisser Nematoden. Ich sage unpassender Weise, denn die Warzen sind keine Haftwerkzeuge oder Waffen, für mechanische Leistungen geschickt, sondern Erhebungen, die durch die mächtige Grösse der darin eingelagerten Kerne (0,18 mm) bedingt werden, gleichzeitig aber auch wohl, wie die Darmzotten, zur Vergrösserung der Absorptionsfläche dienen und die Cylinderfläche des Schlauches mindestens um das Doppelte wachsen lassen. Unter solchen Umständen erklärt es sich auch, dass diese Erhebungen mit der Massenzunahme des Schlauches immer stärker sich herausbilden, da dem kleinen Schlauche in seiner relativ grossen Aussenfläche ohne Weiteres schon ein genügender Absorptionsapparat zu Gebote steht.

Genetisch sind diese Erhebungen, wie gesagt, nichts Anderes, als die Abdrücke der den Wandzellen zukommenden Kerne, die zugleich mit den Zellen, und in einem noch höheren Grade als diese, an Grösse gewachsen sind und allmählich einen Durchmesser von reichlich 0,2 mm gewonnen haben, so dass sie die mehr flächenhaft entwickelte Randzone der Zelle um mehr als das Doppelte an Höhe überragen. Da nun die Wandzellen des Schlauches so ziemlich überall die

gleiche Form und Grösse besitzen, so sind natürlich auch die Vorsprünge mit grosser Regelmässigkeit über den Schlauch verbreitet (Fig. 13).

Nimmt die ungewöhnliche Grössenzunahme der Schlauchzellen und ihrer Kerne nun schon an sich unser Interesse in hohem Grade in Anspruch, so gilt das weit mehr noch von den histologischen Veränderungen, welche dieselben dabei eingehen.

So lange die Zellen eine nur unbedeutende Grösse besitzen, besteht der Inhalt derselben bekanntlich aus einem äusserst feinkörnigen Protoplasma. Von ähnlicher Beschaffenheit ist das Aussehen des bläschenförmigen Kernes, nur dass die Körner spärlicher sind und weniger hervortreten. Der im Innern liegende Nucleolus erscheint als ein unregelmässig gestalteter Ballen chromatophiler Substanz von wechselnder Form und Grösse (Fig. 11).

Mit der Grössenzunahme der Zellen ändert sich nun aber das Aussehen des Protoplasma, und zwar zunächst dadurch, dass die Körner im Innern die frühere, ich möchte fast sagen, indifferente Gruppirung aufgeben und sich in regelmässiger Weise reihenförmig an einander legen, so dass es den Anschein gewinnt, als wenn die Zellen von Fibrillenzügen durchsetzt würden (Fig. 14). Eine streifige Beschaffenheit des Protoplasma kennt man schon seit längerer Zeit an gewissen Zellen (Drüsenzellen, Ganglienzellen u. s. w.) bei höheren und niederen Thieren — man hat neuerlich sogar den Versuch gemacht, auf diese und ähnliche Erscheinungen hin die Inhaltsmasse der Zellen schlechtweg in ein sog. Spongioplasma und Hyaloplasma zu sondern[1]) — aber nirgends vielleicht ist diese Streifung eine so auffallende und charakteristische, wie in den Schlauchzellen unserer Sphaerularien. Die Richtung, welche diese Fibrillenzüge einhalten, geht im Grossen und Ganzen von der Aussenwand nach innen, wird aber dadurch in eigenthümlicher Weise modificirt, dass die Zellen stark gewölbt sind und einen Kern von ungewöhnlicher Grösse in sich einschliessen. So kommt es denn, dass die Fibrillenzüge in der Mitte der Zelle einen meridionalen Verlauf einhalten, als wenn sie den Kern in concentrischer Lage umfassten, gegen den

1) Vergl. Leydig, Untersuchungen zur Anatomie und Histologie der Thiere, Bonn 1883 S. 165 ff; Zelle und Gewebe. Bonn 1885 S. 1 ff, sowie weiter Flemming, Zellensubstanz, Kern- und Zellentheilung, Leipzig 1882 S. 58 ff.

Rand hin aber allmählich eine immer entschiedener hervortretende radiäre Stellung annehmen (Fig. 14). Da nun aber die Aussenwand der Zellen inzwischen nicht unbeträchtlich sich verdickt hat, und in Folge dessen die schon früher hier bemerkbaren Poren schärfer hervortreten lässt, so macht es fast den Eindruck, als wenn die lineare Anordnung des Spongioplasma die Wege bezeichne, auf denen die von aussen aufgenommenen Substanzen den Zellenkörper durchsetzten. In der nächsten Umgebung des Kernes sind die Fibrillenzüge übrigens weniger deutlich, als sonst; es findet sich hier nicht selten sogar ein Protoplasma von einfach körniger Beschaffenheit. Ebenso zeigen die Zellen mittlerer Grösse an Stelle der linearen Anordnung des Protoplasmagerüstes eine mehr reticuläre Bildung. Die Umwandlung geschieht dadurch, dass die transversalen Züge des Netzwerkes allmählich zurücktreten, und die longitudinalen dafür einen mehr gestreckten Verlauf nehmen.

Nicht selten trifft man, besonders wiederum bei Schläuchen mittlerer Grösse, auf Zellen, deren Protoplasma noch eine bald grössere, bald auch geringere Menge von festen Kugeln enthält, die aus einer stark lichtbrechenden chromatophilen Substanz bestehen. Am häufigsten und grössesten sind dieselben in den basalen Zellen des Schlauches, in denen sie gelegenlich 0,005 mm messen. In ausgewachsenen Schläuchen werden diese Einlagerungen gewöhnlich vermisst. Sie verkleinern sich, wenn das Zellenwachsthum stärkere Fortschritte macht und gehen schliesslich vollständig zu Grunde.

Die Veränderungen, welche der Kern bei seiner Grössenzunahme erleidet, sind weniger auffallend, als die des Zellenleibes. Die frühere Bläschenform bleibt unverändert, und ebenso auch das hellere Aussehen. Das letztere entspricht der weniger dichten Gruppirung der Plasmakörner, die einzeln übrigens grösser sind, als die der scheinbaren Fibrillen. Die Anordnung der Körner lässt auf ein mehr oder minder netzartiges Gefüge zurückschliessen.

Da nun das Hyaloplasma unter solchen Umständen das Uebergewicht hat, so erklärt sich die geringe Consistenz des Kernes, die u. a. auch darin sich ausspricht, dass derselbe durch Härtungsmittel zum Schrumpfen gebracht wird und dann den Hohlraum, der zu seiner Aufnahme bestimmt ist, nicht mehr vollständig ausfüllt.

Je weniger nun aber die Veränderungen der Kernmasse selbst

in's Auge fallen, desto schärfer markiren sich die verschiedenen Formen und Zustände des Nucleolus. Dass dieses Gebilde in den jüngern Schläuchen wechselndes Aussehen besitzt, ist schon früher bemerkt worden. Was aber damals nur andeutungsweise vorhanden war, ist inzwischen weit stärker ausgeprägt, so dass man kaum zwei Zellen auffinden kann, deren Nucleoli nicht die auffallendsten Unterschiede darböten. Nur insofern herrscht eine Übereinstimmung, als die Substanzmasse überall beträchtlich zugenommen hat. Am deutlichsten ist solches da, wo das Kernkörperchen seine frühere einfache Bildung beibehalten hat, was freilich durchaus nicht immer der Fall ist. In der Mehrzahl der Fälle hat sich dasselbe nämlich in eine mehr oder minder grosse Zahl von Bruchstücken aufgelöst[1]. Form und Grösse dieser Nucleoli wechseln (Fig. 15) auf das Mannigfachste, doch steht die letztere gewöhnlich zu der Menge im umgekehrten Verhältniss. Dabei ist es nicht selten, dass man auf Grund der verschiedenen Grösse Haupt- und Nebennucleoli aus einander halten kann. Die kleinern Theilstücke lassen sich mitunter nur schwer von den Körnern des Kernplasma unterscheiden, während die grösseren bereits bei oberflächlicher Betrachtung als selbständige Bildungen in's Auge fallen. Diese grössern Nucleoli enthalten nicht selten auch in ihrem Innern eine rundliche Vacuole, oder deren mehrere, durch ihr Lichtbrechungsvermögen auffallend gegen die umgebende Substanz abgesetzt (Fig. 14).

Es sind aber nicht blos die Schlauchzellen, die bei der Grössenzunahme histologisch sich verändern, sondern in noch höherem Maasse auch die Zellen des Fettkörpers. Doch die Veränderungen dieser letzteren sind ganz anderer Art, als die eben geschilderten, so dass die Aehnlichkeit, die Anfangs zwischen beiderlei Ge-

1) Einen solchen Zerfall des ursprünglich einfachen Nucleolus kennt man schon seit längerer Zeit bei dem thierischen Ei. (Vergl. Leuckart, Art. Zeugung in Wagner's Handwörterbuch der Physiol. Bd. IV S. 781.) An einen Zusammenhang mit physiologischen Vorgängen, wie besonders Nussbaum ihn für den Uebergang in den multinucleolären Zustand in Anspruch nimmt (Arch. für microscop. Anat. Bd. XXI 1872 S. 339) ist in unserem Falle wohl weniger zu denken, als an eine Abhängigkeit von der Grössenzunahme des Zellenkörpers. Keinenfalls ist der multinucleoläre Zustand für unsere Schlauchzellen »der Ausdruck einer Ruhepause der Kernfiguren, die — zum Tode überleitet«.

bilden obwaltete (Fig. 9), immer mehr verloren geht und schliesslich einer durchgreifenden Verschiedenheit Platz macht (Fig. 15).

Ueber das Längenwachsthum der Zellen ist schon oben gehandelt. Es geht beträchtlich über das gewöhnliche Maass hinaus, da Zellen von 2,5—3 mm, wie man sie gelegentlich im Fettkörper antrifft, doch sonst immerhin zu den seltenen Vorkommnissen gehören. Freilich ist dieses Wachsthum nicht allerorten das gleiche. Neben Zellen der eben angegebenen Länge trifft man andere, die kaum über 1 mm messen, und dazwischen sogar solche von nur 0,7 mm und noch weniger. Das Verhalten der einen Reihe ist auch durchaus nicht maassgebend für die Zellen der zweiten: lange und kurze Zellen wechseln in beiden auf die unregelmässigste Weise. Trotzdem ist die Gesammtlänge beider Reihen ohne merkliche Verschiedenheit; ihre Wachsthumsenergie steht offenbar unter gleichen Bedingungen. Angesichts des histologischen Baues, und im Hinblick besonders auf die spärliche Ausstattung mit Protoplasma, werden wir übrigens nicht fehlgreifen, wenn wir diese weniger in den Ernährungsverhältnissen der Zellen selbst, als in dem mechanischen Einflusse suchen, den die unter günstigern Umständen wachsenden Wandzellen auf den Fettkörper ausüben. Dazu passt auch die Thatsache, dass die Zellen in Uebereinstimmung mit dem Schlauche Anfangs zumeist in die Länge wachsen und ihre volle Dicke (bis 0,6 mm) erst erreichen, wenn das Längenwachsthum des Schlauches nahezu seinen Abschluss gefunden hat.

Wie die Zellen, so wachsen übrigens auch die Kerne, doch keineswegs in gleichem Verhältnisse, da sie kaum grösser werden, als die Kerne der Wandzellen, die doch ihrerseits gegen die Zellen des Fettkörpers beträchtlich zurückstehen. Auch sonst haben die Kerne der beiderlei Zellenarten mancherlei Uebereinstimmung, nicht blos durch ihre Bläschenform und die Beschaffenheit des Inhaltes, sondern namentlich auch durch die Schicksale des Nucleolus, der in den Kernen der Fettzellen meist gleichfalls zerfällt und in eine Anzahl von Stücken (Fig. 11) sich auflöst, nur dass diese mehr gleichmässig rund erscheinen und gewöhnlich auch in grösserer Menge vorhanden sind. Die Kerne selbst vermehren sich niemals, so dass die Zellen, auch wenn sie das Maximum ihrer Grösse erreicht haben, deren nicht mehr enthalten, als in früherer Zeit. Dafür aber erkennt man in

den grossen Zellen sehr deutlich, dass die Kerne fast sämmtlich eine wandständige Gruppirung besitzen. Die Zellhaut, der sie anliegen, hat eine derbe Beschaffenheit und eine ansehnliche Dicke, wie das den Grössenverhältnissen entspricht, zeigt aber sonst kaum irgendwelche Besonderheiten.

In einem desto höheren Grade aber wird unsere Aufmerksamkeit durch den Zelleninhalt in Anspruch genommen. Schon bei oberflächlichster Betrachtung fällt es auf, dass die Zellen des Fettkörpers im Gegensatze zu denen der Schlauchwand ein mehr helles Aussehen haben. An Stelle eines streifigen Protoplasma von ziemlich gleichmässiger Consistenz, wie wir bei den letzteren es angetroffen haben, umschliessen dieselben einen Inhalt von fast schaumiger Beschaffenheit. Seiner Hauptmasse nach besteht derselbe aus zahllosen Tröpfchen einer fettartig glänzenden Flüssigkeit, die von einer das Licht nur wenig brechenden zähen Zwischensubstanz umgeben sind. Es ist offenbar ein Depot von Reservestoffen, das hier vorliegt und vornehmlich wohl der Eierproduction zu Gute kommt. An Schnitten, die man von Alkoholpräparaten macht, sind die Fetttropfen geschwunden. Ihre Stelle ist von Hohlräumen eingenommen, die bis zu 0,05 mm messen und von einem cubischen Netzwerke feiner und gröberer Stränge umgeben sind, das in seiner Totalität ein festes spongiöses Gewebe darstellt (Fig. 11). Die Enden des Balkenwerkes inseriren sich an den Wänden sowohl der Zellen, wie der Kerne, breiten sich an beiden auch wohl flächenhaft aus und zeigen an vielen Stellen eine Einlagerung von Körnern. Offenbar sind dieselben durch Erhärtung der oben erwähnten Zwischensubstanz entstanden, die ihrerseits natürlich nichts Anderes ist, als der Ueberrest des Anfangs mehr gleichmässig körnigen Protoplasma, desselben, das ursprünglich den ganzen Zellenleib bildete, durch die darin sich ansammelnden und immerfort wachsenden fettigen Einlagerungen aber allmählich auf ein spongiöses Balkenwerk zurückgedrängt wurde.

Die Zellen des basalen Pfropfes haben an diesen Veränderungen keinerlei Antheil genommen. Sie zeigen nach wie vor die früher geschilderten Verhältnisse, höchstens insofern verändert, als die Masse, die sie bilden, trotz des gewaltigen Wachsthums der Fettkörperzellen, kaum in bemerkenswerther Weise zugenommen hat. Auch durch seine späteren Schicksale erweist sich der Pfropf dem-

nach als das, wofür wir denselben von Anfang an gehalten haben, als ein rudimentäres Gebilde.

Die Beziehungen des Fettkörpers zu dem Geschlechtsapparate sind in den ausgewachsenen Schläuchen nicht mehr die früheren, und zwar deshalb nicht, weil die ihnen beiden gemeinschaftlich zukommende Hüllhaut, die sie nach Art eines peritonealen Ueberzuges in dichter Auflagerung umgab, sich von ihnen abgehoben und der Innenfläche der Schlauchzellen, denen dieselbe, wie wir wissen, ursprünglich als Unterhaut angehörte, in mehr oder minder grosser Ausdehnung angelagert hat. Die Lösung ist eine nothwendige Folge der Wachsthumsveränderungen, die während der Grössenzunahme des Schlauches, besonders in der spätern Zeit, mit der Geschlechtsröhre vor sich gegangen sind, und die Länge derselben allmählich bis auf 6 und 7 cm vergrössert haben. Natürlich, dass ein Kanal, der mehr als das Vierfache der Fettkörperlänge beträgt, und auch an Dicke beträchtlich zugenommen hat, nicht mehr wie früher, in dichter Anlagerung an ein weit kürzeres Gebilde unter einer knapp aufliegenden Hülle Platz fand. Es hat von dem Fettkörper sich gelöst und die Hülle abgehoben, so dass unter derselben ein mit heller Flüssigkeit erfüllter weiter Raum entstanden ist, in dem seine Windungen jetzt frei sich entfalten und zurecht legen können (Fig. 15).

Die einzelnen Theile der Geschlechtsröhre haben übrigens an diesem Längenwachsthum nicht alle den gleichen Antheil. In einem weitaus überwiegenden Maasse hat dasselbe den Eierstock mit dem daran sich anschliessenden Leitungsrohre betroffen, dasselbe Gebilde, welches Anfangs das fadenförmige kurze Endstück des Genitaltractus bildete und auch jetzt noch von allen Theilen die geringste Dicke besitzt. Im Gegensatze dazu hat der Uterus, der in den ersten Stadien den bei Weitem ansehnlichsten Abschnitt darstellte, verhältnissmässig nur wenig zugenommen. Kaum dass er jemals mehr als den vierten Theil der Gesammtlänge in Anspruch nimmt. Mit umgebogenem Ende durchzieht er (14 mm) in fast gestrecktem Verlaufe den Schlauch bis auf das hintere Dritttheil, während der übrige Theil der Geschlechtsröhre, in eine Anzahl längerer und kürzerer Schlingen zusammengelegt, nach vorne sowohl wie nach hinten bis in die Körperenden hineinreicht (Fig. 13). Das blinde Ende des Eierstockes liegt meist im basalen Theile des Schlauches.

Dass der Uterus unter solchen Umständen die früheren Beziehungen zum Fettkörper noch am meisten beibehalten hat, wird uns kaum überraschen können. Nicht bloss, dass er, wie schon Lubbock hervorhebt, demselben dicht anliegt, er behält auch in seinem Endstücke nahezu noch die frühere Verbindung mit der Umhüllungshaut.

Wie schon oben bemerkt, ist es übrigens erst die letzte Zeit des Entwickelungslebens, die den Geschlechtsapparat zur vollen Ausbildung bringt. So lange die Schläuche noch eine schlanke Form besitzen, entbehren dieselben nicht etwa blos der reifen Eier, sondern auch sonst der späteren Entwickelung, und das in einem solchen Grade, dass der dem Uterus nach hinten folgende dünnere Theil der Geschlechtsröhre in Schläuchen von bereits 1,2 cm kaum die Hälfte der späteren Länge besitzt. Und nicht bloss die Länge, sondern auch die Dicke steht beträchtlich zurück. Nicht blos, dass der Durchmesser der hinteren Ovarialröhre, welcher später 0,07 misst, einstweilen nur 0,015 mm beträgt, auch der Eileiter ist vorn statt 0,20 mm erst 0,05 mm dick und der Uterus statt 0,5 mm gar erst 0,12 mm. Freilich ist auch die Füllung der Röhre einstweilen noch nicht die spätere; Uterus und Eileiter sind noch leer, und auch die Eier noch dotterlos und von geringer Grösse (0,022 mm). Hiernach bedarf es kaum mehr der Bemerkung, dass die Dickenentwickelung der reifen Sphaerularienschläuche, deren wir schon früher gedachten, nur die Folge der vollen Geschlechtsentwickelung ist. Bevor dieselbe eintritt, zeigt auch der Genitalkanal fast in ganzer Länge noch die frühere Verbindung mit dem Fettkörper. Erst wenn die Schläuche an Dicke zunehmen, geschieht die Lösung.

In organologischer Hinsicht ist der Geschlechtsapparat nach Abschluss der Entwickelung noch einfacher, als früher. Die Anfangs so scharfe Grenze zwischen Uterus und Endfaden ist fast vollständig verloren gegangen, theils, weil der letztere sich gegen den Uterus hin allmählich immer stärker verdickte, theils auch, weil das hintere umgebogene Ende des Uterus dünner ist, als der übrige Theil, und immer mehr (bis auf 0,25) abnimmt, je mehr es dem vorderen Abschnitte des Oviductes (0,21 mm) sich annähert. Wenn man freilich genauer untersucht, dann überzeugt man sich bald, dass Uterus und Oviduct nicht direct in einander übergehen, sondern durch ein kurzes

Zwischenstück in Zusammenhang stehen, welches nicht blos enger ist, als die anliegenden Theile (0,14 mm), sondern sich auch dadurch von denselben unterscheidet, dass es für gewöhnlich leer ist, die Eier also rasch passiren lässt. Von dieser Unterbrechung abgesehen, erscheint der gesammte Apparat als ein Rohr ohne alle Gliederung, nur insofern ausgezeichnet, als es in seinem Verlaufe nach vorn allmählich dicker wird. Am stärksten und rapidesten ist diese Verdickung, wie wir wissen, im Uterus. Oviduct und Eierstock gehen ganz allmählich in einander über, so dass es unmöglich ist, ohne Berücksichtigung des Inhaltes beide auseinander zu halten. Allerdings ist es zunächst nur der vordere Theil der Ovarialröhre, der dabei in Betracht kommt, jener, der, gleich dem Oviducte, mit dotterreichen Eiern gefüllt und deshalb auch wie dieser dunkel gefärbt ist. Der hintere Theil des Ovariums, dessen Eiinhalt der Dottereinlagerungen noch entbehrt, ist ebensowohl durch seine Farblosigkeit, wie durch seine unbedeutende Dicke zur Genüge ausgezeichnet. Trotzdem aber geht auch dieser hintere Theil so allmählich in den folgenden über, dass selbst hier eine scharfe Grenze nicht zu ziehen ist.

Der histologische Bau hat sich gegen früher zunächst insofern verändert, als die Zellen, welche der structurlosen Aussenwand aufliegen, um ein Ansehnliches gewachsen sind. Ihre bedeutendste Grösse erreichen dieselben im Uterus, wo sie bis 0,1 mm lang sind und in ihrem trüben Protoplasma einen grossen Kern (0,05 mm) mit ansehnlichem Nucleolus aufweisen. So wenigstens im mittleren Theile, so weit der Uterus eine beträchtlichere Weite besitzt, während sie nach hinten zu merklich kleiner werden. Erst im Oviducte stösst man wieder auf grössere Zellen, aber auf Zellen, welche, wie das auch bei anderen Nematoden der Fall ist, die frühere mehr ovale Form mit einer lang gestreckten vertauscht haben und (bei einer Länge von 0,1 mm und einer Maximalbreite von 0,015 mm) fast faserartig aussehen. Von da an nehmen die Zellen an Grösse wieder ab; sie verlieren auch zugleich an Schärfe der Contouren, so dass man fast glauben könnte, es sei an Stelle des früheren Epithels eine zusammenhängende Körnerschicht getreten, wenn die eingelagerten Kerne nicht mit Bestimmtheit auf eine zellige Structur hinwiesen.

Ob die Genitalröhre des Sphaerularienschlauches eine Muskulatur besitzt oder nicht, ist mir lange zweifelhaft gewesen. Wohl zeigt

die Wand des Uterus hier und da eine Querstrichelung, aber doch zu wenig deutlich, als dass dieselbe ohne Weiteres auf Muskelfasern bezogen werden könnte. Der Umstand freilich, dass die Eier noch während der Klüftung aus dem Schlauche ausgestossen werden, lässt die Existenz von Druckkräften, die auf den Inhalt des Uterus wirken, nicht bezweifeln, aber diese Kräfte könnten möglicher Weise ja auch ausserhalb des Schlauches in der Hummel zu suchen sein. Überdies schien der Umstand, dass auch die Schlauchwand der Muskeln und des Nervensystems vollständig entbehrt, der Annahme von der Existenz besonderer Uterusmuskeln nur wenig günstig zu sein. Trotzdem aber bin ich schliesslich bei meinen Untersuchungen auf eine Stelle gestossen, die alle Bedenken beseitigt hat. Es ist das oben erwähnte Verbindungsstück am hintern Ende des Uterus, welches eine, wenn auch nicht gerade augenfällige, doch immerhin kaum zu verkennende Querfaserung besitzt. Die Fasern sind blass und schmal und liegen in einfacher Schicht unterhalb der Tunica propria, so dass man vielleicht annehmen darf, sie möchten in ähnlicher Weise, wie die Körpermuskeln der Nematoden, den aufliegendem Epithelzellen ihren Ursprung verdanken.

Dass die Entwickelung der Eier im Umkreise einer Rhachis geschieht, also denselben Modus einhält, den wir bei zahlreichen andern, besonders grössern Nematoden vorfinden, ist schon durch Lubbock's Untersuchungen bekannt geworden. In Schläuchen unter 6 bis 8 mm sucht man freilich vergebens nach einem derartigen Gebilde. Was wir bei den Jugendformen als Ovarium bezeichneten, ist überhaupt nicht ohne Weiteres dem Eierstocke der spätern Zustände gleichzusetzen, sondern repräsentirt nach Bau und Entwickelung nur das Keimfach des ausgebildeten Ovariums, das überall bei den Nematoden der Rhachis entbehrt. Die hellen Eikeime, die dasselbe enthält, werden nach dem Ende zu immer kleiner, und zeigen schliesslich genau das Bild des noch jungfräulichen Ovariums. Die Angabe Lubbock's, dass das äusserste Ende des Ovariums von einer einzigen grossen Zelle gebildet werde, kann ich nicht bestätigen.

Die erste Andeutung der Rhachis bemerkt man, wenn die Eikeime 0,06 mm messen, also bereits merklich gewachsen sind.

Sie erscheint unter der Form eines ziemlich hellen und dünnen Fadens, der in der Axe der Röhre zwischen den zunächst in mehr-

facher Schicht aufliegenden Eikeimen hinzieht. Erst später, wenn der Durchmesser auf 0,04 mm herangewachsen ist, gruppiren letztere sich in eine einfache Lage.

In Schläuchen von etwa 1 cm Länge sind die Eier noch ohne körnigen Dotter, obwohl ihre Grösse inzwischen durch Verdickung des Plasmahofes um ein Beträchtliches gewachsen ist.

Mit der immer mehr sich entwickelnden Geschlechtsreife macht natürlich die Ausbildung sowohl der Eier, wie auch der Rhachis immer weitere Fortschritte. Die letztere nimmt unter gleichzeitiger Verdickung allmählich eine grobkörnige Beschaffenheit an, und lässt diese Körner dann auch in immer grösserer Masse in die Plasmamasse der Eier, die jetzt auch mit der Rhachis in deutlichem Zusammenhange steht, übertreten.

Doch das Alles sind Vorgänge, die ganz in derselben Weise auch bei zahlreichen anderen Nematoden vorkommen und so häufig beschrieben sind, dass wir nicht länger dabei zu verweilen brauchen.

Je mehr die Eier nun aber durch immer reichere Aufnahme von Dotterkörnern wachsen, desto mehr verkümmert die früher so ansehnliche Rhachis, bis sie schliesslich in der Nähe des Eileiters völlig verloren geht, und die Eier dann, Anfangs noch von unregelmässiger Form und ohne Eihaut, in letzteren übertreten. Nachdem sie eine Zeitlang daselbst verweilten, gelangen sie, bereits im Besitze ihrer definitiven Gestalt, als grobkörnige Ballen von 0,125 mm Länge und 0,06 mm Breite in den Uterus, in dem sie sodann nach stattgefundener Befruchtung mit einer dünnen Schale sich bekleiden und die ersten Furchungszustände durchlaufen. Die Embryonalbildung geschieht erst in der Leibeshöhle der Hummel, geht aber auch, wenngleich weniger sicher und vollständig, nach der Uebertragung in Wasser vor sich, so dass es den Anschein hat, als wenn dazu eine weitere Nahrungsaufnahme nicht nöthig sei. Trotzdem sind übrigens die Eier mit entwickeltem Embryo durchschnittlich etwas grösser, als diejenigen, bei denen die Furchung eben erst begonnen hat (Länge = 0,132, Breite = 0,07 mm).

Die Vorgänge der Furchung und Embryonalbildung habe ich nicht speciell untersucht, obwohl sie wegen der Grösse der Eier und der Durchsichtigkeit der Schale dazu besonders auffordern. Andererseits macht freilich die grobkörnige Beschaffenheit des Dotters

es schwer, die Reihenfolge der Furchungen genau zu verfolgen. Ich beschränke mich desshalb auf die Bemerkung, dass die vier ersten Furchungskugeln, offenbar in Anpassung an die längliche Form der Eier, wie bei Heterodera, der Länge nach hinter einander liegen. Die Reihenfolge der späteren Furchungen zeigt mancherlei individuelle Verschiedenheiten und geschieht keineswegs in so typischer Weise, wie das namentlich von Hallez jüngst bei andern Formen beobachtet ist[1]). Das Resultat dieser späteren Theilungen ist die Bildung von kleineren und grösseren Furchungskugeln, deren erstere dann als Ectodermzellen die andern umwachsen. Der auf diese Weise entstandene Embryonalkörper hat Anfangs eine ovoide Form, wird dann durch Auswachsen und Krümmung besonders des Schwanztheiles bogenförmig und verwandelt sich schliesslich ziemlich rasch in einen langgestreckten schlanken Wurmkörper, der (Fig. 16) im Innern der Eischale zwei mehr oder minder vollständig sich deckende langgezogene Spiraltouren macht.

Unmittelbar nach dem Auskriechen hat der Embryo eine Länge von 0,71 mm. Sein Querdurchmesser beträgt am Schwanzende 0,3 mm, am Kopfende kaum die Hälfte (0,014 mm). Gestalt und Bau zeigen sonst die späteren Verhältnisse. Die Darmzellen sind mit groben Dotterkörnern gefüllt, die kaum verändert aus den Eiern in dieselben übergegangen sind und ihnen ein dunkles Aussehen geben, das gegen die helle Leibeswand, die übrigens Anfangs gleichfalls eine Anzahl kleinerer Dotterkörner enthält, stark absticht. Die Cuticula ist schwach und fein geringelt, der Pseudostachel dünn und kurz.

Die Veränderungen, welche der Embryo während seines Aufenthaltes in der Leibeshöhle der Hummel erleidet, lassen sich sämmtlich auf Wachsthumserscheinungen zurückführen. Ob das dazu nöthige Quantum Nahrung von aussen aufgenommen wird, oder den Dotterkörnern der Darmzellen entstammt, wird schwer zu entscheiden sein, doch darf der Umstand, dass die letzteren an Grösse dabei verlieren, immerhin schon jetzt auf eine gewisse Theilnahme an den Ernährungsvorgängen zurückschliessen lassen.

Dass unsere Sphaerularia durch die Besonderheiten ihres Geschlechtslebens nicht bloss in der Gruppe der Nematoden, sondern

1) Recherches sur l'embryogénie de quelques Nématodes. Paris 1885.

in der ganzen vielgestalteten Thierwelt bis auf die jüngste Zeit isolirt stand, ist schon oben mehrfach hervorgehoben. Erst die Entdeckung des interessanten Atractonema, dem die folgende Mittheilung gewidmet ist, hat sie dieser vereinsamten Stllung entrissen und die Brücke geschlagen, die ihre Lebensgeschichte mit den Zuständen der gewöhnlichen Spulwürmer verbindet. Schon vor einigen Jahren ist freilich von COBBOLD der Versuch gemacht worden, einen in England in den Magendrüsen des Schweines aufgefundenen Nematoden, Sismondsia paradoxa Cobb., als Gegenstück unserer Sphaerularia zur Seite zu stellen[1]). Obwohl SCHNEIDER diesem Versuche beizustimmen scheint[2]), muss ich denselben für verfehlt halten. Was COBBOLD in seiner etwas verworrenen Beschreibung an dem Wurme als »Rosette« bezeichnet und »with a provisional acceptance of SCHNEIDER's view« als den nach aussen umgestülpten Uterus in Anspruch nimmt, ist offenbar nichts Anderes, als der von dem weiblichen Apparate mächtig aufgetriebene Mittelkörper eines zunächst mit Hystrichis und Tropidocerca verwandten Spiroptera-artigen Nematoden. Hätte COBBOLD die schöne und eingehende Darstellung gekannt, welche LIEBERKÜHN vor zwanzig Jahren von dem sonderbaren Tetrameres hemichrous aus den Pepsindrüsen des Vormagens von Anas brochas gegeben hat[3]), dann würde er rasch zu der Ueberzeugung gekommen sein, dass seine Sismondsia demselben Genus zugehöre. Nicht blos die allgemeine Körperform, auch nicht blos der Umstand, dass aus dem zu einem abgeplatteten Sphäroide aufgeblähten Mittelstück an der gegenüberstehenden Enden Kopf und Schwanz von gewöhnlicher Bildung hervortreten, selbst der anatomische Bau des Wurmes, das Vorkommen in den Magendrüsen eines Warmblüters, das Zusammenleben mit einem durchaus nematodenartigen Männchen — das Alles bedingt eben so viele Uebereinstimmungen mit Tetrameres, wie Unterschiede von Sphaerularia. Sogar die zweigartigen Ausbuchtungen des Mittelstückes (branched lateral processes) mit ihren kugligen Anschwellungen (caecal

1) On Sismondsia paradoxa and his probable affinity with Sphaerularia, Transact. Linnaean Soc. 1883. T. II. p. 357—361.

2) Beiträge u. s. w. Bd. I. S. 251.

3) Beiträge zur Anatomie der Nematoden, Archiv für Anat. und Physiol. 1855. S. 314—336, Tab. XII und XIII.

capsules), die mit den Höckern des Sphaerularienschlauches verglichen werden — die Eigenschaften also, welche Cobbold zu der Bezeichnung »Rosette« veranlassten, sogar sie lassen sich, wenn auch in geringerer Entwickelung und Selbständigkeit, bei dem Lieberkühn'schen Tetrameres auffinden. Aber gesetzt auch, dass diese Analogie nicht zutreffen sollte, so liegt doch zu einer Zusammenstellung der »Rosette« mit einem Sphaerularienschlauche nicht der geringste Grund vor.

III.

ATRACTONEMA GIBBOSUM.[1])

Hierzu Tafel III.

Bei Gelegenheit meiner Mittheilungen über Sphaerularia habe ich mehrfach hervorheben müssen, dass die isolirte Stellung, die dieser Wurm durch die sonst unerhörten Eigenthümlichkeiten seines geschlechtlichen Verhaltens einnimmt, es verschuldet hat, dass die richtigen Ansichten über dessen Natur erst nach längerer Zeit die ihnen gebührende Anerkennung gefunden haben. Wären Formen bekannt gewesen, die zu dem sonderbaren Verhalten der Sphaerularia den Uebergang gemacht, dasselbe in irgend einer Weise vorbereitet hätten, dann würde das Urtheil vermuthlich von vorn herein anders gelautet haben.

Ein solches Thier nun ist es, das ich unter den Namen *Atractonema gibbosum* hier zu beschreiben gedenke. Es gehört, wie Sphaerularia, zu den Schmarotzernematoden, und dürfte derselben auch systematisch nicht allzu fern stehen. Über die Zugehörigkeit zu der Rhabditidengruppe kann hier kein Zweifel sein.

1) Die erste Mittheilung über diesen sonderbaren Wurm ist der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften in der Sitzung vom 6. December v. J. gemacht worden. Vgl. Berichte u. s. w. 1886 Mathemat.-phys. Cl. S. 356 ff., sowie weiter Zoolog. Anzeiger 1886 Nr. 240. Der hier für unsern Wurm in Anwendung gebrachte Genus-Namen Asconema hat mit Atractonema (von ἄτρακτος, die Spindel) vertauscht werden müssen, weil derselbe nicht blos an eine Pilzform, sondern von Kent auch bereits an eine Hexactinellide (Quarterly Journ. micr. Soc. 1871 p. 90) vergeben worden ist.

Unser Wurm bewohnt die Larven der Cecidomyia pini, einer kleinen Fliege, die sich in den zur Zucht von Allantonema von mir hergerichteten Zwingern während der Herbstmonate des verflossenen Jahres in Menge eingenistet hatte. Es war einer meiner Schüler, der Studiosus der Naturwissenschaft Herr A. Strubell aus Frankfurt a. M., derselbe, dem wir inzwischen eine schöne Untersuchung über Heterodera Schachtii zu verdanken haben, welcher den Wurm auffand, als er auf meine Bitte den Inhalt meiner Zuchtgefässe nach Allantonemen durchsuchte.

Anfangs war der Wurm selten, da zunächst nur wenige Larven, und auch diese immer nur spärlich, inficirt waren; in den dann folgenden Wochen aber vermehrte sich die Menge der Parasiten in einem solchen Grade, dass kaum noch eine wurmfreie Larve gefunden werden konnte, und die Zahl allein der weiblichen Schmarotzer — von den in Menge vorhandenen Jugendformen zu geschweigen — je auf ein Dutzend und mehr stieg. Larven, die in den für die Zucht unseres Parasiten eigens eingerichteten kleinen Behältern 10 bis 14 Tage verweilten, zeigten deren gelegentlich über 50 — allerdings nicht alle auf gleicher Entwicklungsstufe.

Durch die völlig durchsichtigen Körperhüllen hindurch liessen sich die Würmer mit ihrer Brut schon am unverletzten Thiere in der Leibeshöhle auffinden und in ihrem Verhalten beobachten. So lange dieselben noch jung sind, bewegen sie sich mit voller Freiheit, besonders im hinteren Theile der Leibeshöhle, der ihnen einen grösseren Spielraum giebt, weil er weniger vollständig von Eingeweiden gefüllt ist. Später wird die Bewegung mehr beschränkt, weil die Würmer mit ihrer schlanken Form allmählich auch ihre Krümmfähigkeit verlieren, und schliesslich geht dieselbe völlig verloren. Die älteren Parasiten, die ob ihrer eigenthümlichen Gestaltung leicht als solche erkannt werden, liegen ruhig an ihrem Platze, meist in unmittelbarer Nähe der Leibeswand; es müsste denn sein, dass sie durch eine kräftige Zusammenziehung des Larvenkörpers nach vorn oder hinten verschoben würden. Natürlich, dass auch die Jugendformen unserer Würmer und die neben ihnen in der Leibeshöhle vorhandenen Eier unter dem Einflusse dieser Druckkräfte auf und ab treiben.

Sind die Parasiten in nur mässiger Anzahl vorhanden, dann

scheinen sie ihre Träger kaum erheblich zu belästigen. Die letzteren wachsen nicht blos und verpuppen sich, sondern werden auch zu ausgebildeten männlichen und weiblichen Fliegen[1]. Nur insofern besteht gegen früher ein Unterschied, als der Eintritt in's Puppenstadium in Folge der dabei veränderten Organisations- und Lebensverhältnisse eine weitere Infection unmöglich macht.

So lange die Cecidomyien im Larvenzustande existiren, kann die Infection dagegen jeder Zeit geschehen; erwachsene Larven, sogar solche, die dicht vor der Verpuppung stehen, sind der Einwanderung ebenso zugänglich, wie solche, die eben erst ihre Eihülle verlassen haben.

Trotzdem möchte ich übrigens nicht geradezu behaupten, dass der Parasitismus unserer Würmer für ihre Träger ohne Bedeutung sei. Gegen eine derartige Annahme spricht schon der Umstand, dass Larven, die stark mit Atractonemen besetzt waren, bei dem Uebergange in den Puppenzustand vielfach in meinen Zuchtapparaten zu Grunde gingen.

Im ausgewachsenen Zustande (Taf. III Fig. 1) besitzt unser Parasit eine Länge von 0,6 mm. Seine Form ist sehr ungewöhnlich, indem der schon an sich gedrungene Leib in einiger Entfernung vor dem kegelförmigen Schwanzende einen buckelartigen Aufsatz trägt, der, einem mächtigen Bruchsack vergleichbar, der Bauchfläche mit breiter Basis aufsitzt. Im völlig entwickelten Zustande dürfte dieser Buckel an Masse mehr als die Hälfte des gesammten Wurmkörpers ausmachen. Seine Länge beträgt nicht weniger als 0,25 mm, Höhe und Breite 0,11 mm, mehr als der Querdurchmesser des Wurmes (0,62 mm). Natürlich unter solchen Umständen, dass derselbe nach allen Seiten über die Anheftungsstelle hervorragt. Am meisten nach vorn, wo er in Form eines plumpen Zapfens fast bis zur Mitte des Wurmes emporreicht.

Dieses buckelartige Gebilde trägt auch die Schuld, dass unser Wurm sich nicht mehr schlängelnd fortbewegen kann. Durch das Gewicht desselben fixirt, vermag er nur noch die Enden seines

1) Ein Gleiches habe ich auch an den mit Mermis behafteten Culicidenlarven beobachtet — im Gegensatze zu der Angabe Schneider's (a. a. O. S. 8 Anm.), der zufolge diese Larven in den Puppenzustand überhaupt nicht übergingen.

Leibes, namentlich das vordere, das an Länge überwiegt, in schwingende Bewegungen zu versetzen, die kaum genügen, den Schwerpunkt des Körpers um ein Weniges zu verrücken.

Der dem Buckel vorausgehende Vorderleib besitzt in ganzer Länge eine plumpe Cylinderform. Nur das Kopfende macht eine Ausnahme, indem es als ein kurzer und schlanker Kegel dem übrigen Leibe aufsitzt. Obwohl letzterer vorn merklich (von 0,09 bis 0,06 mm) sich verjüngt, ist der Abstand von den Dimensionen des Endstückes doch so gross, dass es den Anschein hat, als wenn dieses ein selbständiges Anhangsgebilde darstellte. Und das um so mehr, als es sich in den übrigen Körper mehr oder minder tief einsenken kann, so dass mitunter nur die äusserste Spitze hervorragt.

Der über den Bauchanhang nach hinten sich fortsetzende conische Schwanztheil ist schlanker als der übrige Leib. Er besitzt eine Länge von 0,09 mm und ist in Folge des Druckes, den ersterer auf ihn ausübt, mehr oder minder stark nach dem Rücken zu emporgehoben. Das äusserste Ende trägt eine 0,021 mm lange stiftförmige Papille.

Die nach ihrer äusseren Erscheinung hier geschilderten Würmer ergeben sich bei näherer Betrachtung sämmtlich als Weibchen. Nach männlichen Würmern sucht man überhaupt vergebens in den Cecidomyien. Mag die Zahl der Parasiten noch so gross sein, sie besteht immer nur aus weiblichen Thieren und aus Jugendformen. Allerdings haben die ersteren vielleicht nicht alle die eben beschriebene auffallende Gestaltung. Manche derselben tragen einen erst unvollständig entwickelten Buckel (Fig. 9) oder entbehren desselben noch völlig (Fig. 7), so dass sie sich durch ihre Körperform an die typischen Nematoden anschliessen, und auch von den Jugendformen nur durch ihre Grössenverhältnisse und die Entwicklung ihrer Geschlechtsorgane verschieden sind.

Wenn man diese jugendlichen Weibchen näher untersucht, und die einzelnen Entwicklungszustände derselben vergleicht, dann kommt man übrigens rasch zu der Ueberzeugung, dass der Höcker, dessen Anwesenheit die ausgebildeten Parasiten in so auffallender Weise auszeichnet, durch einen Vorfall der Scheide entstanden ist, und somit ein dem Sphaerularienschlauche durchaus gleichwerthiges Gebilde darstellt. In Form und anatomischer Bildung finden sich

allerdings zwischen beiden Anhängen beträchtliche Unterschiede, dieselben können aber unser Urtheil über ihre morphologische Natur eben so wenig beeinflussen, wie der Umstand, dass der Bauchhöcker von Atractonema an Selbständigkeit beträchtlich hinter dem Sphaerularienschlauche zurücksteht.

Die jugendlichen Weibchen sind aber nur selten und nur in Folge günstiger Infectionsbedingungen gelegentlich in solcher Menge vorhanden, dass sich die Entwicklungsgeschichte des Geschlechtshöckers mit einem einzigen Blicke übersehen lässt. Unter gewöhnlichen Verhältnissen stösst man meist nur auf einige wenige ausgebildete Weibchen, oder gar nur ein einziges. Und somit dürfte es denn auch den natürlichen Vorkommnissen am meisten entsprechen, wenn wir zunächst diese letzteren in Betracht ziehen, und die schon oben von uns gegebene Beschreibung der Körperform durch eine Darstellung des inneren Baues vervollständigen.

Bei der ersten Untersuchung macht die Organisation unseres Wurmes einen fast verwirrenden Eindruck. Statt der scharf gezeichneten Eingeweide anderer Nematoden erkennt man zunächst nur eine gedrängte Menge ovaler und rundlicher Ballen von verschiedener, zum Theil ganz beträchtlicher Grösse und meist dunkler Beschaffenheit, die trotz der im Ganzen unverkennbar linearen Gruppirung in mannichfaltiger Weise durch einander geschlungen sind, und aus der Leibeshöhle des Wurmes auch in den weiten Innenraum des Genitalbuckels übertreten. Es bedarf erst einer längern und eingehendern Beobachtung, bis man die Ueberzeugung gewinnt, dass diese Ballen, die nichts Anderes als Zellen sind, zweien von einander verschiedenen Organen angehören, dem Darme, der freilich von dem gewöhnlichen Verhalten beträchtlich abweicht, und dem Geschlechtsapparate. Beide füllen (Fig. 1) in bestimmter, wenn auch individuell und zeitlich mannichfach wechselnder Anordnung sowohl die Leibeshöhle des Wurmes, wie auch den in weitem Umfange damit in Zusammenhang stehenden Genitalhöcker, der somit auch durch sein anatomisches Verhalten den oben gebrauchten Vergleich mit einem Bruchsacke völlig rechtfertigt. Dabei darf man freilich nicht ausser Acht lassen, dass der Höcker, wie wir das später noch weiter kennen lernen werden, durch die nach aussen vorgefallene Scheide

entstanden ist, und keineswegs etwa eine blos sackartige Auftreibung der Leibeswand darstellt.

Es bedarf übrigens nicht einmal des entwicklungsgeschichtlichen Nachweises, um die Ueberzeugung zu gewinnen, dass der Genitalhöcker unseres Atractonema kein integrirender Theil der Leibeswand ist. Schon sein anatomisches und histologisches Verhalten zeigt das zur Genüge.

Nicht blos, dass das letzte, zwiebelartig aufgetriebene Ende des Genitalschlauches auf dem nach vorn gerichteten Vorsprunge des Buckels nach aussen ausmündet, es haben auch die Wände dieser beiderlei Theile durch ihre Dicke, ihr zelliges Gefüge und ihr eigenthümliches Aussehen eine so augenfällige Aehnlichkeit (Fig. 1), dass die Zusammengehörigkeit derselben ganz unverkennbar ist.

Die Körperdecken unseres Atractonema besitzen im Gegensatze zu der Wand des Genitalbuckels eine wenig auffallende Structurirung und eine nur unbeträchtliche Dicke. Die Cuticula ist hell und zart, so dass sie trotz ihrer Ringelung fast glatt erscheint, und ebenso hat auch die nach innen anliegende Musculatur eine nur wenig kräftige Entwicklung. Wie bei den verwandten Würmern besteht dieselbe aus acht paarweise zusammengruppirten Längsfaserzügen, zwischen die sich an zwei einander gegenüberliegenden Stellen je ein ziemlich breites, aber nur schwach gezeichnetes kernhaltiges Seitenfeld einschiebt.

In einiger Entfernung von der Kopfspitze erkennt man auch, am besten an inhaltlosen Cuticulardecken, die bauchständige Oeffnung des Excretionsorgans mit der anhängenden Chitinröhre.

Weit eigenthümlicher, als die Leibeswand unseres Wurmes verhält sich sein Darmapparat. Sonst bei den Nematoden ein meist deutlich röhriges Gebilde, besteht derselbe bei den ausgebildeten Weibchen (Fig. 1) aus einem soliden Strange grosser Zellen, die in einer bald doppelten, bald auch einfachen Reihe hinter einander liegen. Mundöffnung und After fehlen, aber die Enden des Stranges sind da, wo diese sonst gelegen sein würden, mit den äusseren Körperwänden in ligamentöser Verbindung. Die geringe Festigkeit dieses Zellenkörpers bringt es mit sich, dass derselbe nicht den gestreckten Verlauf eines gewöhnlichen Nematodendarmes einhält, sondern durch den Druck der mächtig entwickelten Geschlechtsorgane vielfach zur

Seite abgelenkt und gekrümmt ist. Am meisten gilt das für die hintere Hälfte, besonders jenen Theil, der in den Hohlraum des Genitalbuckels eintritt, und sich hier nicht selten (Fig. 1) sogar in förmliche kurze Schlingen zusammenlegt, was um so leichter geschehen kann, als seine Zellen immer nur eine einfache Reihe bilden. In Folge dieses Umstandes gewinnt der Strang denn auch eine Länge, die nicht unbeträchtlich grösser ist, als die des Wurmleibes.

Die Zellen selbst sind von länglicher Form und einer zum Theil recht ansehnlichen Grösse (0,045—0,08 mm). Sie sind in der Axenrichtung des Stranges an einander gefügt, zeigen aber sonst in ihrer Gruppirung keinerlei Regelmässigkeit, so dass kürzere und längere Zellen ohne Ordnung abwechseln. Das Protoplasma hat eine grobkörnige Beschaffenheit und umschliesst einen bläschenförmigen Kern von ansehnlicher Grösse (0,18 mm), in dem das Kernkörperchen nur wenig hervortritt.

Die dünne Hüllhaut, welche die Zellen zusammenhält, setzt sich über die Enden des Stranges hinaus fort und befestigt denselben vorn und hinten an der Leibeswand. Am längsten und stärksten ist das vordere Aufhängeband, das bis in den Kopfkegel hinein sich verfolgen lässt und in dessen Innerm zu einer fast bulbusartigen Masse anschwillt. An leeren Cuticularhäuten beobachtet man auch einen dünnen Chitinfaden, der den Bulbus von der Kopfspitze aus durchzieht, wohl ein sicherer Beweis, dass wir es hier mit dem Rudimente eines Pharyngealapparates zu thun haben.

Unser Atractonema ist übrigens nicht der einzige Nematode mit so ungewöhnlichem Darme. Schon bei Sphaerularia haben wir oben (S. 631 [67]) eine ähnliche Bildung gefunden, nur dass die Zellen hier bedeutend kleiner sind, und so regelmässig beisammen liegen, dass das Aussehen des Stranges noch völlig darmartig ist. Eine weit grössere Uebereinstimmung zeigt der Zellenkörper von Mermis albicans, nicht blos durch sein anatomisches Verhalten, sondern auch dadurch, dass er im Jugendzustande, ganz wie wir das später auch für unser Atractonema kennen lernen werden, noch durchaus die gewöhnliche Beschaffenheit eines Nematodendarmes hat. Selbst den Fettkörper des Sphaerularienschlauches dürfen wir als analoges Gebilde hier anziehen, obwohl derselbe dadurch sehr auffallend verschieden ist, dass seine Zellen — vielleicht in Zusam-

menhang mit der eigenthümlichen Art der Entwicklung — eine grössere Menge von Kernen besitzen (vergl. S. 617 [53]).

Jedenfalls stimmen alle diese Gebilde darin überein, dass sie, obwohl genetisch einem Darme gleichwerthig, nicht die eigentlichen und hauptsächlichsten Functionen eines solchen üben, sondern gewisse, sonst demselben nur nebenbei zukommende Leistungen vollziehen[1]), dass sie, um es bestimmter auszudrücken, nicht mehr verdauen, sondern in ihren Zellen, wie das gelegentlich auch sonst der Fall ist, Reservestoffe anhäufen, die dann nach Bedürfniss verbraucht werden. Aus einem nahrungsbereitenden Organe, wie der Darm es gewöhnlich darstellt, ist der Zellenkörper zu einem nahrungssammelnden Gebilde geworden. Dass übrigens ein solcher Functionswechsel nur bei parasitischen Thieren möglich ist, die in ihrem Nahrungserwerbe nicht ausschliesslich auf den Darm angewiesen sind, braucht kaum ausdrücklich hervorgehoben zu werden.

Der unregelmässige Verlauf des Zellenkörpers ist bei unserem Atractonema, wie das schon oben bemerkt wurde, vornehmlich durch die räumlichen Bedürfnisse des Genitalapparates bedingt, und je nach dessen Füllungszustande ein vielfach wechselnder. Auch die Dicke und aufgetriebene Körperform der ausgebildeten Weibchen lässt sich grossentheils auf die Massenentwicklung der Genitalien zurückführen. Trotzdem aber ist es nur eine einzige Geschlechtsröhre, die unsere Thiere besitzen (Fig. 1), ein Organ freilich von ansehnlicher Länge und beträchtlicher Weite, das diese Eigenschaften selbst dann noch behält, wenn wir von dem buckelförmigen Bauchanhange absehen, der die Genitalöffnung trägt, und morphologisch, wie wir wissen, gleichfalls dem Geschlechtsapparate zugehört.

Die ansehnliche Länge dieser Röhre bringt es mit sich, dass dieselbe, statt gestreckt zu verlaufen, sich schlingenförmig zusammenlegt. Und das um so mehr, als sie mit Ausnahme des Endstückes,

1) Dohrn bezeichnet diese vielfach in der Thierwelt vorkommende Erscheinung — die übrigens bereits in der anatomisch-physiologischen Uebersicht des Thierreiches von Bergmann und Leuckart, Stuttgart 1851, S. 24 ff. und a. a. O. ihrer hohen Bedeutung nach gebührend gewürdigt ist — mit dem Namen des Functionswechsels. Vergl. Dohrn, der Ursprung der Wirbelthiere und das Princip des Functionswechsels. Leipzig 1875, S. 60 ff.

das im Innern des Buckels liegt, auf den Vorderleib des Wurmes beschränkt ist. Sie hält im Grossen und Ganzen eine N-förmige Anordnung ein, besteht also aus zwei absteigenden und einem aufsteigenden Schenkel, aus drei Abschnitten, die sich, obwohl sie nirgends scharf gegen einander abgesetzt sind, nach der Beschaffenheit ihres Inhaltes als Eierstock, Eileiter und Uterus bezeichnen lassen. Damit soll allerdings nicht gesagt sein, dass die Enden dieser Schenkel auch genau die Grenzen der genannten Abschnitte bilden.

Das Ovarium ist von diesen drei Theilen der längste. Es beginnt (Fig. 1) weit vorne, nahezu auf derselben Höhe, wie der Zellenkörper, und läuft ziemlich gestreckt von da an der Bauchfläche bis zur Anheftungsstelle des Genitalbuckels, wo es umbiegt und öfters noch eine Strecke weit in den Mittelschenkel hinein sich verfolgen lässt. Seine Länge beträgt reichlich 0,4 mm, sein mittlerer Querdurchmesser etwa 0,03 mm. Der Innenraum ist mit dotterlosen runden Eiern verschiedener Entwicklungsstufe gefüllt, die unten, wo sie eine einfache Reihe bilden, 0,016 mm messen, nach dem blinden Ende zu aber kleiner werden und in immer grösserer Menge neben einander liegen. Bevor die Eier die einfache Reihenfolge einnehmen, sind sie eine Zeitlang (zu 5 oder 6) im Umkreis einer im Ganzen freilich nur schwachen und kurzen Rhachis gelagert. Eine epitheliale Auskleidung lässt sich erst im Eileiter auffinden, in dem die Eier mehr oder minder dicht gedrängt auf einander folgen und unter fortgesetzter Grössenzunahme mit einem grobkörnigen Dotter sich versehen. Beim Uebertritte in den Uterus besitzen dieselben bereits ihre volle Entwicklung, nur dass sie der späteren Schalenhaut noch entbehren. Die letztere entsteht erst nach der Befruchtung, die im Anfangstheile des Uterus geschieht, wo die kleinen Spermazellen in Masse beisammen liegen. Ein eignes, gegen die übrigen Theile des Genitalschlauches abgesetztes Receptaculum ist nicht vorhanden. Die legereifen Eier, die mehr oder minder zahlreich und gedrängt den Uterus füllen, meist aber nur in einfacher Reihe einander folgen, sind durch Grösse (0,05 mm) und Aussehen den Zellen des Darmstranges so ähnlich, dass das Verständniss der Organisation dadurch Anfangs erschwert wird.

In der Regel werden die Eier noch vor Beginn der Furchung oder doch in deren ersten Stadien abgelegt, aber mitunter verweilen

sie auch eine längere Zeit im Uterus, bis der Embryo gebildet ist. Hier und da stösst man sogar auf Würmer, deren Embryonen nicht blos im Mutterleibe ausschlüpften und die Eingeweide zerstörten, sondern auch unter der umhüllenden Cuticula vollständig auswuchsen, wie das bekanntlich auch sonst bei den Rhabditiden vorkommt[1]).

Die Genitalöffnung liegt, wie schon früher bemerkt, am Vorderende des Buckels, das in Zapfenform mehr oder minder weit emporragt. Sie führt nicht unmittelbar in den Uterus, sondern zunächst in eine Art Bulbus, ein ovoides Organ von ansehnlicher Grösse (0,08 mm), das den obern Theil der Buckelhöhle einnimmt (Fig. 1). Obwohl nach seinem anatomischen Verhalten eine Fortsetzung des Uterus, gewissermassen dessen Endstück, ist es nicht blos durch seine Form, sondern weit mehr noch durch seinen Bau von demselben verschieden. An Stelle der im Uterus vorkommenden kleinen und flachen Epithelzellen besitzt nämlich die Wand des Bulbus eine Lage cubischer Zellen von 0,02 mm Durchmesser, die durch ihr helles Aussehen und den Besitz eines bläschenförmigen grossen Kernes (0,013 mm) mit ansehnlichem Nucleolus (0,006 mm) den die Buckelwand bildenden Zellen in einem solchen Maasse gleichen, dass schon dadurch die Zusammengehörigkeit dieser beiderlei Theile höchst wahrscheinlich wird, wie das auch oben von uns hervorgehoben ist. Die Unterschiede, die zwischen beiden Gebilden obwalten, beschränken sich vornehmlich darauf, dass die Buckelzellen mehr als die doppelte Grösse der Bulbuszellen (bis zu 0,056 mm, Kern = 0,025 mm) besitzen. Der Nucleolus besteht aus einem ansehnlichen Ballen von Chromatinsubstanz, der bald kuglig, bald auch langgezogen oder gar doppelt ist, und nicht selten eine Anzahl von Vacuolen in sich einschliesst.

Die Wand des Buckels hat unter solchen Umständen eine beträchtliche Dicke, obwohl die Zellen immer nur, wie die des Sphaerularienschlauches, in einfacher Schicht neben einander angeordnet sind (Fig. 1). Gleich letzteren erscheinen sie in der Flächenansicht als ziemlich regelmäsige Sechsecke. Die innere Begrenzung der

1) Hier und da ist solch ein Verhalten sogar ganz constant. So bei der Rhabditisform von Rhabdonema nigrovenosum (LEUCKART, Parasiten, 1. Aufl. Bd. II. S. 144).

Zellen ist nahezu eben und von einer dünnen Haut überzogen, die an der Insertionsstelle des Bulbus direct in dessen äussere Bekleidung übergeht, während die freie Aussenfläche uhrglasartig sich erhebt, so dass der Buckel ein mehr oder minder höckeriges Aussehen besitzt. So hoch freilich wie bei Sphaerularia werden die Erhebungen niemals, schon deshalb nicht, weil die Zellenkerne an relativer Grösse nicht unbeträchtlich zurückstehen. Dafür aber erinnert die äussere Bekleidung der Zellen wieder insofern an die Verhältnisse des Sphaerularienschlauches, als sie nicht blos eine grosse Festigkeit besitzt, sondern auf ihrer Innenfläche auch eine von Porenkanälen durchsetzte dicke Auflagerung zeigt. An der Geschlechtsöffnung schlägt sich die cuticulaartige Aussenlage nach innen in den Bulbus hinein, den sie dann in ganzer Länge auskleidet. Das Protoplasma der Zellen lässt trotz seiner ziemlich gleichmässig hellen Beschaffenheit hier und da eine leichte Streifung erkennen, deren Züge convergirend von aussen nach innen gehen.

Die Oeffnung, durch welche die Innenhöhle des Buckels mit der Leibeshöhle zusammenhängt, hat eine so beträchtliche Weite, dass sie nicht blos das letzte Ende des Uterus aufnimmt, das in den Bulbus einmündet, sondern meist auch (Fig. 1) einen grössern Theil des Zellenkörpers. Unter Umständen enthält dieselbe auch ein schlingenförmig zusammengekrümmtes mehr oder minder langes Stück Uterus. Der Innenraum des Genitalbuckels verhält sich somit wie eine Seitentasche der Leibeshöhle. Doch das kann uns nicht überraschen, wenn wir daran denken, dass der Buckel durch einen Vorfall der Scheide entstanden ist. Auch bei Sphaerularia ist ja die Schlauchhöhle genetisch nichts als eine Fortsetzung der Leibeshöhle. Dass dieselbe schon frühe gegen letztere sich abschliesst, kann an diesem Verhältnisse nichts ändern.

Sehr auffallend und auf den ersten Blick kaum erklärlich ist allerdings die Weite und die klaffende Bildung des Spaltraumes, die — in schreiendem Gegensatze zu dem Verhalten von Sphaerularia — jene beiden Räume bei Atractonema mit einander verbindet.

Und doch ergiebt sich auch diese Bildung als sehr natürlich, sobald wir die Entwicklungsgeschichte zu Rathe ziehen, und mit ihrer Hülfe die Thatsache constatiren, dass die sich vorstülpende Scheide schon im Jugendzustande (Fig. 6) eine ungewöhnliche Grösse besitzt,

und somit denn auch die Oeffnung, durch die sie hervortritt (Fig. 9), in ungewöhnlicher Weise ausweitet. In der That ist die Eingangspforte in den Genitalbuckel, wie wir später sehen werden, nichts Anderes als die frühere Vulva.

Dass der Inhalt des Genitalbuckels bis auf den beständig darin eingeschlossenen Bulbus nach den Umständen wechselt, ist bereits mehrfach bemerkt worden. Es richtet das sich zunächst, wie wir wissen, nach dem Füllungszustande des Genitalschlauches. Aber daneben kommt noch ein anderes Moment in Betracht, und zwar der Alterszustand des Wurmes. Nachdem unsere Parasiten eine längere Zeit hindurch in der oben beschriebenen Spindelform existirt haben, unterliegen dieselben nämlich einem eigenthümlichen Rückbildungsprocesse, der theils in dem Nachlasse der Eiproduction, theils auch in einer eigenthümlichen Umformung sich ausspricht. Der Körper, und namentlich der Vorderkörper, verkürzt sich unter gleichzeitiger Verdickung, und das allmählich in einem solchen Grade, dass er den Buckel nur um Weniges überragt. In Folge dieser Verkürzung tritt dann eine immer grössere Menge von Eingeweiden in den Buckel über, so dass dessen Masse schliesslich gegen die des Wurmkörpers kaum zurücksteht (Fig. 2). Nicht selten löst sich dabei die gesammte Innenmasse des Körperparenchym von der Cuticula los, so dass diese dann in ganzer Ausdehnung, auch nahezu noch von der früheren Länge, frei daliegt. Trotz alle dem aber sind die Würmer auch in diesem verschrumpften Zustande nicht ohne Leben. Sie zeigen noch leichte Bewegungen und entleeren sogar noch gelegentlich ihre Eier. Wo letztere zurückbleiben, da geht die Embryonalentwicklung, abweichend von dem gewöhnlichen Verhalten, im Innern entweder des Buckels oder des mütterlichen Körpers vor sich.

Dass es Alterserscheinungen sind, welche sich in diesen Veränderungen kund thun, wird dadurch bewiesen, dass dieselben am häufigsten in Fliegen beobachtet werden, in jüngeren Larven aber niemals vorkommen.

Die Vorgänge der Embryonalentwicklung selbst habe ich nicht zum Gegenstande meiner Untersuchungen gemacht. Sie laufen für gewöhnlich, wie wir wissen, in der Leibeshöhle der Wirthe ab, und nehmen einen Zeitraum von etwa 5—6 Tagen in Anspruch. Die Eier, die eine nur dünne Schalenhaut besitzen, vergrössern sich

während derselben bis 0,08 mm. Ihre Form ist nicht immer genau dieselbe, bald mehr, bald weniger länglich. Der fertige Embryo hat die gewöhnliche Nematodenform. So lange die knapp anliegende Schale ihn umgiebt, ist er meist 8-förmig zusammengekrümmt. Später, wenn er frei geworden, bewegt er sich schlängelnd. Er besitzt bei einer Länge von 0,23 mm eine ziemlich schlanke Körperform. Das Kopfende ist abgerundet, der 0,08 mm lange Schwanztheil am Ende pfriemenförmig zugespitzt.

Man könnte die jungen Würmer (Fig. 3) ihrem Aussehen nach leicht für gewöhnliche Rhabditiden halten, wenn sie nicht durch die fast gleichmässige Bildung und die geringe Festigkeit ihres Pharyngealapparates verchieden wären. Deutliche Muskelzüge und klappende Chitinzähne sucht man darin vergebens. Kaum einmal, dass man die Cuticularbekleidung der kurzen und engen Mundhöhle in Form eines zarten Anhangs durch den Pharynx hindurch sich fortsetzen sieht. Zwei helle Schläuche von unbedeutender Länge, die dem Ende der Mundhöhle ansitzen, machen den Eindruck von einzelligen Drüsen. Sie enthalten einen homogenen Inhalt von starkem Lichtbrechungsvermögen. Ueber ihre Function enthalte ich mich jeder Vermuthung, doch darf ich wohl darauf hinweisen, dass ähnliche Organe auch bei anderen Schmarotzernematoden, besonders Strongyliden, bekannt sind.

Trotz seiner im Ganzen nur schwachen Entwicklung hat der Pharyngealapparat unserer Würmchen eine so beträchtliche Länge, dass diese nur wenig hinter der des Chylusdarmes zurücksteht. Ich sage Chylusdarm, und nicht Zellenkörper, da das betreffende Gebilde in der That einstweilen (Fig. 4) wie ein gewöhnlicher Nematodendarm gebaut ist. Die Zellen sind allerdings stark mit Körnern gefüllt, so dass ihre Contouren nur wenig hervortreten, aber sie stehen doch deutlich in zwei Längsreihen neben einander, und umschliessen einen röhrigen Innenraum, mag dieser auch nur eng und schwach begrenzt sein. Am hinteren Ende des Darmes unterscheidet man, wie sonst, die Chitinhaut des Rectums. Der Porus excretorius liegt ziemlich genau in der Mitte des Pharynx. Die Genitalanlage lässt trotz ihrer zunächst nur geringen Grösse gleich Anfangs eine Zusammensetzung aus zwei und noch mehr Zellen erkennen.

Die Veränderungen, welche mit unsern Würmchen in der

Leibeshöhle ihrer Wirthe vor sich gehen, sprechen sich zunächst in einer nicht unbeträchtlichen Grössenzunahme aus. Ihre Länge steigt ziemlich rasch bis auf 0,33 mm, und in entsprechender Weise auch ihre Dicke (0,013) mm. Vornehmlich ist es der den Chylusdarm und die Geschlechtsanlage umschliessende Mittelkörper, dem dieses Wachsthum zu Gute kommt, und hier wiederum zumeist die Genitalanlage, deren Grössenzunahme so beträchtlich ist, dass sie bereits in Würmern der eben angeführten Länge zu einem Zellenschlauche von nicht weniger als 0,1 mm geworden ist, dessen Enden nur um etwa 0,03—0,04 mm vom Chylusdarme überragt werden (Fig. 4). Die Zellen messen 0,001 mm und liegen in dichter Menge der Länge und Quere nach neben einander. Eine geschlechtliche Differenzirung ist noch nicht eingetreten.

In diesem Zustande verharren die jungen Würmer in der Leibeshöhle ihrer Wirthe, ohne sich weiter zu verändern. Man sieht sie schlängelnd zwischen den Eingeweiden, besonders der hinteren Körperhälfte, sich bewegen, während die ausgebildeten Weibchen ihren Platz nur selten und immer nur in Folge eines äusseren Druckes verändern. Unter Umständen freilich trifft man daneben auch auf jüngere Geschlechtsthiere, zum Theil sogar solche, die nur wenig grösser sind, als die Jugendformen. Aber immer sind es jugendliche Weibchen, die man in der Leibeshöhle auffindet, mit wenig entwickeltem Geschlechtshöcker oder noch schlank, von fast jungfräulichem Aussehen (Fig. 7—10).

Der gänzliche Mangel männlicher Würmer macht es von vorn herein unwahrscheinlich, dass diese Weibchen direct aus den geschlechtlich noch indifferenten Jugendformen hervorgegangen sind, obwohl man zunächst, da die sonstigen Unterschiede nur wenig hervortreten, vielleicht geneigt ist, solches anzunehmen. Und die weitere Untersuchung rechtfertigt den Zweifel; man gewinnt in der That sehr bald die sichere Ueberzeugung, dass die jungen Schmarotzer nicht an Ort und Stelle sich entwickelten, sondern neue Eindringlinge sind. Und damit findet es denn auch seine Erklärung, dass dieselben da am häufigsten gefunden werden, wo die Infectionsbedingungen besonders günstig sind. Um die Zwischenzustände zur Beobachtung zu bringen, muss man den Jugendformen Gelegenheit geben, den

Aufenthalt im Innern ihrer Wirthe mit einem freien Leben zu vertauschen.

Unsere Atractonemen sind also eben so wenig ausschliessliche Parasiten, wie die Sphaerularien. Gleich diesen bedürfen sie zu ihrer geschlechtlichen Differenzirung und Entwicklung des directen Verkehrs mit der Aussenwelt. Sie gelangen aus ihren Wirthen in's Freie und werden hier, nicht etwa erst nach Monaten, wie die Sphaerularien, sondern schon nach wenigen Tagen zu geschlechtlich entwickelten männlichen und weiblichen Thieren, die den Begattungsact vollziehen, sobald ihre Geschlechtsorgane zur Ausbildung gekommen sind. Die männlichen Würmer gehen nach der Begattung zu Grunde. Anders die Weibchen, die das freie Leben rasch wieder, wenn die Gelegenheit sich bietet, mit einem parasitischen vertauschen, und erst in den neu gewonnenen Wirthen mit ihrer vollen Ausbildung zugleich die Legereife erlangen.

Auf welche Weise die jungen Würmer für gewöhnlich frei werden, kann ich mit Sicherheit nicht angeben. Wohl lassen die bei Allantonema und Sphaerularia beschriebenen Vorgänge vermuthen, dass sie ihre Wirthe schon bei deren Lebzeiten verlassen und durch den After auswandern, allein ich habe mich vergebens bemüht, dafür bestimmtere Anhaltspunkte zu gewinnen. Niemals, so oft ich darnach suchte, habe ich bei unseren Cecidomyien einen Parasiten im Darme aufgefunden. Dabei muss man freilich berücksichtigen, dass die Umstände hier weniger günstig liegen, als in den frühern Fällen, da unser Atractonema an Fruchtbarkeit weit hinter Allantonema und Sphaerularia zurücksteht. Andererseits aber habe ich auch bei stark inficirten Larven, die vielleicht hundert und noch mehr jugendliche Würmer beherbergten, niemals eine spontane Auswanderung beobachtet. Auch hat es nicht den Anschein, als wenn die Menge der Parasiten in den Puppen und Fliegen, selbst solchen, deren Insassen in Folge der Altersveränderung die Eierlage eingestellt haben, gegen früher merklich zurückgegangen sei.

Ich neige mich deshalb am meisten der Annahme zu, dass die Brut unseres Atractonema für gewöhnlich erst nach dem Tode der Wirthe frei wird, wie das ja auch, wenngleich weniger ausschliesslich, bei Sphaerularia (S. 628 [64]) der Fall ist. Soviel ist jedenfalls gewiss, dass die Jugendformen unseres Wurmes, falls sie den ge-

hörigen Entwicklungszustand besitzen, nach dem Tode ihrer Wirthe zur weiteren Entwicklung gelangen. Man braucht diese letzteren nur zu zerreissen und die Bruchstücke vor allzu starker Fäulniss zu bewahren, um die früheren Jugendformen schon nach Ablauf dreier Tage als männliche und weibliche Geschlechtsthiere wiederzufinden und auch mehrfach schon bei den letztern das Receptaculum mit Sperma gefüllt zu sehen.

Die Kürze der Entwicklungszeit erklärt sich theils daraus, dass die Larven schon als Parasiten, nach dem Verhalten besonders ihrer Geschlechtsanlage zu urtheilen, in ihrer Ausbildung weite Fortschritte gemacht haben, theils auch aus den relativ geringen Veränderungen, die mit ihnen bei dem Uebergange zur Geschlechtsreife vor sich gehen.

Nicht blos, dass sie nur wenig dabei an Grösse zunehmen, auch in Gestalt und Bildung behalten unsere Würmer im geschlechtsreifen Zustande eine so grosse Aehnlichkeit mit den Jugendformen, dass es einer genauen Untersuchung bedarf, um sie als das zu erkennen, was sie in Wirklichkeit sind.

Und das gilt in gleicher Weise sowohl von den Männchen, wie den Weibchen.

Was zunächst die ersteren betrifft, so messen diese (Fig. 5) nur selten mehr als 0,32—0,36 mm. Sie sind kaum grösser als die ausgewachsenen Larven und von schlanker Form (0,015), kleiner und namentlich auch schlanker, als die Weibchen, an die sie sich sonst in ihrer Gestaltung anschliessen. Der Kopftheil ist, so weit er von dem gegen früher nur wenig veränderten hellen Pharyngealapparate durchzogen wird, dünner, als der übrige Leib, und nach dem abgerundeten Ende zu verjüngt, während der 0,056 mm lange Schwanz wie früher pfriemenförmig sich zuspitzt. Eine Bursa fehlt. Die Begattungsorgane bestehen ausschliesslich aus dem Spicularapparate, zweien bogenförmig gekrümmten dünnen Hornstäbchen von 0,003 mm, die mit ihrer Convexität auf einem noch kleinern Stützplättchen aufliegen. Seitlich neben der Geschlechtsöffnung stehen ein Paar kleine Papillen.

Der Uebergang in den geschlechtsreifen Zustand wird wie gewöhnlich durch eine Häutung vermittelt. Nicht selten ist es auch eine doppelte Haut, die man im Umkreis des jungen Männchens zu unterscheiden im Stande ist, wie bei Sphaerularia und Allantonema.

Beide Häute sind von derselben Beschaffenheit, dünn und ohne Ringelung, ganz wie das bei den Larven der Fall ist. Unter dem Schutze dieser Hüllen entsteht übrigens nicht blos der Begattungsapparat, sondern gleichzeitig auch der Hoden mit seinem Ductus ejaculatorius den man schon in ganzer Ausdehnung mit reifem Sperma gefüllt sieht, bevor noch die Häute abgestreift sind. Es ist (Fig. 5) ein Gebilde von ungewöhnlicher Grösse, länger und beträchtlich dicker, als der nach oben daran sich anschliessende Hoden, so dass selbst der Darm gegen ihn zurücktritt, zumal dessen Zellen inzwischen stark verblasst sind. Grösse und Lage des Ductus lassen keinen Zweifel, dass derselbe seiner Hauptmasse nach aus der frühern Genitalanlage hervorgegangen ist. Nur das letzte Ende, das durch den After nach aussen mündet und weit dünner ist, als der übrige Abschnitt, dürfte einer selbständigen Bildung den Ursprung verdanken. Der Hoden ist dadurch entstanden, dass die primitive Anlage nach oben schlauchartig sich verlängerte. Im entwickelten Zustande erscheint derselbe als ein deutlich abgesetzter Kanal mit hornartig umgebogenem Ende, dessen Dicke gegen die Samenblase hin allmählich wächst, ohne letzterer jedoch, im gefüllten Zustande wenigstens, jemals gleichzukommen. Der Inhalt besteht aus hellen Kernzellen von 0,001 mm, die erst tief unten, dicht vor dem Uebergange in die Samenblase, die winzigen Spermakörperchen aus sich hervorgehen lassen. Dieser Inhaltsmasse verdankt der Hoden auch sein helles Aussehen, dem gegenüber der samengefüllte Ductus mit seiner dicken Epithellage durch seine Undurchsichtigkeit um so stärker hervortritt. Der Darmapparat hat, abgesehen davon, dass er durch die beträchtliche Entwicklung der Genitalien, wie schon oben bemerkt, räumlich beschränkt ist und seine Reservestoffe grossentheils verloren hat, immer noch die frühere Bildung. Die Enden desselben überragen den Geschlechtsapparat vorn und hinten nur um ein Weniges.

Die Weibchen (Fig. 6) sind etwas grösser als die Männchen, meist 0,38—0,40 mm lang, und auch dicker (0,02 mm). Letzteres verdanken sie der Bildung ihrer Geschlechtsorgane, besonders ihrer Vagina, die in Gestalt eines ansehnlichen und dickwandigen Kanals an Stelle des hier bei den Männchen vorkommenden Ductus ejaculatorius durch die hintere Körperhälfte hinzieht und in einer Ent-

fernung von 0,05 mm vor dem After ausmündet. Das Ende der Vagina setzt sich blindsackartig über diese Oeffnung noch eine Strecke weit fort, ohne sonst jedoch irgendwie selbständig sich zu gestalten. Die Dicke der Wandungen beruht der Hauptsache nach auf der Grösse (0,003 mm) und der runden Form der Epithelzellen, die in einfacher Lage neben einander gruppirt sind und sich durch eine derbe Cuticula, eine directe Fortsetzung der die Vulva durchsetzenden Körperhaut, gegen den engen Innenraum abgrenzen. Ein ähnliches Zellenlager, nur dünner, bekleidet auch die Innenfläche des Ductus ejaculatorius. Sogar bei den geschlechtlich noch indifferenten Larven erkennt man gelegentlich schon in der Zellenmasse der Genitalanlage eine die spätere Bildung vorbereitende Gruppirung.

Nach oben schliesst sich an diese Scheide sodann der Ovarialschlauch, der in ebenso augenscheinlicher Weise den Hoden wiederholt, wie die Scheide den Ductus ejaculatorius (Fig. 6). Gleich diesem bildet derselbe einen dünnen und hellen Kanal, dessen oberes, mit hellen Eikeimen von unbedeutender Grösse (0,002 mm) gefülltes Ende hornartig umgeschlagen ist. Der untere zunächst auf die Scheide folgende Abschnitt, der schon im jungfräulichen Zustande der weitere ist, fungirt als Receptaculum seminis. Durch die darin massenhaft angehäuften Samenkörperchen ausgedehnt, hat derselbe nach vollzogener Begattung (Fig. 8) die Form eines länglichen Säckchens, das sich an seinen Enden scharf gegen die benachbarten Theile absetzt und durch seinen körnigen Inhalt um so eher in's Auge fällt, als auch seine Grösse (0,07 mm) nichts weniger als unbedeutend ist.

Mit der geschlechtlichen Differenzirung und der Begattung hat das freie Leben unserer Würmer seinen Abschluss gefunden. Die Männchen gehen schon nach kurzer Zeit zu Grunde, und die Weibchen überleben die Männchen nur um wenige Tage, falls sie nicht inzwischen Gelegenheit gefunden haben, das freie Leben mit dem parasitischen zu vertauschen. Ihre volle Entwicklung und ihre Legereife erlangen dieselben, wie die Sphaerularien, an die sich unsere Würmer auch sonst durch ihre Schicksale auf das Engste anschliessen, nur als Schmarotzer, und zwar wiederum in denselben Larven, die sie als Jugendformen bewohnten. Man braucht letztere, gleichgültig, ob sie jung oder alt sind, nur in die mit befruchteten Weibchen

besetzten Zuchtgefässe zu übertragen, um schon nach Ablauf kaum eines Tages die neuen Eindringlinge, und zwar zunächst noch völlig unverändert, in der Leibeshöhle aufzufinden.

Dass die Einwanderung durch den Darm hindurch geschieht, dürfte nach den Erfahrungen, die wir bei anderen Insektennematoden gewonnen haben, kaum zweifelhaft sein. Ob dabei aber der Mund oder der After als Eingangspforte dient, wird ohne directe Beobachtung kaum zu entscheiden sein.

Ist die Einwanderung einmal geschehen, dann beginnt mit unseren Würmern alsbald eine Reihe von weiteren Veränderungen. Die Körpergrösse wächst, und die Geschlechtsorgane unterliegen einer tiefgreifenden Metamorphose (Fig. 7—10). In einem geringern Grade gilt das auch für den Darmapparat, der seine frühere Bildung zum Theil schon während des freien Lebens verloren hat.

Zunächst ist es übrigens weniger die Länge der Weibchen, als ihre Dicke, die zunimmt, und zwar in einem solchen Grade, dass der Leib die früher doch immerhin noch ziemlich schlanke Form verliert und rasch, besonders nach hinten zu, mit einer mehr gedrungenen vertauscht. Es rührt das zumeist von den Veränderungen her, welche die Vagina alsbald nach der Einwanderung der Würmer dadurch erleidet, dass ihre Wandzellen um das Doppelte des früheren Durchmessers sich vergrössern. Der schon früher fast körnerlose Inhalt nimmt dabei eine durchaus homogene Beschaffenheit und ein fast glashelles Aussehen an, das durch den darin eingelagerten bläschenförmigen Kern kaum merklich verändert wird. Die Dicke der Vagina steigt in Folge dessen rasch, noch bevor die Körpergrösse merklich zugenommen hat, auf 0,023 mm, ihre Länge auf 0,13 mm. Gleichzeitig verdickt sich die cuticulare Auskleidung des engen Innenraumes, so dass sie stärker als früher hervortritt.

Die voranstehenden Maasse sind einem Weibchen von erst 0,41 mm Länge entnommen, das etwa zwei oder drei Tage vorher in seinen Träger eingewandert war. Kaum aber ist nochmals die gleiche Zeit verflossen, da beträgt die Dicke der Vagina schon nahezu 0,03 mm, und die Länge vielleicht 0,15 mm. Ihre Gesammtmasse ist so beträchtlich gestiegen, dass sie trotz der schon jetzt sehr merklichen Auftreibung des hinteren Körpers die anliegende Leibeshöhle zum weitaus grössten Theile für sich in Anspruch

nimmt und den Darm hart an die Rückenwand andrängt (Fig. 12). Es geschieht wohl vornehmlich in Folge dieses Druckes, dass die anliegenden Darmzellen, die ihre regelmässige Anordnung schon vorher mehrfach eingebüsst hatten, auseinander gezerrt werden, und hinten eine nahezu einfache Reihenfolge annehmen. Der vordere Darmabschnitt, der über die Scheide hinausragt und neben dem schon jetzt allmählich auswachsenden Ovarialschlauch hinzieht, zeigt seine Zellen noch eine Zeitlang in der frühern Lage, obwohl das Lumen im Innern bereits verloren gegangen ist. Ebenso hat auch der Pharynx einen Rückbildungsprocess eingeschlagen. Er ist kürzer geworden, indem er kaum mehr als 0,07 mm misst und nur noch wenig über den Porus excretorius hinausragt, und hat auch an Dicke und Solidität verloren. Der Drüsenapparat, der bei den Larven hinter dem Munde vorhanden war, ist geschwunden, die Mundöffnung selbst hat sich zurückgebildet. Auch der After und Mastdarm lassen sich in der frühern Entwicklung nicht mehr nachweisen.

Was den Eierschlauch betrifft, so hat dieser an den Entwicklungsvorgängen der Scheide einen nur geringen Antheil genommen. Seine Länge ist allerdings um Einiges gewachsen, aber im Uebrigen hat sich derselbe nur wenig verändert. Blass und von unbedeutender Weite nimmt er mit seinen schon jetzt zusammengelegten Schenkeln einen nur geringen Theil des Vorderkörpers in Anspruch, so dass er leicht übersehen werden könnte, wenn nicht das samengefüllte Receptaculum die Aufmerksamkeit auf ihn hinlenkte. Die Eier sind immer noch dotterlos, von geringer Grösse, kaum über 0,004 mm, aber im unteren Abschnitte des Ovariums deutlich um eine Rhachis herum gruppirt.

Sind die weiblichen Atractonemen schon auf dem hier geschilderten Stadium durch die Bildung ihrer Scheide auffallend ausgezeichnet, so gilt das in einem noch höheren Grade von den Zuständen, die sich im weiteren Verlaufe der Entwicklung an dasselbe anschliessen. Handelt es sich doch in diesen um eine Reihe von Vorgängen, die, wenn sie auch zunächst wieder die Scheide betreffen, und gleich den früheren Veränderungen durch das Wachsthum der Scheidenzellen bedingt sind, schliesslich die ganze äussere Erscheinung unserer Würmer in charakteristischer Weise umgestalten.

Ich brauche kaum hervorzuheben, dass es die **Bildung des Genitalbuckels** ist, die diese letzte Phase des Entwickelungslebens kennzeichnet.

Die ersten Spuren dieser merkwürdigen Bildung bemerkt man bei Thieren, die an Länge (0,45 mm) nur wenig über die oben angeführten Maasse hinausgehen, von den frühern Zuständen aber dadurch unterschieden sind, dass die Dicke der hintern Körperhälfte um ein Bedeutendes zugenommen hat. Am beträchtlichsten erscheint dieselbe (0,045 mm) auf der Höhe der Geschlechtsöffnung, aus der die Wandungen der Vagina mit ihren Zellen eben hervorzuquellen im Begriffe sind (Fig. 7). Von da aus verjüngt sich der Durchmesser nach vorn zu mehr allmählich, nach hinten jedoch so rasch, dass beide Körperenden eine durchaus verschiedene Form annehmen. Die Scheidenzellen, deren Grösse die Dickenzunahme bedingt, besitzen einen Durchmesser von 0,01 mm. Sie stehen meist zu vier auf demselben Querschnitte (Fig. 12) und sind, je 13—15, der Länge nach in unregelmässiger Folge an einander gereiht. Die Zahl ist gegen früher nicht verändert.

Doch die Grössenzunahme der Zellen macht immer noch weitere Fortschritte — und eine immer grössere Menge derselben tritt aus der Geschlechtsöffnung nach aussen. Wo früher die Cuticula glatt und eben über die Bauchwand hinzog, da erhebt sich jetzt (Fig. 9) ein buckelförmig vorspringender Haufen von Zellen, der durch neuen Ansatz immerfort wächst und auf Kosten der Scheide so lange sich vergrössert, bis die Wand in fast ganzer Ausdehnung hervorgetreten ist. Die Innenfläche der Scheide kommt dabei nach aussen zu liegen; der Buckel ist also, wie der Sphaerularienschlauch, das Product einer inversio vaginae. Insofern aber ist dieser Vorgang bei unserm Atractonema verschieden, als es nicht der die Vulva umgebende Rand der Scheide ist, der zunächst hervortritt, sondern die gegenüberliegende Rückenwand. Im ersteren Falle würde die vorgefallene Scheide die gleiche Schlauchform haben, wie bei Sphaerularia, und nicht buckelförmig sein, wie das für die legereifen Atractonemen oben beschrieben ist.

Die Umstülpung wird dadurch eingeleitet, dass sich die der Vulva gegenüberliegende Wand der Scheide wulstet und gegen die Genitalöffnung einbiegt (Fig. 7). Die zunächst betheiligten Zellen sind

bis 0,02 mm gewachsen und von den nachrückenden Nachbarzellen überdeckt, so dass die Scheidenwand an der betreffenden Stelle eine doppelte Schicht von Zellen aufweist. Die Zellen der Innenlage drängen nun unter fortdauernder Grössenzunahme immer weiter gegen die Scheidenöffnung an, bis diese nachgiebt und die pfropfartig zusammen gedrückten Köpfe derselben hervortreten (Fig. 8). Je weiter in Folge des fortdauernden Andranges die Vulva sich öffnet, desto grösser wird die nach aussen austretende Masse. Nicht blos, weil die Zellen immer vollständiger hervorquellen, sondern auch deshalb, weil die benachbarten Zellen in immer grösserer Menge denselben Weg gehen.

So lange der Genitalzapfen noch klein ist, hat er eine ziemlich regelmässige Kugelform (Fig. 9). Im Verlaufe des spätern Wachsthums aber streckt er sich mehr in die Länge und Breite, bis er schliesslich eine fast polsterartige Buckelform annimmt. Die Längsstreckung erklärt sich zum grossen Theil dadurch, dass der Umstülpungsprocess sich zunächst nach hinten über den blindsackartigen Schenkel der Scheide fortsetzt, dessen Zellen bereits sämmtlich zu einer Zeit nach aussen hervorgetreten sind, in welcher der vordere Schenkel fast in ganzer Ausdehnung noch die frühere Haltung zeigt (Fig. 10). Da durch diese Umstülpung der Innenraum des hintern Scheidentheiles mit seiner Cuticularbekleidung nach aussen verlegt wird, das früher im Innern hinziehende Lumen als solches also verloren geht, communicirt die Geschlechtsöffnung fortan nur noch mit dem vordern Schenkel der Scheide. Natürlich unter solchen Umständen, dass sie auch an der vordern Begrenzung des Buckels gelegen ist (Fig. 10). Der frühern Vulva freilich ist diese Öffnung nicht mehr in jeder Beziehung gleichzusetzen. Sie repräsentirt nur den vordern Abschnitt derselben, der durch den in Mitte der Vulva sich erhebenden Zapfen von dem hintern abgetrennt wurde, und nach der Umstülpung des Scheidenblindsackes allein noch übrig geblieben ist.

Da die Randzellen des letztern bei der Umstülpung am spätesten hervortreten, so liegen dieselben im Buckel auch am weitesten nach hinten. Umgekehrt nehmen diejenigen Zellen, welche die Umstülpung einleiteten, die der frühern Scheidenrückwand, die vordere Lage ein, solange wenigstens, als sie durch die später nachrückenden Zellen noch nicht nach hinten verschoben sind. Auch diese stammen zum

grossen Theile aus der Rückenwand der Scheide, freilich nicht mehr des hintern Schenkels, sondern des vordern, der seinerseits den Ausstülpungsprocess aufnimmt, sobald derselbe hinten seinen Abschluss gefunden hat (Fig. 10).

Obgleich es nun zunächst und vorzugsweise auch hier wieder die Zellen der Rückenwand sind, die nach aussen hervortreten und den Buckelzellen sich anfügen, so nimmt doch auch die Bauchwand an diesen Vorgängen einen Antheil. Allerdings geschieht das in einem viel beschränktern Maasse, einmal, weil die Zellen derselben durchschnittlich weniger wachsen, und sodann deshalb, weil viele dieser Zellen nach den Seiten hin ausweichen und somit denn auch später im Buckel eine Seitenstellung einnehmen, wie das besonders an Querschnitten (Fig. 13) deutlich hervortritt. Da nun in Folge dessen die Bauchwand der vordern Scheide beim Umstülpen hinter der Rückenwand zurückbleibt, das Wachsthum des Buckels also vornehmlich nach hinten von der Geschlechtsöffnung geschieht, so muss letztere schliesslich, wenn die Ausstülpung beendigt ist, mit ihren Randzellen vorn auf den Buckel zu liegen kommen. In der That wird sie auch bei den legereifen Weibchen, wie wir das früher beschrieben haben, am Ende des hier zapfenartig vorspringenden Buckelrandes aufgefunden. Die Zellen, welche dieselbe von dem zunächst benachbarten Cuticularrande, der früher den Vorderrand der Vulva bildete, abtrennen, sind kleiner als die übrigen Buckelzellen und von geringerer Menge (Fig. 1). Sie sind die Überreste der frühern Bauchwand.

Dem Voranstehenden zufolge zeigt der Umstülpungsprocess, dem der Genitalbuckel seinen Ursprung verdankt, vorn und hinten an der Scheide gewisse Verschiedenheiten. Vielleicht jedoch, dass diese in Wirklichkeit geringer sind, als es den Anschein hat, und nur deshalb mehr hervortreten, weil der längere Vorderschenkel die Eigenthümlichkeiten bestimmter zur Schau trägt, als der hintere. In einem Punkte aber verhalten die beiden Scheidentheile sich wirklich abweichend, und dieser besteht darin, dass die Umstülpung des vordern Schenkels niemals eine ganz vollständige wird, indem das oberste Ende, welches den Uterus aufnimmt, beständig in seinem frühern Zustande verbleibt (Fig. 1). Ich brauche kaum ausdrücklich hervorzuheben, dass dieses Endstück den hinter der Geschlechts-

öffnung liegenden Bulbus bildet, der seine Zugehörigkeit zum Genitalbuckel, wie bereits früher erwähnt ist, schon durch seinen histologischen Bau zur Genüge kund thut. Allerdings sind die Zellen des Bulbus kleiner, als die Buckelzellen, aber der Unterschied, der hierin sich ausspricht, verliert jede Bedeutung, sobald wir berücksichtigen, dass auch die letztern ihre Grösse erst allmählich erreichen, da ja die Umstülpung nur die Folge dieser Grössenzunahme ist. Sind die Zellen einmal hervorgetreten (Fig. 13), dann geht mit ihnen keine weitere Veränderung mehr vor sich. Unser Atractonema verhält sich in dieser Beziehung also anders, als Sphaerularia, bei der die Grössenzunahme der Zellen, und damit auch die des Geschlechtsanhanges, zum weitaus grössesten Theile zeitlich der Ausstülpung nachfolgt.

Bei den Beziehungen, die zwischen der Scheide und dem spätern Bulbus obwalten, bedarf die Lage, die letzterer nach Umstülpung der erstern einnimmt, keiner besondern Erklärung. Ebensowenig der Umstand, dass das untere Uterusende, welches in den Bulbus einmündet, dem Zuge nachgiebt, den dieser in Folge seiner Umlagerung auf dasselbe ausübt.

Hand in Hand mit der hier geschilderten Ausbildung des Genitalhöckers gehen nun aber noch mancherlei weitere Veränderungen mit unserem Wurme vor sich. Sie sprechen sich vornehmlich darin aus, dass der Körper beträchtlich wächst, und die Geschlechtsorgane bis zur Legereife sich entwickeln.

Wenn die Ausstülpung der Scheide beginnt, dann sind unsere Würmer zunächst nur wenig über die frühere Länge hinaus gewachsen. Acht Tage später aber haben sie ihre volle Grösse erreicht, und in Folge der Massenzunahme nicht blos der Scheide, sondern auch der übrigen Geschlechtsorgane, bis auf das letzte Kopfende an Dicke beträchtlich zugenommen. Im Besitze der vollständigen Reife bieten sie mit dem anhängenden Buckel fortan das Bild, welches wir in seinen charakteristischen Zügen im Anfange unserer Darstellung entworfen haben.

Es versteht sich übrigens von selbst, dass der Eintritt in die Legereife nicht blos durch eine Massenzunahme der Geschlechtsorgane eingeleitet wird, nicht blos also dadurch, dass der Genitalschlauch an Länge und Weite zunimmt, sondern mehr noch und vorzugsweise durch die specifische Entwicklung seiner einzelnen

Abschnitte. Während der Genitalhöcker sich ausbildet, nehmen auch Ovarium, Eileiter und Uterus ihre definitive Beschaffenheit an. Das Ovarialende hat sich gestreckt, die Schlingen, in welche der Schlauch seit der Füllung des Receptaculums sich zusammengelegt hatte, wachsen länger aus, das Receptaculum selbst verliert die früher fast selbständige Bildung und wird zum Uterus, der durch das nach abwärts rückende Scheidenende immer länger ausgezogen wird. Gleichzeitig kommen auch die Eikeime zu ihrer weiteren Entwicklung. Sie wachsen zunächst im Umkreise der Rhachis, bis sie sich lösen und schliesslich, wie das früher beschrieben ist, mit körnigem Dotter umlagert, zur Befruchtung gelangen und ihre Schalenhaut bilden. Man trifft die legereifen Eier bereits dann, wenn der Genitalhöcker eben erst seine definitive Bildung erreicht hat.

Der Einfluss, den die Entwicklung und das Wachsthum der Genitalien auf den Darmapparat ausübt, ist schon früher hervorgehoben. Er erscheint um so auffallender, als auch die einzelnen Zellen an der allgemeinen Grössenzunahme in entsprechender Weise participiren. Pharynx und Rectum machen freilich eine Ausnahme. Im Gegensatze zu den übrigen Organen des Wurmkörpers sind sie dem schon früher bemerkbaren Rückbildungsprocesse unterlegen, und nur noch durch den peritonealen Ueberzug vertreten, der sie früher bekleidete und mit dem Zellenkörper verband. Es sind die oben erwähnten Aufhängebänder, die von diesen Resten gebildet werden. Auch die Innenmasse des den übrigen Körper schornsteinartig überragenden soliden Kopfzapfens dürfte, wie schon früher bemerkt, als ein Überbleibsel des Pharyngealapparates zu betrachten sein.

Dass wir den Bau und die Lebensgeschichte unseres Atractonema mit vollem Rechte als ein Abbild jener Zustände und Verhältnisse bezeichnet haben, die in noch überraschenderer Form bei der fast wunderbaren Sphaerularia uns entgegentreten, hat durch die voranstehende Darstellung wohl zur Genüge seine Begründung gefunden. Beide Formen gleichen einander nicht blos dadurch, dass sie beim Eintritte in das Stadium der Legereife ihre Vagina nach aussen umstülpen und zu einem Anhange von eigenthümlicher Gestalt und Bildung sich entwickeln lassen, sondern weiter auch darin, dass sie, obwohl in der Jugend Parasiten, zur Zeit der Geschlechtsreife ein freies Leben

führen und nur als begattete Weibchen wieder zu Eingeweidewürmern werden.

Die Übereinstimmung erstreckt sich vielfach auch auf die Einzelnheiten der Vorgänge, so dass wir nicht selten sogar von der einen Form auf die andere zurückschliessen können. Andererseits fehlt es freilich nicht an Unterschieden. Aber sie sind alle nur untergeordneter Art, im Wesentlichen darauf zurückzuführen, dass der Genitalanhang dem Wurme gegenüber zu einer mehr oder weniger grossen Selbständigkeit kommt, und die einzelnen Phasen der Entwicklung einen verschieden langen Zeitraum in Anspruch nehmen. Atractonema steht in dieser Hinsicht dem gewöhnlichen Verhalten weit näher, als Sphaerularia; sie vermittelt den Uebergang zu der letztern und liefert damit von Neuem einen Beweis für die Wahrheit des classischen Ausspruches:

»Die Natur geht ihren Gang, und was uns als Ausnahme erscheint, ist in der Regel«.

Tafelerklärung.

Tafel I.

ALLANTONEMA MIRABILE.

Fig. 1. Der ausgewachsene Parasit. $^{13}/_1$.
Fig. 2. Derselbe in seiner tracheenreichen Bindegewebshülle. $^{13}/_1$.
Fig. 3. Derselbe mit Leibeswand, Zellenparenchym und Geschlechtsapparat. $^{25}/_1$.
Fig. 4. Jugendliches Allantonema mit den einstweilen im männlichen Sinne functionirenden Geschlechtsorganen. $^{60}/_1$.
Fig. 5. Geklüftetes Ei mit eben differenzirten Ectodermzellen. $^{650}/_1$.
Fig. 6^a. Embryo mit Primitivstreifen. $^{650}/_1$.
Fig. 6^b. Kaulquappenartiger Embryo. $^{650}/_1$.
Fig. 7. Ausgebildeter Embryo, im Innern der Eihülle. $^{650}/_1$.
Fig. 8. Freier Embryo der Allantonemaform. $^{220}/_1$.
Fig. 9. Auswandernde Larve, noch im Innern der Embryonalhaut. $^{175}/_1$.
Fig. 10. Geschlechtsreife Rhabditisform von Allantonema. Weibchen. $^{150}/_1$.
Fig. 11. Männliche Rhabditisform in geschlechtlicher Reife. $^{150}/_1$.
Fig. 12. Freier Embryo der Rhabditisform. $^{220}/_1$.
Fig. 13. Die aus diesem Embryo sich entwickelnde Larve. $^{160}/_1$.
Fig. 14. Erste Allantonemaform. $^{1}/_{90}$.

Tafel II.

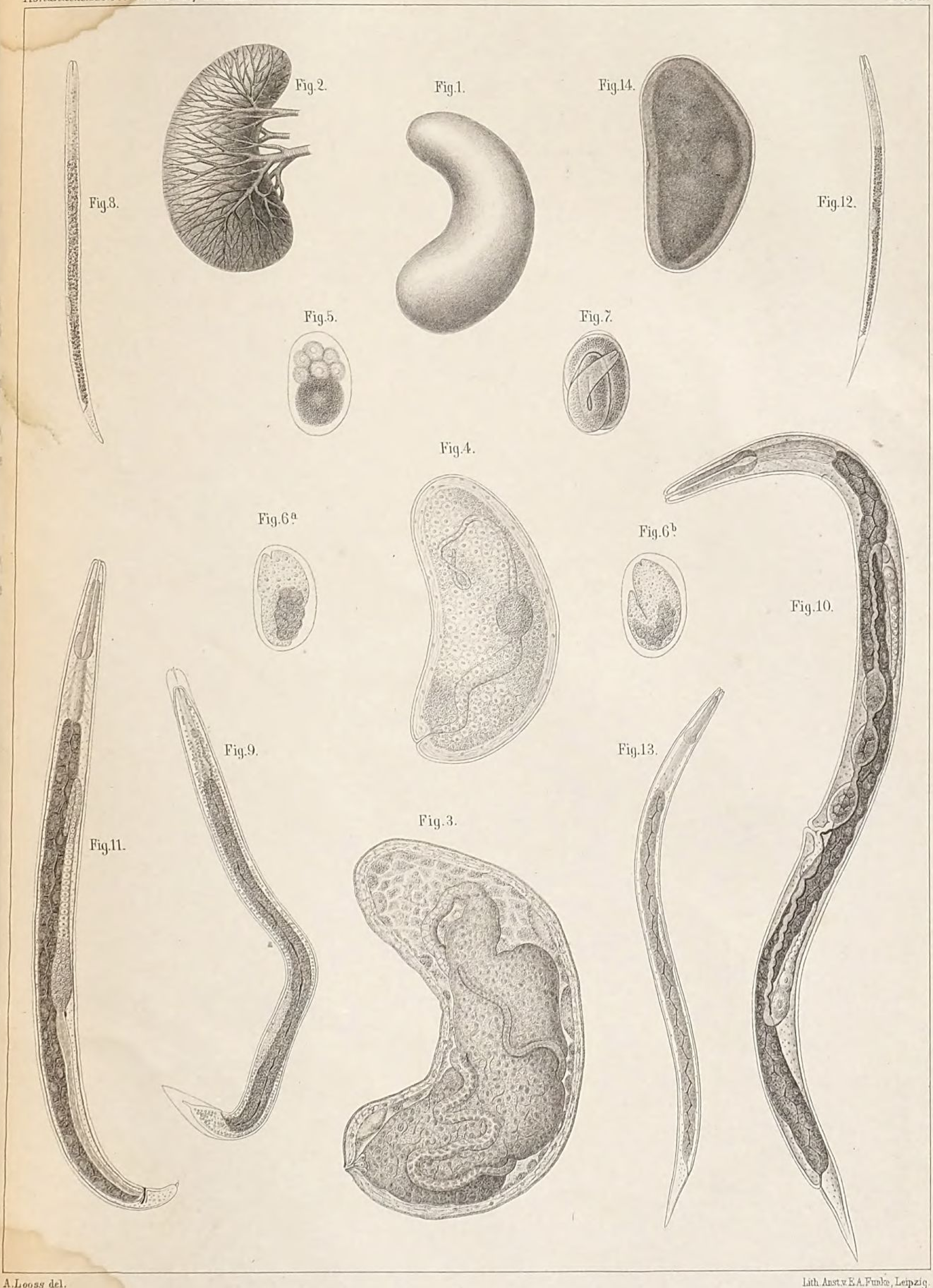
SPHAERULARIA BOMBI.

Fig. 1. Ausgewachsene Larve. $^{125}/_1$.
Fig. 2. Querschnitt durch dieselbe mit Darm und Seitenschläuchen. $^{650}/_1$.
Fig. 3. Männliche Sphaerularia in der abgestossenen Larvenhaut. $^{150}/_1$.
Fig. 4. Weibliche Sphaerularia. $^{150}/_1$.
Fig. 5. Sphaerularia mit halb ausgestülpter Vagina. $^{100}/_1$.
Fig. 6. Dieselbe mit fast vollständig ausgestülpter Vagina. $^{100}/_1$.
Fig. 7. Dieselbe mit schlauchförmig auswachsender Vagina. $^{100}/_1$.
Fig. 8. Vorderdarm einer Hummel mit anhängenden Sphaerularienschläuchen. $^{5}/_1$.
Fig. 9. Querschnitt durch den vorderen Theil eines Schlauches von etwa Millimeterlänge, mit Fettkörper und Uterus. $^{80}/_1$.
Fig. 10. Querschnitt durch den hinteren Theil desselben Schlauches mit Fettkörper und Ovarium. $^{80}/_1$.
Fig. 11. Zusammenhang zwischen Schlauch (3 mm lang) und Wurmkörper. $^{80}/_1$. Im Innern des Schlauches Fettzellen und Pfropf, im Wurmkörper Seitenschläuche und Darm.
Fig. 12. Wurm mit 6 mm langem Schlauch. $^{18}/_1$.
Fig. 13. Ausgebildeter Schlauch mit anhängendem Wurme. $^{10}/_1$.
Fig. 14. Wandzelle eines ausgewachsenen Schlauches mit streifigem Protoplasma. $^{100}/_1$.
Fig. 15. Querschnitt durch das vordere Drittheil eines ausgebildeten Schlauches mit Fettkörper, Uterus, Oviduct und Ovarium. $^{45}/_1$.
Fig. 16. Ei mit Embryo. $^{120}/_1$.

Tafel III.

ATRACTONEMA GIBBOSUM.

Fig. 1. Reifes Weibchen mit Genitalbuckel und inneren Organen. $^{15}/_1$.
Fig. 2. Weibchen mit rückgebildetem Wurmleibe. $^{15}/_1$.
Fig. 3 Neugeborene Larve. $^{240}/_1$.
Fig. 4. Ausgewachsene Larve. $^{200}/_1$.
Fig. 5. Geschlechtsreifes Männchen. $^{200}/_1$.
Fig. 6. Geschlechtsreifes Weibchen. $^{180}/_1$.
Fig. 7. Weibchen mit aufgewulsteter Scheidenrückwand. $^{170}/_1$.
Fig. 8. Weibchen mit pfropfartig vortretenden Scheidenzellen. $^{150}/_1$.
Fig. 9. Weibchen im Beginn der Buckelbildung. $^{130}/_1$.
Fig. 10. Webchen mit ausgestülptem Scheidenblindsack. $^{100}/_1$.
Fig. 11. Querschnitt durch den Vorderkörper eines Weibchens mit fast ausgebildetem Genitalbuckel. $^{200}/_1$. Man erkennt Zellenkörper, Ovarium und Oviduct.
Fig. 12. Ein eben solcher Querschnitt durch den noch nicht ausgestülpten obern Scheidentheil. $^{200}/_1$.
Fig. 13. Querschnitt durch den buckeltragenden Hinterleib. $^{200}/_1$.



A. Looss del. Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

Fig. 10.

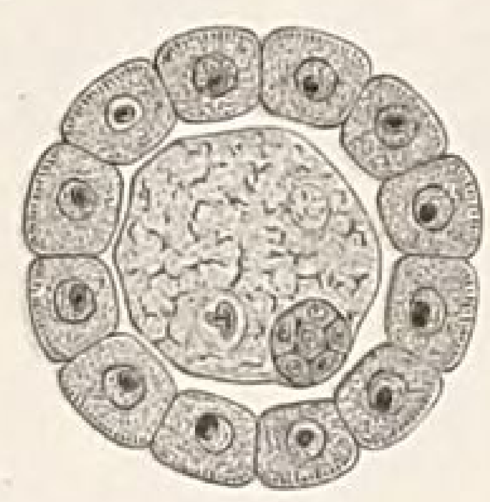


Fig. 7.

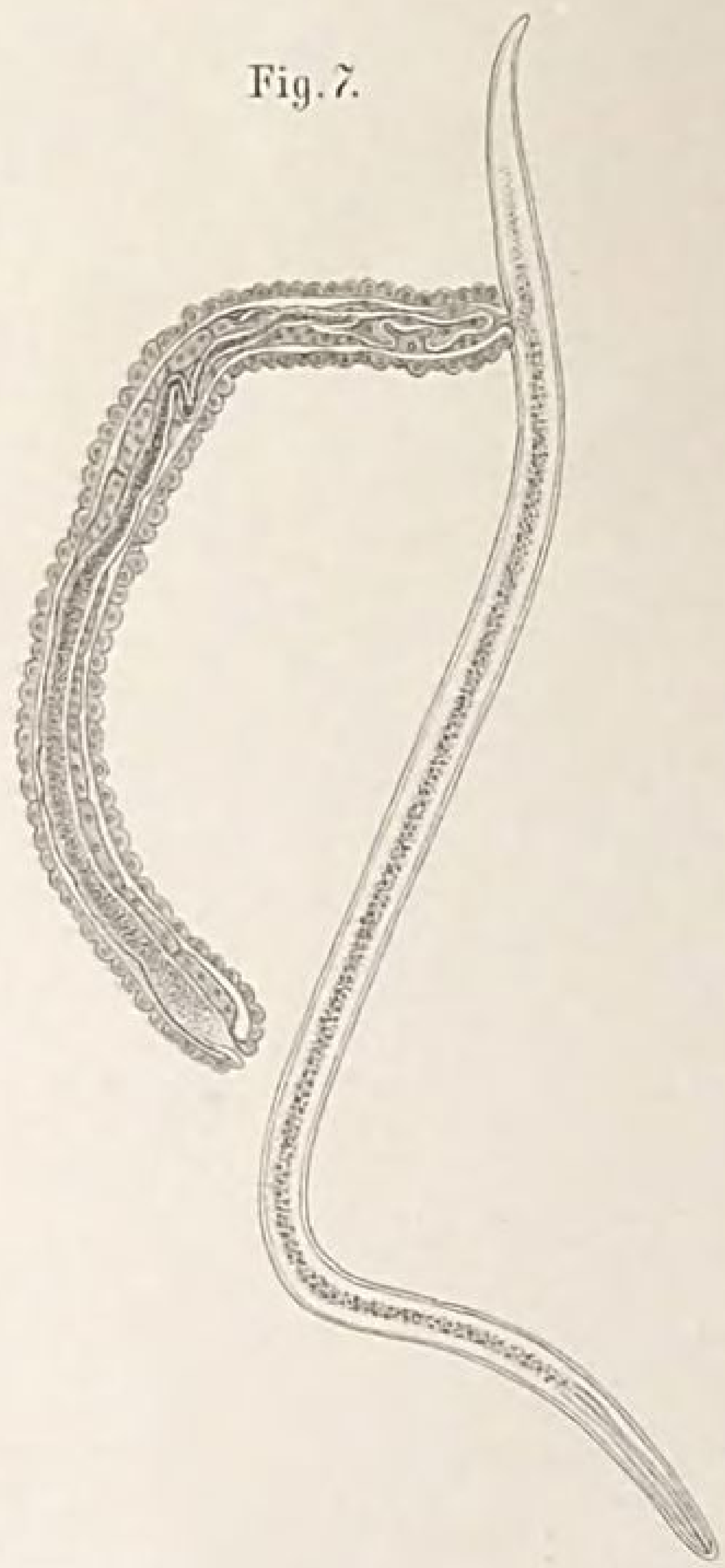


Fig. 5.



Fig. 1.

Fig. 4.

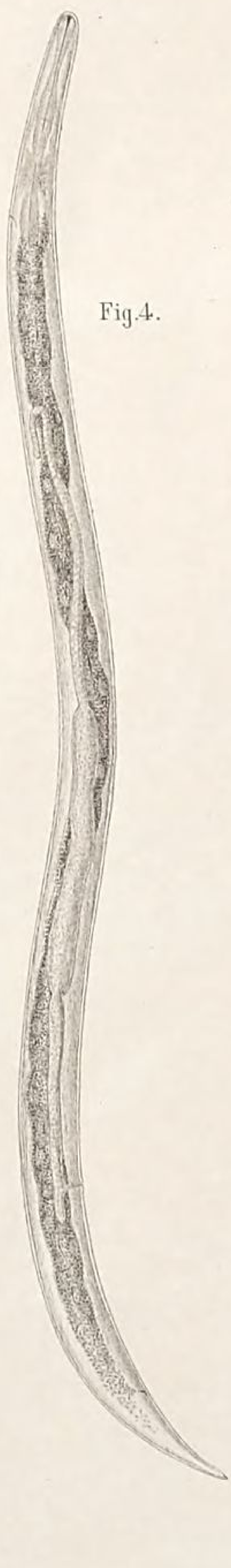


Fig. 15.

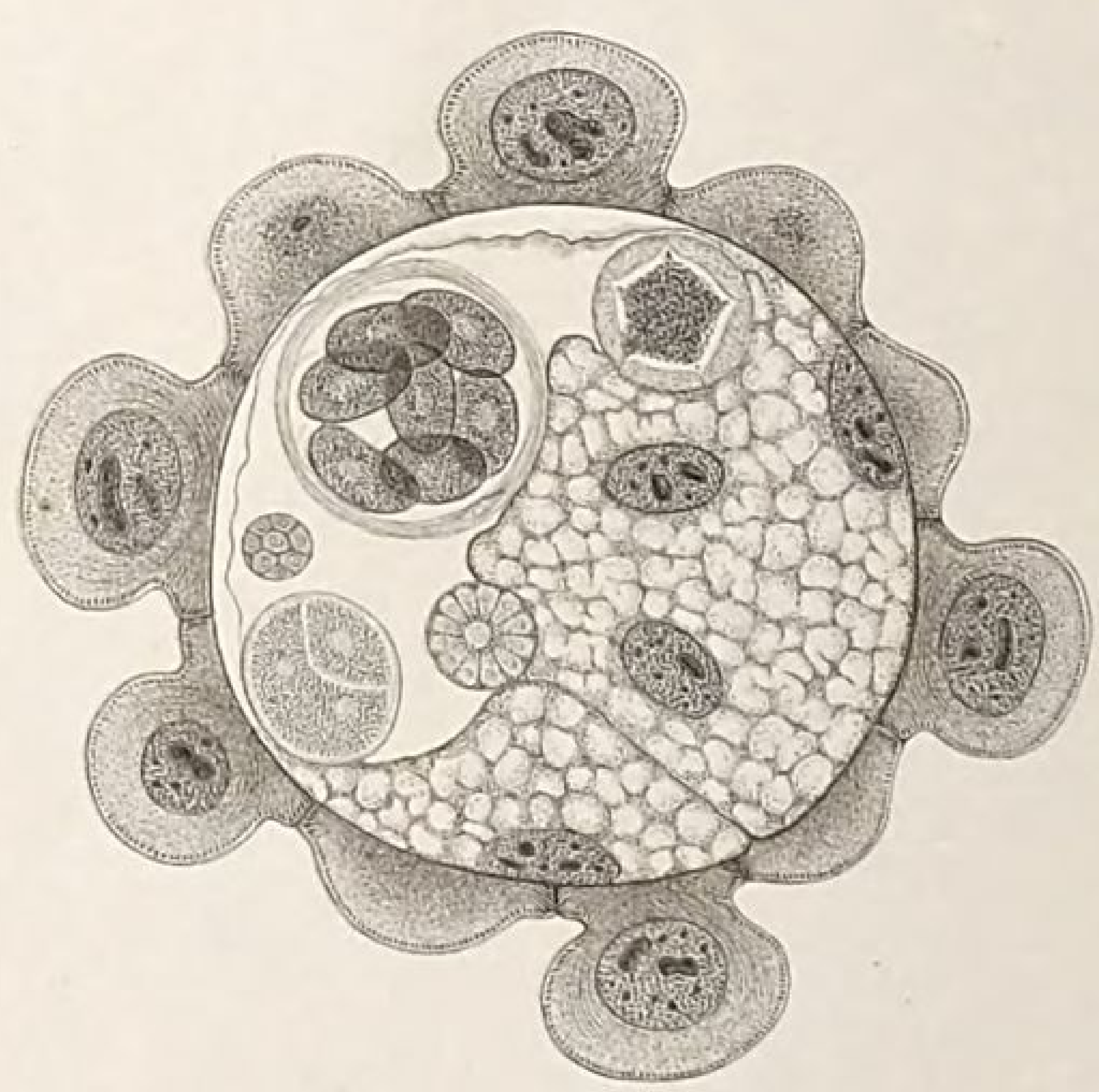


Fig. 8.



Fig. 13

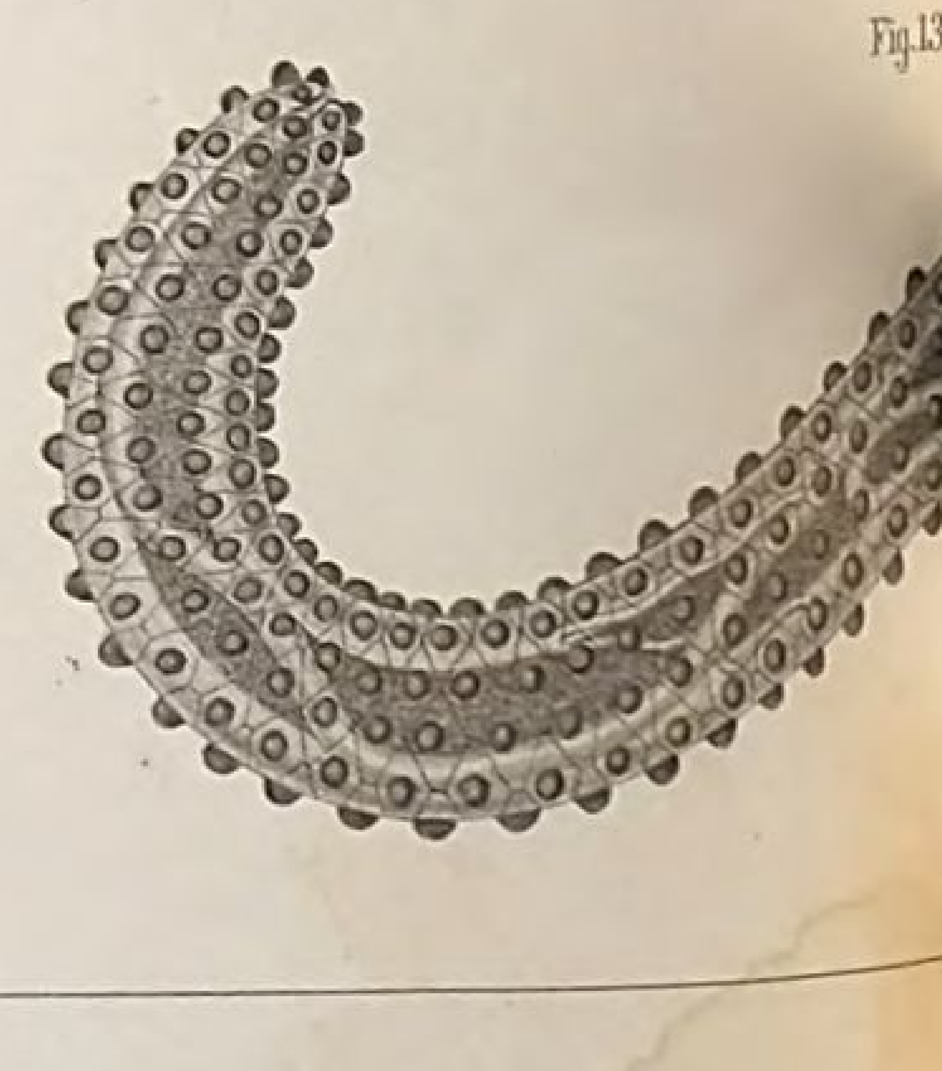
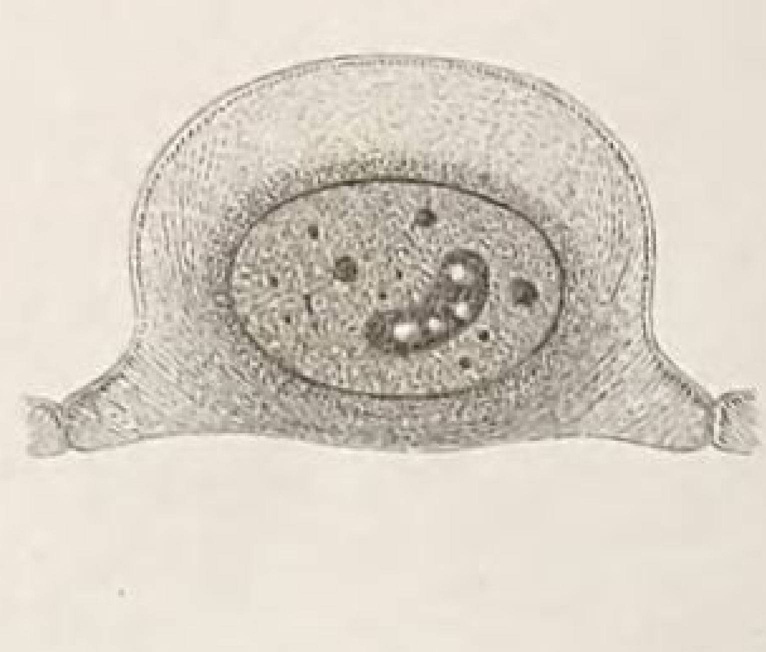


Fig. 14.



A. Looss del.

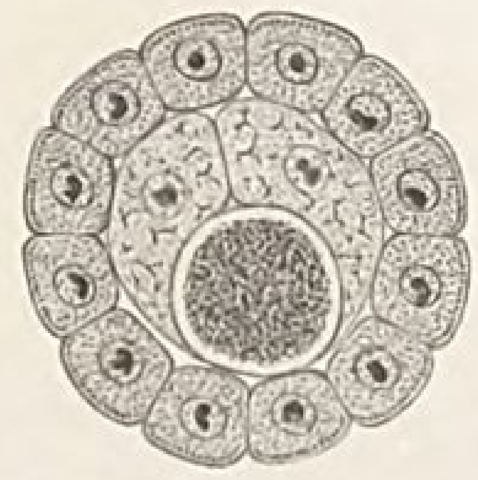


Fig. 9.

Fig. 6.



Fig. 12.

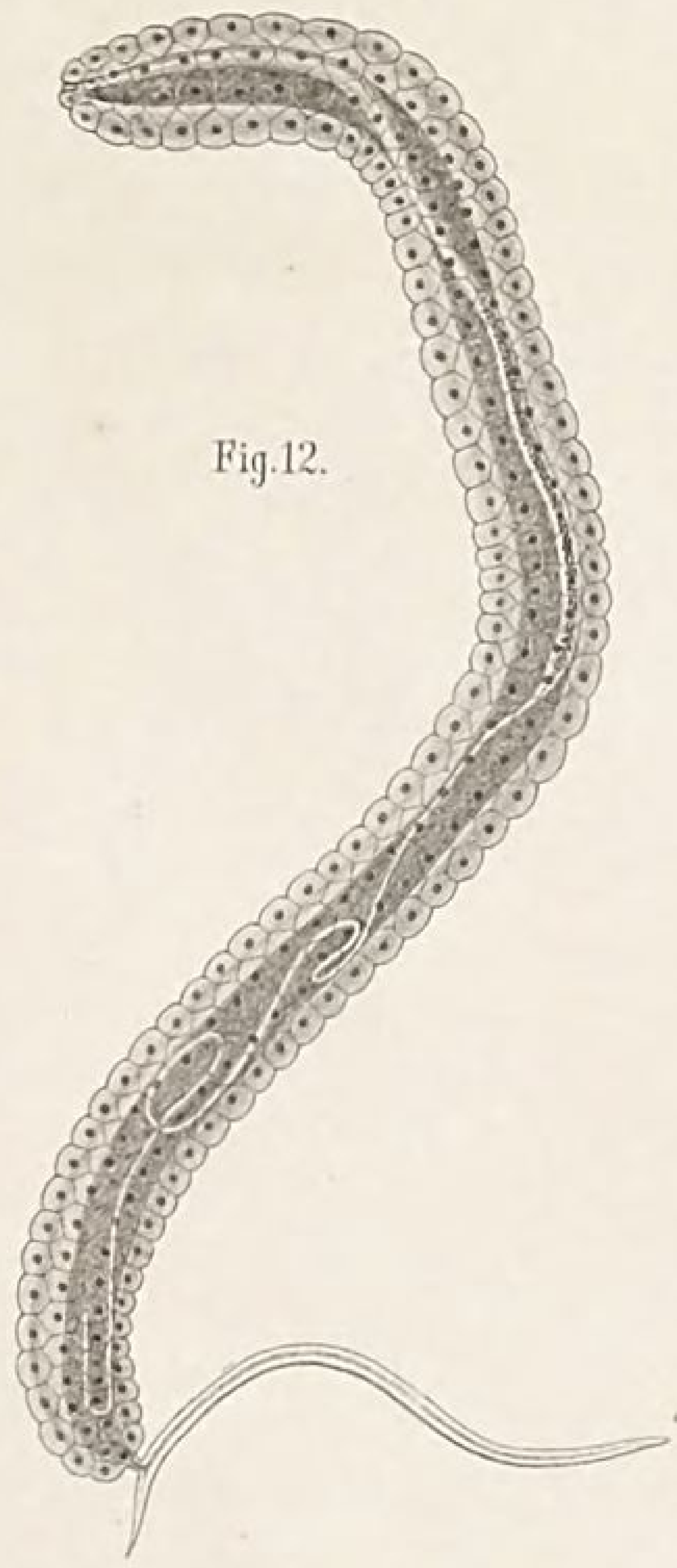


Fig. 3.

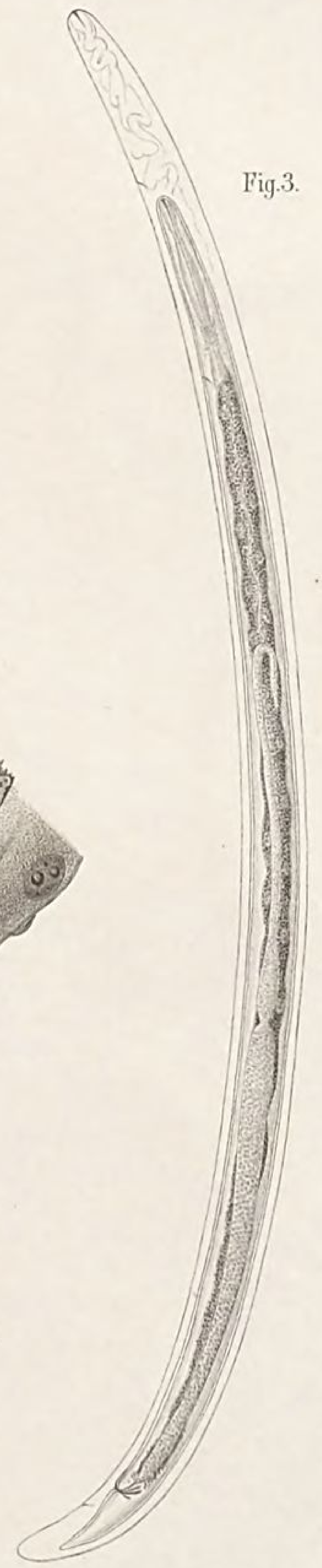




Fig. 11.

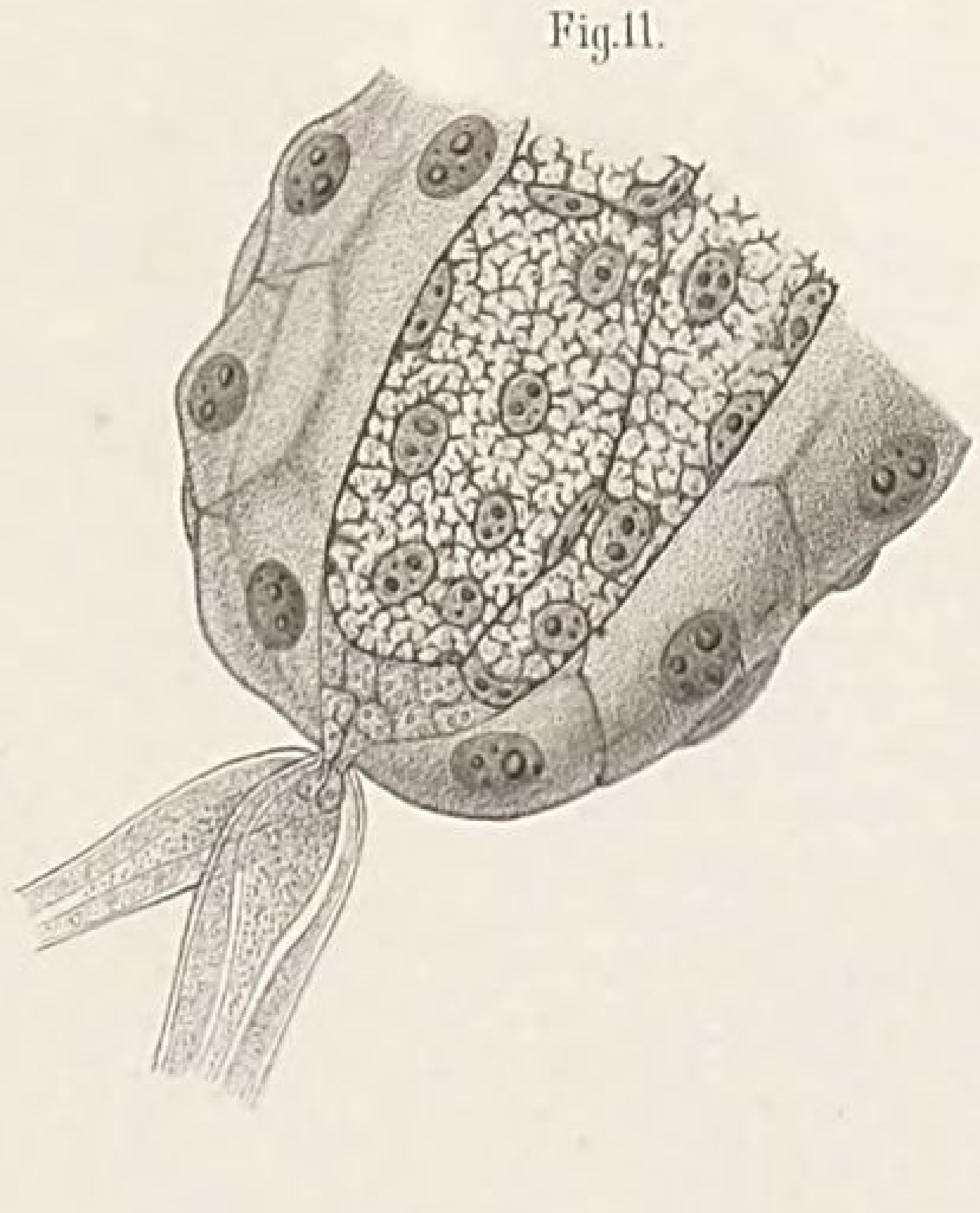
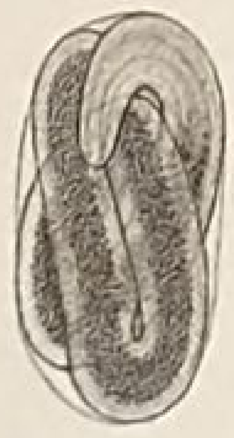


Fig. 16.



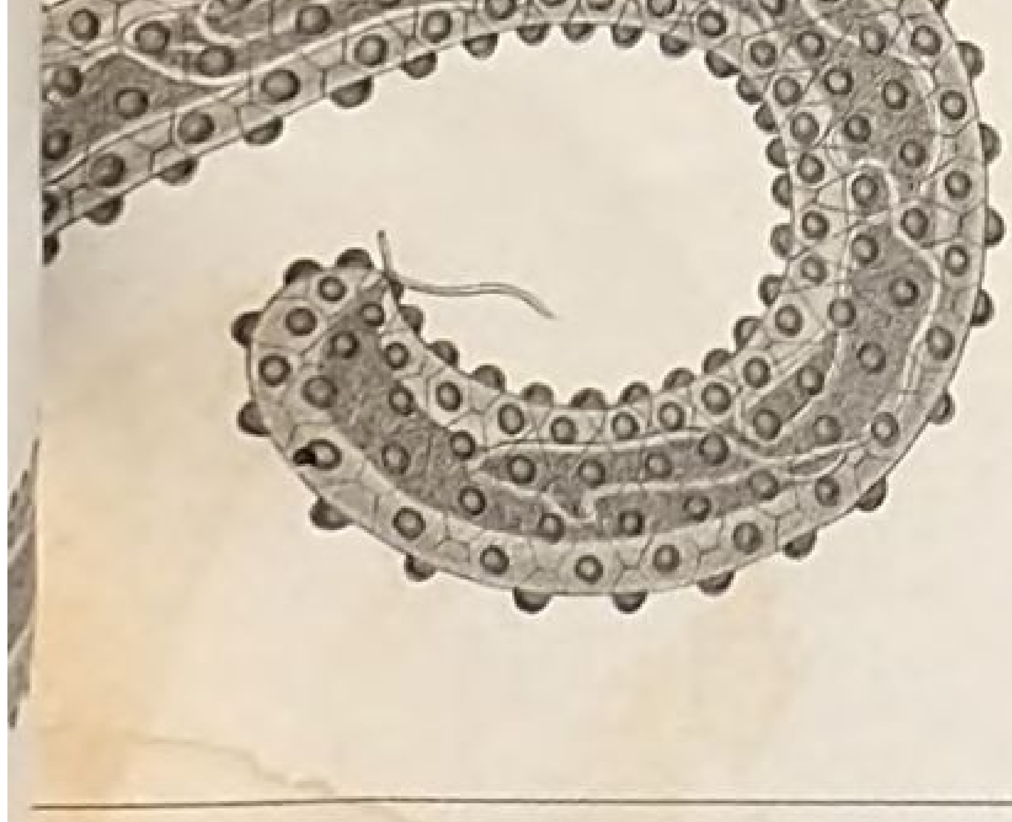
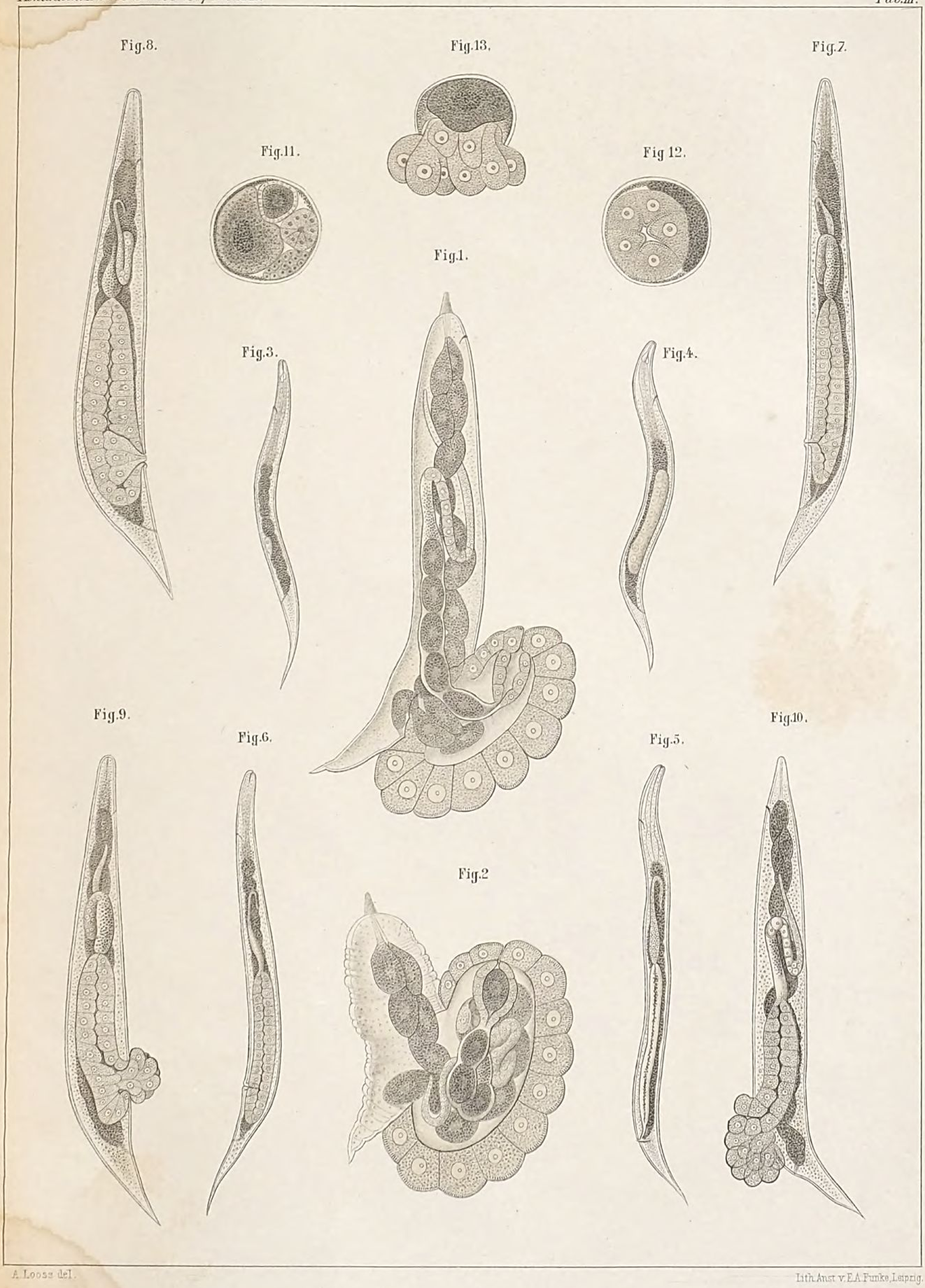


Fig. 2.



Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.


Fig. 8.
Fig. 13.
Fig. 7.
Fig. 11.
Fig 12.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 9.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 10.
Fig. 2

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ERSTE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XIII. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº IX.

MIT ELF HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1887.

Vom Verfasser übergeben den 22. Februar 1887.
Der Abdruck vollendet den 20. Mai 1887.

ÜBER DIE METHODE

DES

ARITHMETISCHEN MITTELS,

ERSTE ABHANDLUNG.

VON

C. NEUMANN,

ORD. MITGLIED DER KGL. SÄCHS. GESELLSCH. DER WISSENSCHAFTEN.

Die *Methode des arithmetischen Mittels* dürfte beachtenswerth sein für mancherlei physikalische Aufgaben. Insbesondere aber ist sie von Wichtigkeit für gewisse in der Functionentheorie auftretende und schwer zu absolvirende Existenzfragen, indem sie einen Ersatz gewährt für das so schöne und dereinst so viel benutzte, jetzt aber wohl für immer dahingesunkene *Dirichlet'sche Princip*.

In Folge dieser ihrer Wichtigkeit dürfte die Methode des arithmetischen Mittels seit der Zeit ihrer Publication vielfach studirt, durchforscht und zu erweitern gesucht sein, — ohne dass dabei indessen, abgesehen von einer Ausdehnung auf n Dimensionen*), nennenswerthe Resultate zu verzeichnen gewesen wären. Wenn man aber glauben wollte, dass die Methode ihren Höhepunkt, ihren höchsten Grad von Allgemeinheit bereits erreicht habe, nämlich glauben wollte, dass sie schlechtweg *nur* auf solche Curven und Flächen anwendbar sei, die *überall convex* sind; — so dürfte das doch wohl eine irrige Ansicht sein. Tauchen doch *über diese Grenze hinaus* mancherlei vereinzelte Fälle empor, in denen die Methode ihre Herrschaft behauptet. Ja noch mehr! Unter allen Fällen, die über diese Grenze hinaus bis jetzt untersucht worden sind, befindet sich (so weit mir bekannt) *kein einziger*, der *gegen* die Methode spräche.

So z. B. ist die Convergenz und Correctheit der Methode von mir constatirt worden für diejenige *convexconcave***) *Curve*, welche

*) *Riquier:* Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann pour la résolution de problèmes relatives aux fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$. — 1886.

**) Es mag mir gestattet sein, eine geschlossene Curve, welche *theils convex*, *theils concav* ist, kurzweg als *convexconcav* zu bezeichnen.

aus der Ellipse durch die dem Gesetz der reciproken Radien entsprechende Transformation sich ergiebt. Desgleichen habe ich die Correctheit der Methode nachgewiesen für ein *System von zwei concentrischen Kreisen*, ebenso für das *System zweier confocaler Ellipsen*, und ebenso auch für ein *System zweier excentrischer Kreise*; — wobei allerdings einer gewissen Restriction zu gedenken ist.

Es liegt nämlich im unmittelbaren Charakter der Methode, dass sie auf ein *System* von Curven oder Flächen immer erst dann anwendbar sein kann, wenn die auf diesen Curven oder Flächen vorgeschriebenen Functionen zuvor vermehrt worden sind um gewisse *Constanten*. Sind, um näher hierauf einzugehen, im Ganzen $(n + 1)$ geschlossene Curven oder Flächen σ, σ_1, σ_2, ... σ_n gegeben, und auf denselben resp. die Functionen f, f_1, f_2, ... f_n von Hause aus vorgeschrieben, so wird die Methode des arithmetischen Mittels (wie solches aus ihrer eigentlichen Natur von selber folgt) auf dieses Curven- oder Flächensystem immer erst dann anwendbar sein können, wenn die genannten Functionen zuvor ersetzt worden sind resp. durch f, $f_1 + k_1$, $f_2 + k_2$, ... $f_n + k_n$, wo k_1, k_2, ... k_n passend zu wählende *Constanten* vorstellen. Ohne auf die allgemeine Regel, nach welcher diese Constanten jedesmal zu bestimmen sind, hier näher einzugehen, will ich nur bemerken, dass jene Regel sich ausserordentlich einfach gestaltet für den *speciellen* Fall, dass die vorgeschriebenen Functionen f, f_1, f_2, ... f_n ebenfalls *Constanten* sind. Alsdann nämlich sind die Constanten k_1, k_2, ... k_n so zu wählen, dass $f = f_1 + k_1 = f_2 + k_2 = \ldots = f_n + k_n$ wird.

Ich beabsichtige, die Resultate meiner Untersuchungen allmählich zu publiciren. In der hier vorliegenden *ersten Abhandlung* werde ich die Methode des arithmetischen Mittels für eine *überall convexe* Curve oder Fläche darlegen. Dabei wird es namentlich meine Aufgabe sein, Dasjenige, was bereits früher — einigermassen verzettelt und vermischt mit allerhand physikalischen Betrachtungen — über diesen Gegenstand von mir publicirt worden ist, gegenwärtig in rein mathematischer Form, befreit von allen fremdartigen Beimischungen, *als ein übersichtliches und streng gegliedertes System* hinzustellen. Insbesondere wird dabei näher einzugehen sein auf die *Constante* λ, d. i. auf diejenige der gegebenen Curve oder Fläche eigenthümliche Constante, welche den eigentlichen *Angelpunkt* der Methode des arith-

metischen Mittels bildet, und welche von mir die *Configurationsconstante* dieser Curve oder Fläche genannt worden ist.

Das eigentliche Fundament der Methode des arithmetischen Mittels besteht nämlich darin, *dass diese (ihrer Natur nach positive) Configurationsconstante* λ *stets* < 1 (*nicht etwa* $\leqq 1$) *ist.*

In dieser Beziehung habe ich bereits früher*) dargelegt, dass für den *Kreis*

$$\lambda < \frac{3}{4},$$

und dass für die *Ellipse*

$$\lambda < 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^3$$

ist; dabei bezeichnen a und b die grosse und kleine Axe der Ellipse. Ferner habe ich damals dargethan, dass die Configurationsconstante λ einer *überall convexen und von geradlinigen Strecken freien geschlossenen Curve* der Formel entspricht:

$$\lambda < 1 - \frac{\Sigma}{4\pi\Delta};$$

dabei bezeichnet Σ den *Umfang* der Curve, und Δ den Durchmesser des *grössten* Kreises, welcher irgend drei (benachbarte oder nicht benachbarte) Punkte mit der Curve gemein hat. Desgleichen habe ich damals gezeigt, dass die Configurationsconstante λ einer *überall convexen und von ebenen Theilen freien geschlossenen Fläche* der Formel entspricht:

$$\lambda < 1 - \frac{\Sigma}{8\pi\Delta^2};$$

hier bezeichnet Σ das *Areal* (Complanationsresultat) der gegebenen Fläche, und Δ den Durchmesser der grössten Kugelfläche, welche mit der gegebenen Fläche irgend vier (benachbarte oder nicht benachbarte) Punkte gemein hat.

Diese Resultate meiner damaligen Untersuchung sind als *absolut strenge* zu bezeichnen. Und mit gleicher Strenge werde ich *gegenwärtig* (in § 6) nachweisen, dass jene Configurationsconstante λ um einen angebbaren Betrag kleiner als 1 ist für jede *beliebige* geschlossene Curve oder Fläche, falls nur dieselbe *überall convex* und *keine zwei-*

*) Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig, bei Teubner, 1877. — Daselbst auf Seite 173—179.

sternige ist. Allerdings ist solches auch schon damals von mir zu beweisen versucht worden. Genauer betrachtet, stützt sich aber mein damaliger Beweis auf das *Weierstrass'sche Theorem*, dass jedwede in einem gegebenen Spielraum stetige Function irgendwo in Erstreckung dieses Spielraums einen *Maximalwerth* besitzen muss; — und dabei erscheint es (dies ist der eigentliche Stein des Anstosses) einigermassen fraglich, ob jenes Weierstrass'sche Theorem auf die hier bei meiner Untersuchung vorliegenden sehr eigenthümlichen Verhältnisse *wirklich anwendbar* ist.

Es sei mir gestattet, hier noch auf einen andern Punkt meiner Untersuchungen aufmerksam zu machen. Man denke sich eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, und auf derselben irgend eine stetige Function f vorgeschrieben. Diese Function f mag in eine convergente Reihe entwickelt, und die Summe der p ersten Glieder dieser Reihe mit f^p bezeichnet sein. Ferner mögen Ψ und Ψ^p zwei über das *Innere* von σ ausgebreitete Functionen vorstellen. Und zwar sei Ψ diejenige Function, welche *auf* σ identisch mit f ist, und welche überdies *innerhalb* σ der Laplace'schen Gleichung $\Delta\Psi = 0$ und den bekannten Stetigkeitsanforderungen entspricht. Endlich sei Ψ^p diejenige Function, welche zu f^p in derselben Beziehung steht, wie Ψ zu f.

Denken wir uns nun die *Existenz* der Function Ψ^p, nicht etwa durch das Dirichlet'sche Princip, sondern auf einem *wirklich strengen* Wege erwiesen, so entsteht die Frage, ob aus dieser Existenz von Ψ^p unmittelbar auf die von Ψ geschlossen werden darf. Und insbesondere entsteht die Frage, ob, ebenso wie f^p, für $p = \infty$, gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Ψ^p gegen Ψ convergiren werde.

Diese Fragen, auf welche *Weierstrass* (vor ungefähr achtzehn Jahren, in einem Gespräch über die damals schon von mir gefundene Methode des arithmetischen Mittels) meine Aufmerksamkeit hinlenkte, sind *bejahend* zu beantworten, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass f^p auf σ überall *gleichmässig* gegen f convergirt; — wie ich solches in § 12 der gegenwärtigen Abhandlung zeigen werde.

Bevor ich die Abhandlung selber beginne, erlaube ich mir noch eine kurze Uebersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphen voranzuschicken.

§ 1 und § 2. — Es sei eine *geschlossene Curve* σ in der Ebene, oder eine *geschlossene Fläche* σ im Raume gegeben. Von den beiden Gebieten, in welche die Ebene resp. der Raum durch σ zerlegt wird, mag das *innere* mit $\mathfrak{J}$, das *äussere* mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet sein. Dabei soll die geschlossene Curve oder Fläche σ *ganz beliebig* gedacht werden, also z. B. mit *Ecken*, resp. mit *Ecken und Kanten* behaftet sein dürfen.

Solches vorangeschickt, sind zuvörderst (gewissermassen als die eigentlichen Bausteine meiner Untersuchung) die den Gebieten $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ entsprechenden *Fundamentalfunctionen* einzuführen. Ich setze Folgendes fest:

Unter einer Fundamentalfunction des *inneren* Gebietes $\mathfrak{J}$ ist jede Function U zu verstehen, welche 1) *in Erstreckung von* $\mathfrak{J}$ (d. i. in $\mathfrak{J}$, inclusive σ) stetig ist, und welche 2) *innerhalb* $\mathfrak{J}$ (d. i. in $\mathfrak{J}$, exclusive σ) der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta U = 0$ und gewissen Stetigkeitsanforderungen entspricht. Diese Stetigkeitsanforderungen betreffen die ersten und zweiten Ableitungen von U nach den rechtwinkligen Coordinaten.

Andererseits soll unter einer Fundamentalfunction des *äusseren* Gebietes $\mathfrak{A}$ eine Function U verstanden werden, die im Ganzen *vier* Bedingungen Genüge leistet. Es soll nämlich 1) die Function U *in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ stetig sein. Sodann soll 2) die Function U *innerhalb* $\mathfrak{A}$ der Gleichung $\Delta U = 0$ und gewissen Stetigkeitsanforderungen entsprechen. Diese letzteren beziehen sich wieder auf die ersten und zweiten Ableitungen von U nach den rechtwinkligen Coordinaten. Die 3) Bedingung bezieht sich auf irgend eine die Curve oder Fläche σ umschliessende Kreislinie oder Kugelfläche s_0 vom Radius r_0, und besteht darin, dass das über alle Elemente ds_0 derselben ausgedehnte Integral

$$\int \frac{dU}{dr_0}\, ds_0$$

verschwinden soll. Endlich verlangt die 4) Bedingung, dass die Function U für alle unendlich fernen Punkte *ein und denselben* Werth, und zwar einen *bestimmten endlichen* Werth besitzt*).

*) Beispiele für solche Fundamentalfunctionen sind leicht angebbar. Denkt man sich nämlich auf der Curve oder Fläche σ eine Massenbelegung gegeben, deren Dichtigkeit auf σ *stetig* ist, und bezeichnet man das (Logarithmische resp. Newton'sche) Potential dieser Massenbelegung auf *innere* Punkte mit V_i, auf *äussere* Punkte mit V_a, so ist V_i eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$. Hingegen wird V_a eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ nur dann sein, wenn die Gesammtmasse jener Belegung $= 0$ ist.

Ich betrachte nun zuvörderst die Fundamentalfunctionen des *inneren* Gebiets $\mathfrak{J}$. Für diese ergiebt sich der Satz, dass der *grösste* Werth, den eine solche Function in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ besitzt, unter allen Umständen auf der *Grenze* von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ anzutreffen ist. Gleiches ergiebt sich für den *kleinsten* Werth. Hieraus ergiebt sich alsdann weiter, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ vollständig bestimmt ist durch blosse Angabe ihrer auf der *Grenze* von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.

Demgemäss entsteht die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{J}$ *wirklich zu construiren*, falls ihre *Grenzwerthe* (d. i. ihre Werthe auf σ) *vorgeschrieben* sind. Ich werde diese Aufgabe das *innere Problem*, und die gesuchte Function U die jenen vorgeschriebenen Grenzwerthen *entsprechende* Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ nennen.

Dabei handelt es sich namentlich um die vorläufig noch *offen* bleibende Frage, ob dieses innere Problem stets eine Lösung besitzt, mit andern Worten um die Frage, ob eine solche den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ stets *existirt*, — also um diejenige Frage, welche man in früherer Zeit, auf Grund des *Dirichlet'schen Princips*, ohne Weiteres zu bejahen pflegte.

Es folgen nun analoge Betrachtungen über das *äussere* Gebiet $\mathfrak{A}$. Dieselben führen zu dem sogenannten *äusseren Problem*, welches darin besteht, die irgend welchen vorgeschriebenen Grenzwerthen *entsprechende* Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ zu construiren. Dabei ist zu beachten, dass das Gebiet $\mathfrak{A}$ nach Aussen ins Unendliche reicht, mithin nach Aussen *unbegrenzt* ist, dass also unter der *Grenze* von $\mathfrak{A}$ lediglich die Curve oder Fläche σ zu verstehen ist.

§ 3. — Man denke sich auf der geschlossenen Curve oder Fläche σ irgend eine daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben, zerlege σ in unendlich kleine Elemente $d\sigma$, und markire überdies irgendwo in der Ebene resp. im Raume (einerlei, ob *ausserhalb* σ, *auf* σ, oder *innerhalb* σ) einen Punkt x. Sodann bezeichne man die *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter mit $\pm (d\sigma)_x$, und zwar mit $+ (d\sigma)_x$ oder $- (d\sigma)_x$, je nachdem jener in x befindliche Beobachter die *innere* oder *äussere* Seite des Elementes vor Augen hat. Das so definirte $(d\sigma)_x$ multiplicire man mit dem in $d\sigma$

vorhandenem Werthe f, und bilde das über die ganze Curve oder Fläche σ sich ausdehnende Integral:

$$(1.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \, ,$$

so wie auch das (aus diesem für $f = 1$ sich ergebende) speciellere Integral:

$$(2.)\qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x \, .$$

Dabei soll h eine Zahl sein, welche in der *Ebene* stets $= 1$, im *Raume* stets $= 2$ ist; so dass also z. B. $2h\pi$ den Umfang einer Kreislinie vom Radius Eins, resp. das Areal einer Kugelfläche vom Radius Eins vorstellt.

Der Werth des Integrals w_x ist sofort angebbar. Bezeichnet man nämlich den variablen Punkt x, je nachdem er *ausserhalb* σ, *auf* σ, oder *innerhalb* σ liegt, resp. mit a, s oder i, so ergeben sich die Formeln:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} w_a &= 0 \, , \\ w_s &= \frac{\tau_s}{h\pi} = 1 - \vartheta_s \, , \\ w_i &= 2 \, , \end{aligned}$$

wo τ_s den Innenwinkel der Curve σ im Punkte s, resp. den *räumlichen* Innenwinkel der Fläche σ im Punkte s vorstellt. Dabei empfiehlt es sich (wie in der mittleren Formel schon angedeutet ist), an Stelle von τ_s eine etwas andere Grösse ϑ_s einzuführen mittelst der Substitution:

$$(3\text{a.})\qquad \tau_s = h\pi(1 - \vartheta_s) \, .$$

Aus dieser Definition von ϑ_s folgt sofort, dass die Grösse ϑ_s für alle Punkte s der gegebenen Curve oder Fläche σ *Null* ist, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Punkte, die in den *Ecken* der Curve σ, resp. in den *Ecken und Kanten* der Fläche σ liegen. Auch ergiebt sich, dass diese Grösse ϑ_s unter allen Umständen ein positiver oder negativer ächter Bruch ist, und dass sie insbesondere stets ein *positiver* ächter Bruch sein wird, sobald die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* ist.

§ 4. — Nachdem soeben w_x untersucht ist, handelt es sich jetzt um die Untersuchung von W_x (1.). Man markire auf σ irgend einen Punkt s, und bezeichne den Werth der Function W_x in diesem Punkte s mit W_s. Alsdann wird dieses W_s wesentlich *verschieden* sein von den-

jenigen Werthen W_a und W_i, welche jene Function in den mit s benachbarten Punkten a und i besitzt. Um diese zwischen W_s und und den Nachbarwerthen W_a und W_i vorhandene *Discontinuität* näher angeben zu können, beschreibe man um den anfangs markirten *festen* Punkt s (als Centrum) eine kleine Kreislinie oder Kugelfläche o_s. Alsdann werden alle innerhalb o_s vorhandenen Werthe W_a, falls man o_s ins Unendliche verkleinert, gegen einen *bestimmten festen Werth* convergiren, der von W_s *verschieden* ist, und zur Unterscheidung mit W_{as} bezeichnet werden mag. Desgleichen werden bei jener Verkleinerung von o_s alle innerhalb o_s befindlichen Werthe W_i ebenfalls gegen einen *bestimmten festen*, von W_s *verschiedenen* Werth convergiren, der W_{is} heissen mag. Diese dem gegebenen Punkte s zugehörigen, aus den Gebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ herstammenden *Convergenzwerthe* W_{as} und W_{is} stehen zu dem *direct in s selber vorhandenem Werthe* W_s in folgenden Beziehungen:

$$W_{as} = W_s + \vartheta_s f_s - f_s\,,$$
$$W_{is} = W_s + \vartheta_s f_s + f_s\,,$$

wo ϑ_s die in (3a.) angegebene Bedeutung hat, und f_s den Werth der auf σ vorgeschriebenen Function f im Punkte s bezeichnet. Man kann diese Beziehungen einfacher so schreiben:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} W_{as} &= f_s' - f_s\,, \\ W_{is} &= f_s' + f_s\,. \end{aligned}$$

Hier hat alsdann f_s' die Bedeutung:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + W_s\,,$$

woraus mit Rücksicht auf (1.) sich ergiebt:

$$(5.)\qquad f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\,.$$

Denkt man sich nun die W_a für alle Punkte a (ausserhalb σ), und die W_{as} für alle Punkte s (auf σ) gebildet, so zeigt sich, dass all' diese Werthe W_a und W_{as} zusammengenommen eine *in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *stetige* Function repräsentiren. Desgleichen zeigt sich, dass alle W_i und W_{is} zusammengenommen eine *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{J}$ *stetige* Function ausmachen. Diese Resultate lassen sich noch weiter vervollständigen, und führen alsdann zu dem Satze, *dass die Gesammtheit der* W_a, W_{as} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, *und dass ebenso die Gesammtheit*

der W_i, W_{is} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *repräsentirt*; — immer vorausgesetzt, dass die von Hause aus auf σ vorgeschriebenen Werthe f daselbst *stetig* sind.

§ 5. — Die Function f' ist, wie die Formel (5.) zeigt, unmittelbar ableitbar aus der vorgeschriebenen Function f. Denkt man sich nun unendlich viele Functionen

$$(6.)\qquad f,\ f',\ f'',\ f''',\ \ldots f^{(n)},\ \ldots,$$

von denen jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise abgeleitet sein soll, wie f' aus f, so finden die Formeln statt:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} f_s' &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\,, \\ f_s'' &= \vartheta_s f_s' + \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_s\,, \\ f_s''' &= \vartheta_s f_s'' + \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_s\,, \end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Auch ergiebt sich, dass f', f'', f''', ..., ebenso wie f selber, auf σ *stetig* sind. Die *grössten* und *kleinsten* Werthe, welche diese Functionen (6.) auf σ besitzen, mögen bezeichnet sein mit

$$G,\ G',\ G'',\ G''',\ \ldots\ G^{(n)},\ \ldots\ldots$$
$$K,\ K',\ K'',\ K''',\ \ldots\ K^{(n)},\ \ldots\ldots,$$

so dass z. B. G und K den *grössten* und *kleinsten* Werth der Function f vorstellen.

Um auf diese Constanten G, G', ... und K, K', ... näher eingehen zu können, wollen wir jetzt voraussetzen, die Curve oder Fläche σ sei *überall convex* und *keine zweisternige*. Dabei verstehen wir unter einer zweisternigen *Curve* eine solche, die (wie z. B. die Peripherie eines Vierecks) aus *zwei Winkeln* zusammengesetzt ist, andererseits unter einer zweisternigen *Fläche* eine solche, die (wie z. B. die Oberfläche desjenigen Körpers, der durch Rotation eines Dreiecks um eine Seite entsteht) aus *zwei Kegelflächen* zusammengesetzt ist; indem wir dabei die Scheitelpunkte jener beiden Winkel resp. Kegelflächen als die *beiden Sterne* bezeichnen. Allgemeiner würde man sich so auszudrücken haben: Sind auf einer geschlossenen Curve σ zwei *feste* Punkte p und q angebbar von solcher Art, dass *jedwede* Tangente der Curve entweder durch p oder durch q geht, so soll die Curve *zweisternig* genannt werden; gleichzeitig sollen

alsdann p, q ihre beiden *Sterne* heissen. Und genau dasselbe ist in Bezug auf die zweisternigen *Flächen* zu sagen; nur mit dem Unterschiede, dass hier statt der Tangenten die Tangentialebenen in Betracht kommen.

Eine *zweisternige Curve* ist daher nicht nur das *Viereck*, sondern auch das *Dreieck*. Bei letzterem liegt der eine Stern in einer Ecke, der andere in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seite. Andererseits wird zu den *zweisternigen Flächen* nicht nur das *Dihexaeder*, das *Rhomboeder*, das *Parallelepipedum*, sondern z. B. auch das *Tetraeder* gehören. Bei letzterem kann man den einen Stern in einer Ecke, den anderen in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Seitenfläche sich gelegen denken. Oder man kann auch den einen Stern in irgend einen Punkt der einen Kante, den andern in einen beliebigen Punkt der gegenüberliegenden Kante versetzen.

Setzt man nun voraus, dass die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* ist, so ergeben sich für die Constanten G, G', ... und K, K', ... die Relationen:

$$(8.)\qquad \begin{array}{l} G \geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots\ldots \\ K \leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots\ldots \end{array}$$

und überdies auch noch die Formel:

$$(9.)\qquad G^{(n)} - K^{(n)} \leqq (G - K)\,\lambda^n \,.$$

Hier bezeichnet λ die *Configurationsconstante* der gegebenen Curve oder Fläche σ, d. h. eine gewisse dieser Curve oder Fläche eigenthümliche *positive Constante*, von welcher sich nachweisen lässt, *dass sie stets* <1 *ist:*

$$(9\text{a.})\qquad \lambda < 1 \,.$$

Denkt man sich die Constanten G, G', ... und K, K', ... graphisch dargestellt als die Ordinaten zweier Curven, der Art, dass den Ordinaten G, K die Abscisse 0, den Ordinaten G', K' die Abscisse 1 u. s. w., allgemein den Ordinaten $G^{(n)}$, $K^{(n)}$ die Abscisse n angewiesen ist, so wird, nach (8.), die Curve $G\ G'\ G''$... *monoton sinken*, und die Curve $K\ K'\ K''$... *monoton steigen*. Ueberdies ist die Differenz der beiderlei Ordinaten:

$$G^{(n)} - K^{(n)}$$

durch Vergrösserung von n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad

hinabdrückbar; wie solches aus (9.) sofort sich ergiebt, falls man nur beachtet, dass die Constante λ ein positiver *ächter Bruch* ist.

Demgemäss werden also jene beiden Curven $G\ G'\ G''\ \ldots$ und $K\ K'\ K''\ \ldots$ im Unendlichen *zusammenfliessen*, d. h. sie werden im Unendlichen *ein und dieselbe Ordinate* haben. Bezeichnet man diese letztere mit C, so hat man die Formeln:

$$\lim_{n=\infty} G^{(n)} = C \ ,$$

$$\lim_{n=\infty} K^{(n)} = C \ .$$

Da nun für $n = \infty$ die beiden *extremen* Werthe $G^{(n)}$, $K^{(n)}$ der Function $f^{(n)}$ unter einander identisch sind, beide $= C$, so gilt Gleiches auch für alle *übrigen* Werthe dieser Function. D. h. *die Function $f^{(n)}$ verwandelt sich für $n = \infty$ in eine Constante, und zwar in die Constante C*; was angedeutet werden kann durch die Formel:

$$(10.)\qquad \lim_{n=\infty} f^{(n)} = C \ .$$

Beiläufig ergiebt sich aus der hier angestellten Betrachtung, dass die Constante C zwischen G und K liegt, ebenso zwischen G' und K', u. s. w.

§ 6. — Die *cardinale Eigenschaft* der *Configurationsconstanten* λ besteht in der Formel (9a.):

$$\lambda < 1 \ .$$

Diese Eigenschaft suche ich hier in § 6 von Neuem in wirklich strenger und zugleich möglichst allgemeiner Weise zu demonstriren, indem ich dabei als Ausgangspunkt für die Betrachtungen in der Ebene ein *geradliniges Fünfeck*, andererseits als Ausgangspunkt der räumlichen Betrachtungen ein *von sieben ebenen Flächen begrenztes Polyeder* nehme, und indem ich dabei einen Weg einschlage, der von dem vorhin (pag. 6) erwähnten Weierstrass'schen Theorem völlig *unabhängig* ist.

§ 6*a*. — In Betreff dieses nur wenige Seiten einnehmenden Paragraphs sei bemerkt, dass derselbe zu keinem nennenswerthen Resultat führt, sondern nur Betrachtungen enthält, die ich für späteren Gebrauch mir aufbewahren wollte.

§ 7 und § 8. — Hält man fest an der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* sein soll, so sind jetzt, auf Grund der in (6.), (7.) construirten Functionen f', f'', f''' ..., die Lösungen des äusseren und inneren Problemes sofort angebbar. Bildet man nämlich, von den Functionen f, f', f'', f''', ... ausgehend, die Integrale:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} W_x &= \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\,, \\ W_x' &= \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_x\,, \\ W_x'' &= \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_x\,; \end{aligned}$$

etc. etc.

und setzt man überdies:

$$(12.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - W_a - W_a' - W_a'' - \dots\,, \\ \Psi_i &= C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \dots\,, \end{aligned}$$

wo C dieselbe Constante sein soll, wie in (10.), so sind diese beiden Reihen stets *convergent*. Und gleichzeitig werden alsdann die *Lösungen des äusseren und inneren Problemes* dargestellt sein durch die Functionen Φ_a und Ψ_i. Oder genauer ausgedrückt: *Die den auf σ vorgeschriebenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ werden alsdann dargestellt sein respective durch die Gesammtheit der Φ_a, Φ_{as} und durch die Gesammtheit der Ψ_i, Ψ_{is}.*

Hiermit aber ist alsdann die in § 1 und § 2 noch *offen* gebliebene Frage, wenigstens für eine *gewisse Classe* von Curven und Flächen, beantwortet, nämlich folgendes Theorem bewiesen:

Denkt man sich eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche überall convex und keine zweisternige ist, übrigens aber mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf, und denkt man sich auf dieser Curve oder Fläche σ irgend welche daselbst stetigen Werthe vorgeschrieben, so wird jederzeit eine, und immer nur eine diesen Werthen f entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ existiren. Und ebenso wird alsdann jederzeit eine, und immer nur eine den Werthen f entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ existiren.

§ 9. — Man denke sich die auf σ vorgeschriebene Function f in eine auf σ *gleichmässig* convergente Reihe entwickelt, und bezeichne die Summe der p ersten Glieder dieser Reihe mit f^p. Oder allgemeiner: Man verstehe unter f^p eine mit einem variablen Parameter p behaftete Function, welche für jedwedes p auf σ *stetig* ist, und welche überdies, für $p = \infty$, auf σ *gleichmässig* gegen f convergirt. Ferner mögen Φ und Ψ die den Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ sein; und analoge Bedeutungen mögen Φ^p und Ψ^p haben mit Bezug auf die Werthe f^p. Alsdann gelangt man, wie ich zeigen werde, zu dem *Theorem*, dass, für $p = \infty$, Φ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ, und ebenso Ψ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *gleichmässig* gegen Ψ convergirt; — immer vorausgesetzt, dass die Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* ist.

§ 10 und § 11. — Um das Theorem von dieser Restriction zu befreien, werden in § 10 und § 11 zunächst zwei ganz specielle die *Kreislinie* und die *Kugelfläche* betreffende Untersuchungen angestellt.

§ 12. — Solches absolvirt, ergiebt sich alsdann folgende Verallgemeinerung des in Rede stehenden Theorems:

Ist die geschlossene Curve oder Fläche σ eine ganz *beliebige*, haben ferner f und f^p die schon genannten Bedeutungen, und gelingt es (durch irgend welche Methode oder vielleicht auch durch Zufall) die der Function f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ wirklich zu construiren, so wird hierdurch die *Existenz* derjenigen Fundamentalfunctionen Φ und Ψ, welche der eigentlich vorgeschriebenen Function f entsprechen, bereits *bewiesen* sein.

Und zwar wird alsdann, für $p = \infty$, die Function Φ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ, und die Function Ψ^p in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *gleichmässig* gegen Ψ convergiren.

Durch dieses Theorem finden die schon früher (pag. 6) erwähnten *Weierstrass'schen Fragen* ihre Beantwortung.

§ 1.

Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten inneren Gebietes $\mathfrak{J}$.

Die nachfolgenden Untersuchungen betreffen ziemlich gleichmässig *die Ebene* und *den Raum*. Dabei soll unter σ, sobald von der Ebene die Rede ist, eine gegebene *geschlossene Curve*, und sobald vom Raume die Rede ist, eine gegebene *geschlossene Fläche* verstanden werden. Von den beiden Theilen, in welche die unendliche Ebene durch die Curve σ, oder der unendliche Raum durch die Fläche σ zerfällt, mag der *innere* Theil mit $\mathfrak{J}$, der *äussere* mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet sein.

Definition. — *Wir wollen unter einer Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ jedwede Function $U = U(x, y)$, resp. $U = U(x, y, z)$ verstehen, die folgenden Bedingungen entspricht:*

(1.) *In Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ soll U eindeutig und stetig sein.*

(2.) *Innerhalb $\mathfrak{J}$ sollen die ersten und zweiten Ableitungen von U nach x, y, resp. x, y, z stetig sein, und überdies soll innerhalb $\mathfrak{J}$ die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \,, \quad resp. \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \,.$$

Dabei ist der Unterschied zwischen »in Erstreckung von $\mathfrak{J}$« und »innerhalb $\mathfrak{J}$« wohl zu beachten. Während nämlich die erste Ausdrucksweise das ganze Gebiet $\mathfrak{J}$ inclusive seiner Grenze, d. i. inclusive σ, betrifft, ist bei der zweiten Ausdrucksweise das Gebiet $\mathfrak{J}$ exclusive σ zu verstehen.

Auf eine Fundamentalfunction U sind, der soeben gegebenen Definition zufolge, die *Green'schen Sätze* anwendbar, allerdings nicht mit Bezug auf $\mathfrak{J}$ selber, wohl aber mit Bezug auf jedes *kleinere* Gebiet, das mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt. Markirt man z. B. *innerhalb* $\mathfrak{J}$ irgend einen Punkt p, und beschreibt man um p (als Centrum) mit dem Radius r eine *Kreislinie* resp. *Kugelfläche* s, und zwar der Art, dass s vollständig *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt, so werden jene

Green'schen Sätze anwendbar sein auf das von s umgrenzte Gebiet (d. i. auf die von s begrenzte *Kreisfläche* resp. auf den von s begrenzten *Kugelraum*). Man erhält in solcher Weise z. B. die Formeln:

$$\int \frac{dU}{dr}\, ds = 0\,, \tag{3.}$$

$$U_p = \frac{1}{2h\pi}\int\left(T\frac{dU}{dr} - U\frac{dT}{dr}\right) ds\,, \tag{4.}$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über alle Elemente ds der Kreislinie oder Kugelfläche s. Dabei bezeichnet U_p den Werth von U im Centrum p, ferner r den *Radius* von s. Ueberdies ist*) $h = 1$, resp. $= 2$, und $T = \log\frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$. Aus dieser Bedeutung von T ergiebt sich sofort, dass T und $\frac{dT}{dr}$ auf der Kreislinie oder Kugelfläche s *constant* sind; so dass man also die Formel (4.) auch so schreiben kann:

$$U_p = \frac{T}{2h\pi}\int\frac{dU}{dr}\, ds - \frac{1}{2h\pi}\,\frac{dT}{dr}\int U ds\,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (3.):

$$U_p = -\frac{1}{2h\pi}\,\frac{dT}{dr}\int U ds\,,$$

also, weil $h = 1$, resp. $= 2$, und $\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r}$, resp. $= -\frac{1}{r^2}$ ist:

$$U_p = \frac{\int U ds}{2\pi r}\,, \quad \text{resp. } U_p = \frac{\int U ds}{4\pi r^2}\,. \tag{5.}$$

Diese beiden Formeln (5.) sagen aus, dass der Werth von U im Punkte p gleich gross ist mit dem *arithmetischen Mittel* aller auf s vorhandenen Werthe von U, und führen also, falls man dieses arithmetische Mittel durch die Charakteristik $\mathfrak{M}$ andeutet, zu folgendem Resultate:

*) Auch in Zukunft soll das h in der *Ebene* stets $= 1$, im *Raume* stets $= 2$ sein. Und ebenso soll das T in der *Ebene* stets $= \log\frac{1}{r}$, im *Raume* stets $= \frac{1}{r}$ sein.

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, und construirt man eine völlig i n n e r h a l b *$\mathfrak{J}$ liegende Kreislinie oder Kugelfläche s, mit dem Centrum p, so wird*

$$(6.)\qquad U_p = \mathfrak{M}(U_s)$$

sein. D. h. es wird der in p vorhandene Werth U gleichgross sein mit dem arithmetischen Mittel aller auf s vorhandenen Werthe U.

Schon früher (im 3. Bd. der Math. Annal., pag. 341 u. 431), und ebenso in meinen Vorlesungen über die Abel'schen Integrale*), habe ich gezeigt, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ ihren *grössten* und *kleinsten* Werth stets *an der Grenze* von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ hat. Da aber dieser Satz an ersterer Stelle nicht mit der wünschenswerthen Uebersichtlichkeit, und an letzterer Stelle nicht mit der erforderlichen Strenge geführt worden ist, so erlaube ich mir, auf den Beweis des Satzes hier von Neuem einzugehen.

Versteht man unter U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, so sind offenbar nur zwei Fälle möglich:

I. Fall: U ist in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ *constant.* Dieser Fall bedarf keiner weiteren Untersuchung. Höchstens wird man bemerken können, dass in diesem Falle jener in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ vorhandene constante Werth zugleich auch der *grösste* sei, der in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ sich vorfindet, und ebenso auch der *kleinste.*

II. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ *inconstant.* In diesem Falle markire man irgendwo *innerhalb* $\mathfrak{J}$ einen Punkt p, und beschreibe um p (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche s_1, der Art, dass s_1 völlig *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt. Alsdann muss U *innerhalb* s_1 *inconstant* sein. [Denn wäre es innerhalb s_1 constant, so würde diese Constanz, nach bekanntem Satze**), auf *sämmtliche* Punkte des Gebietes $\mathfrak{J}$ sich ausdehnen; was dem Charakter des hier betrachteten II. Falles widerspricht]. Da nun also die Function U *innerhalb* s_1 *inconstant* ist, so wird sie daselbst z. B. nicht überall $= U_p$ sein können. Dem-

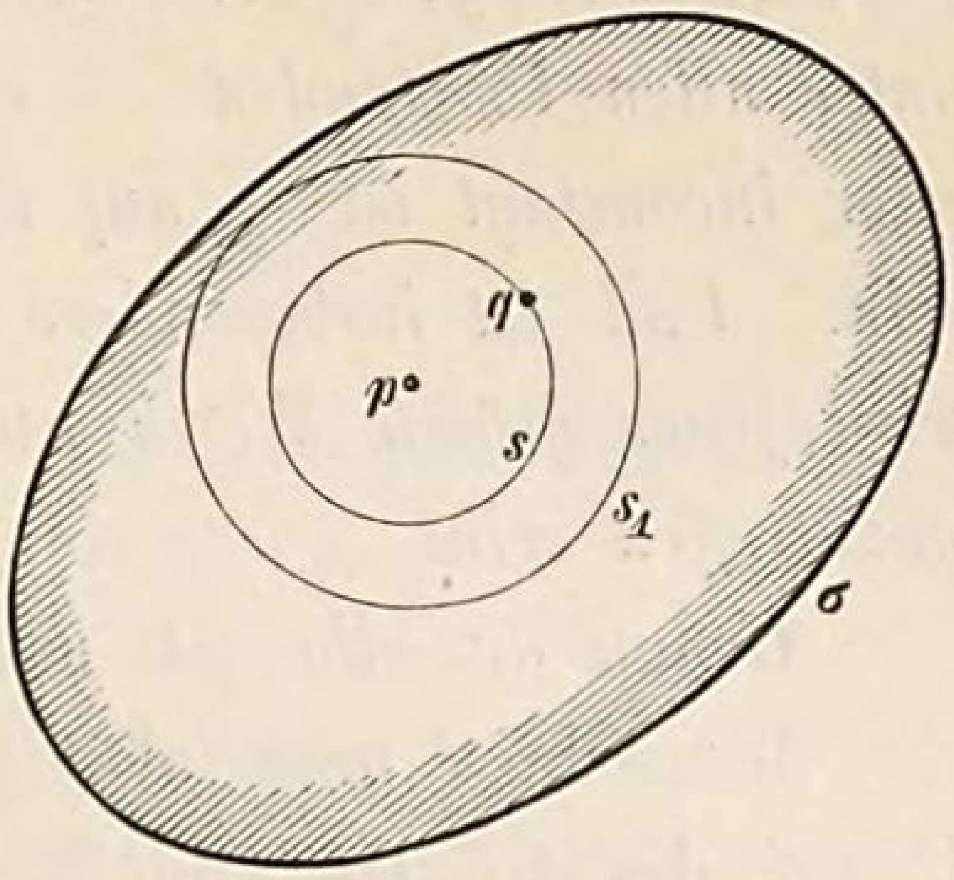
*) Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie der Abel'schen Integrale. II. Aufl. 1884, pag 395.

**) Nämlich nach einem schon von *Gauss* aufgestellten Satze. Der von Gauss selber für diesen Satz gegebene wenig zuverlässige Beweis [Gauss' Werke, Bd. 5, Seite 223] kann leicht durch einen *absolut strengen* Beweis ersetzt werden; wie solches von mir angedeutet worden ist in den Math. Annalen, Bd. 3, Seite 339 und 430.

gemäss muss innerhalb s_1 irgend ein Punkt q angebbar sein, in welchem die Function U von U_p *verschieden* ist:

$$(\alpha.)\qquad U_q \neq U_p\ .$$

Legt man nun*) durch diesen Punkt q eine neue Kreislinie oder Kugelfläche s, concentrisch zu s_1, so muss [nach Satz (6.)] der im Centrum von s vorhandene Werth U_p das arithmetische Mittel all' derjenigen Werthe sein, welche U auf s besitzt:



$$(\beta.)\qquad U_p = \mathfrak{M}(U_s)\ .$$

Hieraus folgt, dass *entweder* die auf s vorhandenen U's *sämmtlich* $= U_p$ sind, *oder aber*, dass unter jenen auf s vorhandenen U's solche sich vorfinden, die $< U_p$, und gleichzeitig auch solche, die $> U_p$ sind. Die *erste* Möglichkeit ist abgeschnitten durch die Formel $(\alpha.)$ [derzufolge der auf s liegende Punkt q mit einem Werthe U_q behaftet ist, der *nicht* $= U_p$ ist]. Es bleibt also nur die *zweite* Möglichkeit übrig; und wir gelangen daher zu der Gewissheit, dass unter den auf s vorhandenen U's solche vorhanden sind, die $< U_p$, und gleichzeitig auch solche, die $> U_p$ sind. Jener im Punkte p vorhandene Werth U_p kann also nicht der *grösste* von all' denjenigen Werthen sein, die U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ besitzt. Dieser Satz aber kann, weil der Punkt p innerhalb $\mathfrak{J}$ *beliebig* gewählt war, von Neuem wiederholt werden für jedweden *anderen* Punkt p, falls nur derselbe wiederum *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt; sodass man also sagen kann:

(γ.) Der *grösste* Werth, den U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{J}$ besitzt, ist in einem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{J}$ niemals anzutreffen.

Folglich wird derselbe nur *an der Grenze* von $\mathfrak{J}$, d. i. nur auf σ anzutreffen sein. Analoges ergiebt sich offenbar für den *kleinsten* Werth. *Hiermit ist die Discussion des II. Falles beendet.*

*) In der vorstehenden Figur ist die *Grenze des betrachteten Gebietes* $\mathfrak{J}$, d. i. die Curve oder Fläche σ, *schraffirt*.

Wir können schliesslich die Resultate bei Betrachtung des I. und II. Falles *zusammenfassen*, indem wir uns folgendermassen ausdrücken:

Erster Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, so wird der grösste Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ besitzt, unter allen Umständen — einerlei ob U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ constant oder inconstant ist — auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) anzutreffen sein. Und ist insbesondere U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ inconstant, so wird jener grösste Werth nur auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. nur auf σ) anzutreffen sein.*

Genau dasselbe gilt vom kleinsten Werthe.

Betrachtet man also die Werthe, welche eine solche Function U auf der Grenze von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ besitzt, und bezeichnet man den kleinsten und grössten dieser auf σ vorhandenen Werthe resp. mit K und G, so werden die Werthe, welche U *innerhalb* $\mathfrak{J}$ besitzt, ebenfalls sämmtlich zwischen K und G liegen, also z. B. *constant* sein, falls $K = G$ ist. Somit ergiebt sich folgender

Zweiter Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$, und setzt man voraus, dass U auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) constant ist, so wird U in Erstreckung von $\mathfrak{J}$ allenthalben constant sein.*

Hieraus folgt sofort, dass eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe vollständig bestimmt ist. Denn existirten zwei solche Functionen U und U', beide mit denselben Werthen auf σ, so würde offenbar die Differenz $U - U'$ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein, die auf σ überall $= 0$ ist. Zufolge des vorhergehenden Satzes würde daher diese Differenz $U - U'$ den Werth 0 haben *in ganzer Erstreckung* von $\mathfrak{J}$. — *Q. e. d.*

Es ergiebt sich somit folgender

Dritter Satz. — *Eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}$ ist vollständig bestimmt durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.*

Nach Constatirung dieses Satzes entsteht von selber die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{J}$ wirklich zu construiren, falls ihre Werthe *an der Grenze* von $\mathfrak{J}$ (d. i. auf σ) in *beliebiger* jedoch *stetiger* Weise vorgeschrieben sind. Ich werde diese Aufgabe das *innere Problem* nennen, und jene gesuchte Function U

kurzweg als *die den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ bezeichnen. — Dabei handelt es sich namentlich um die Frage, ob eine derartige Function stets *existirt*, — eine Frage, die man früher, auf Grund des *Dirichlet'schen Princips*, ohne Weiteres zu bejahen gewöhnt war.

§ 2.

Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten äusseren Gebietes 𝔄.

Das in der Ebene oder im Raume gegebene Gebiet $\mathfrak{A}$ [vgl. den Anfang des vorhergehenden §.] ist innerlich von der geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzt, und erstreckt sich nach Aussen ringsum ins Unendliche. Dieses Gebiet $\mathfrak{A}$ ist also nach Aussen *unbegrenzt*, und besitzt mithin überhaupt nur *eine* Grenze, welche dargestellt ist durch jene Curve oder Fläche σ.

Definition. — *Wir wollen unter einer Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *jede Function* $U = U(x, y)$ *resp.* $U = U(x, y, z)$ *verstehen, welche folgenden vier Bedingungen entspricht.*

(1.) *In Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ *soll* U *eindeutig und stetig sein.*

(2.) *Innerhalb* $\mathfrak{A}$ *sollen die ersten und zweiten Ableitungen von* U *nach* x, y, *resp. nach* x, y, z *stetig sein, und überdies soll innerhalb* $\mathfrak{A}$ *die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0\,, \quad \textit{resp.} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0\,.$$

(3.) *Es ist gegeben irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche* s_0, *welche die Curve oder Fläche* σ *umschliesst, und vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}$ *liegt. Und es wird verlangt, die Function* U *solle von solcher Beschaffenheit sein, dass das über alle Elemente* ds_0 *dieser Kreislinie oder Kugelfläche* s_0 *ausgedehnte Integral*

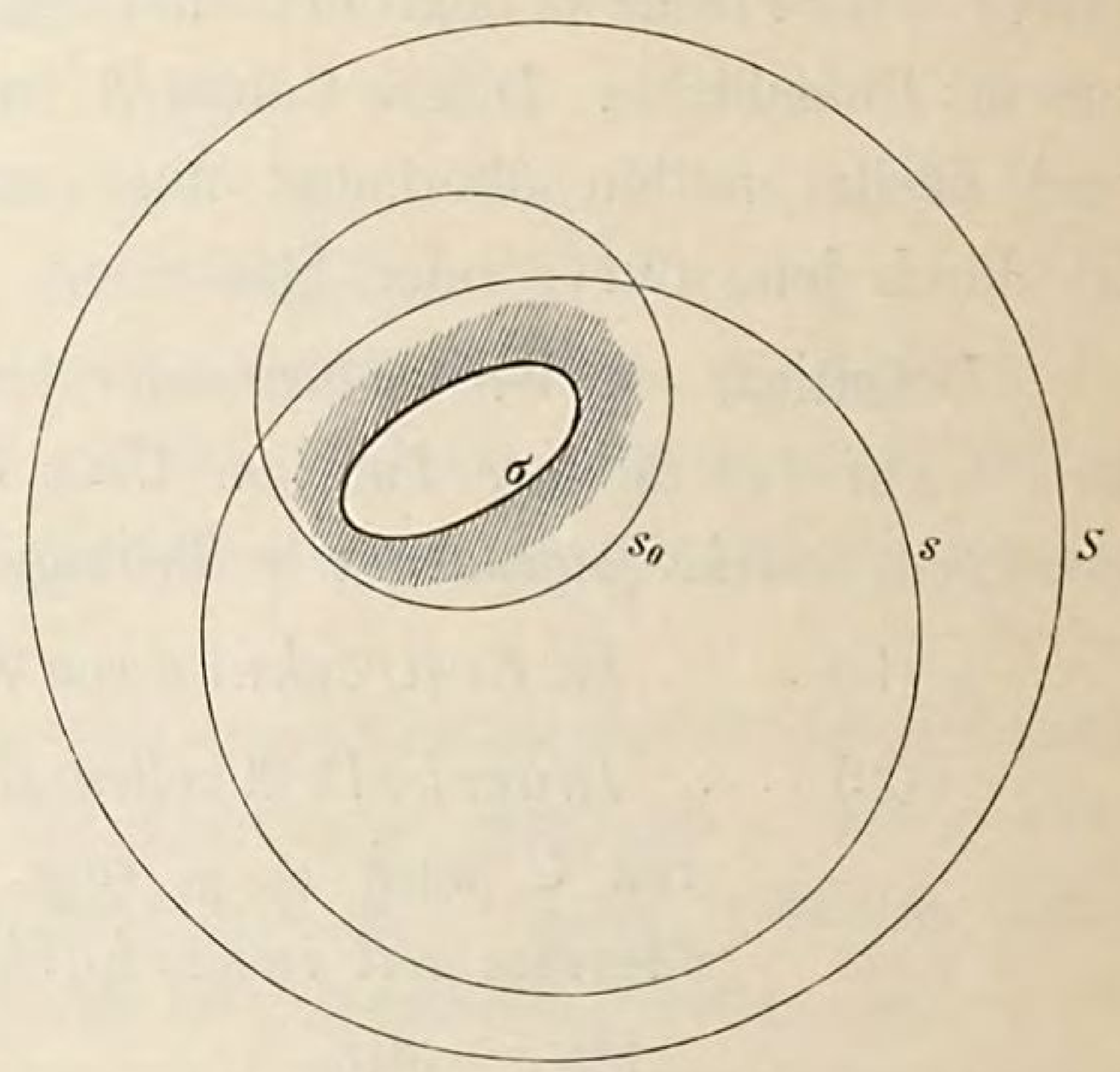
$$\int \frac{dU}{dr_0}\, ds_0$$

$= 0$ *sei. Dabei bezeichnet* r_0 *den Radius von* s_0, *mithin* $\frac{dU}{dr_0}$ *den Differentialquotienten nach der Richtung des Radius.*

(4.) *Die Function U soll in allen unendlich fernen Punkten ein und denselben Werth, und zwar einen bestimmten endlichen Werth haben.*

Oder genauer ausgedrückt: Denkt man sich um einen festen Punkt mit sehr grossem Radius R eine Kreislinie oder Kugelfläche S beschrieben, so sollen die Differenzen sämmtlicher Werthe, welche U ausserhalb S besitzt, durch Vergrösserung von R unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.

Auf eine so definirte Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{A}$ sind die *Green'schen Sätze* [wie aus (1.), (2.) folgt] anwendbar; allerdings nicht mit Bezug auf $\mathfrak{A}$ selber, wohl aber mit Bezug auf jedes *endliche* Gebiet, welches mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Denkt man sich z. B. irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s construirt, welche [ebenso wie s_0; vgl. (3.)] die Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, und denkt man sich überdies eine Kreislinie oder Kugelfläche S construirt, welche sowohl s wie auch s_0 umschliesst*), so werden zufolge jener Green'schen Sätze die Formeln stattfinden:



$$(5.)\qquad \int \frac{dU}{dr_0}\, ds_0 = \int \frac{dU}{dR}\, dS\,,$$

$$(6.)\qquad \int \frac{dU}{dr}\, ds = \int \frac{dU}{dR}\, dS\,,$$

wo r_0, r, R die Radien von s_0, s, S vorstellen. Nach (3.) ist aber die *linke* Seite von (5.) $= 0$, folglich auch die *rechte*. Hieraus

*) In der beistehenden Figur ist die *Grenze* σ des nach Aussen sich ringsum ins Unendliche erstreckenden Gebietes $\mathfrak{A}$ *schraffirt* angegeben.

folgt weiter, dass die *linke* Seite von (6.) ebenfalls $= 0$ ist. Also der Satz:

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und versteht man unter s irgend eine die Curve oder Fläche σ umschliessende, und völlig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegende Kreislinie oder Kugelfläche, so wird das über s ausgedehnte Integral

$$(7.)\qquad \int \frac{dU}{dr}\, ds$$

*stets $= 0$ sein. Hier bezeichnet r den Radius von s**).

Construirt man jetzt eine zu s *concentrische* [in der Figur *nicht* gezeichnete] Kreislinie oder Kugelfläche s_1, welche, ebenso wie s, die Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, so ergiebt sich, auf Grund der Green'schen Sätze, die Formel:

$$(8.)\qquad \int \left(T\frac{dU}{dr} - U\frac{dT}{dr}\right) ds = \int \left(T_1\frac{dU}{dr_1} - U\frac{dT_1}{dr_1}\right) ds_1\,,$$

wo r und r_1 die Radien von s und s_1 vorstellen, während $T = \log\frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$, und $T_1 = \log\frac{1}{r_1}$, resp. $= \frac{1}{r_1}$ sein soll. Demgemäss sind T und $\frac{dT}{dr}$ auf s *constant*, ebenso T_1 und $\frac{dT_1}{dr_1}$ auf s_1. Die Formel (8.) kann daher auch so geschrieben werden:

$$T\int \frac{dU}{dr}\, ds - \frac{dT}{dr}\int U ds = T_1\int\frac{dU}{dr_1}\, ds_1 - \frac{dT_1}{dr_1}\int U ds_1\,,$$

oder, weil die hier in T und T_1 multiplicirten Integrale [zufolge des Satzes (7.)] $= 0$ sind, auch so:

$$\frac{dT}{dr}\int U ds = \frac{dT_1}{dr_1}\int U ds_1\,;$$

und diese Formel endlich kann, weil $T = \log\frac{1}{r}$, resp. $= \frac{1}{r}$, mithin $\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{r}$, resp. $= -\frac{1}{r^2}$ ist, und Analoges von $\frac{dT_1}{dr_1}$ gilt, auch so geschrieben werden:

$$(9.)\qquad \frac{\int U ds}{2\pi r} = \frac{\int U ds_1}{2\pi r_1}\,, \text{ resp. } \frac{\int U ds}{4\pi r^2} = \frac{\int U ds_1}{4\pi r_1^2}\,.$$

*) Man übersieht sofort, dass dieser Satz auch dann noch gelten wird, wenn man unter s eine *ganz beliebige* geschlossene Curve oder Fläche versteht, falls nur dieselbe die Curve oder Fläche σ umschliesst und völlig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Statt $\frac{dU}{dr}$ ist alsdann $\frac{dU}{dn}$ zu substituiren, wo n die *Normale* von s vorstellt. — Eine solche Ausdehnung des Satzes ist aber einstweilen für unsere Zwecke nicht erforderlich.

Demgemäss gelangt man, unter Anwendung des schon vorhin eingeführten Zeichens $\mathfrak{M}$, zu folgendem Satze:

Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und sind ferner s und s_1 irgend zwei concentrische Kreislinien oder Kreisflächen, welche die Curve oder Fläche σ umschliessen, und vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegen, so wird stets

$$(10.) \qquad \mathfrak{M}(U_s) = \mathfrak{M}(U_{s_1})$$

sein. D. h. es wird alsdann das arithmetische Mittel der auf s vorhandenen Werthe U stets eben so gross sein, wie das arithmetische Mittel der auf s_1 liegenden Werthe U.

Nach (4.) hat U für alle unendlich fernen Punkte *ein und denselben* Werth. Bezeichnet man denselben mit Γ, und lässt man jetzt in der Formel (10.) den Radius der Kreislinie oder Kugelfläche s_1 ins *Unendliche* wachsen, so nimmt jene Formel die Gestalt an: $\mathfrak{M}(U_s) = \Gamma$. Also der Satz:

Bezeichnet U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, ferner Γ ihren Werth im Unendlichen [vgl. (4.)], *und denkt man sich irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s construirt, welche die Curve oder Fläche σ umschliesst, und vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, so wird*

$$(11.) \qquad \mathfrak{M}(U_s) = \Gamma$$

sein. D. h. das arithmetische Mittel der auf s befindlichen Werthe U wird stets $= \Gamma$ sein.

Es sei nun U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$. Wir stellen uns die Aufgabe, diese Function näher zu untersuchen, und namentlich diejenigen Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$ zu entdecken, in denen sie am *Grössten* und *Kleinsten* ist. Offenbar sind nur zwei Fälle möglich:

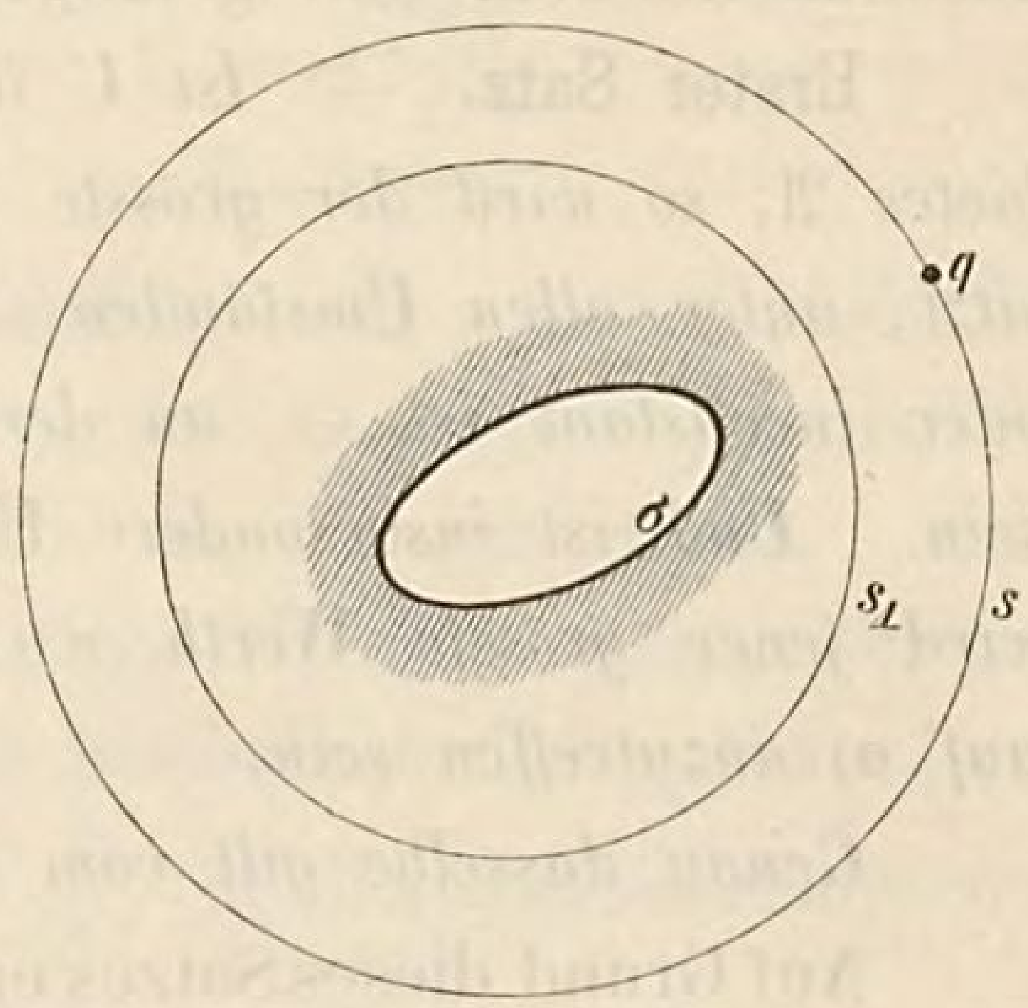
I. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *constant*. Alsdann wird der *grösste* Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, in jedwedem Punkte dieses Gebietes anzutreffen sein; ebenso der *kleinste*.

II. Fall: U ist in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *inconstant*. In diesem Falle kann man, was den *grössten* Werth von U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ betrifft, genau ebenso verfahren, wie im vorhergehenden § [bei der Discussion des *damaligen* II. Falles; pag. 18], und gelangt auf diese Weise zu dem Resultat, dass jener grösste Werth in keinem

Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$ anzutreffen ist, oder, genauer ausgedrückt, zu dem Resultat,

(α.) dass jener *grösste Werth* in keinem *endlichen* Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$ anzutreffen ist.

Denn es könnte vielleicht der in einem innern Punkte p vorhandene Werth U_p gegen jenen *grössten Werth* convergiren, sobald man den Punkt p auf irgend welchem Wege *ins Unendliche* gehen lässt. — Um auf diese Frage näher einzugehen, construire man eine sehr grosse Kreislinie oder Kugelfläche s_1, der Art, dass sie die gegebene Curve oder Fläche σ *umschliesst*, und vollständig *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt. Alsdann muss U *ausserhalb* s_1 *inconstant* sein. [Denn wäre es ausserhalb s_1 constant, so würde diese Constanz, nach einem bekannten Satze*), sich ausdehnen über *sämmtliche* Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$; was dem Charakter des hier betrachten II. Falles widerspricht]. Da nun also die Function U *ausserhalb* s_1 *inconstant* ist, so wird sie daselbst z. B. nicht überall $= \Gamma$ sein können, wo Γ den Werth der Function U im Unendlichen vorstellen soll [vgl. (4.)]. Demgemäss muss *ausserhalb* s_1 irgend ein Punkt q angebbar sein, in welchem die Function U von Γ *verschieden* ist:



(β.) $U_q \neq \Gamma$.

Legt man nun durch diesen Punkt q eine neue Kreislinie oder Kugelfläche s, concentrisch zu s_1, so muss [nach Satz (11.)] das arithmetische Mittel der auf s vorhandenen Werthe von U identisch mit Γ sein:

(γ.) $\Gamma = \mathfrak{M}(U_s)$.

Hieraus folgt, dass *entweder* die auf s vorhandenen U's *sämmtlich* $= \Gamma$ sind, *oder aber*, dass unter jenen auf s vorhandenen U's solche sich vorfinden, die $< \Gamma$, und gleichzeitig auch solche, die $> \Gamma$ sind. Die *erste* Möglichkeit ist aber abgeschnitten durch die Formel (β.), [derzufolge der auf s liegende Punkt q mit einem Werthe U_q be-

*) Es ist hier wieder der schon auf pag. 18 benutzte *Gauss*'sche Satz gemeint.

haftet ist, der *nicht* $= \Gamma$ ist]. Es bleibt also nur die *zweite* Möglichkeit übrig; und wir gelangen somit zu der Gewissheit, dass unter den auf s vorhandenen U's solche vorhanden sind, die $< \Gamma$, und gleichzeitig auch solche, die $> \Gamma$ sind. Jener im Unendlichen vorhandene Werth Γ kann also nicht der *grösste* von all' denjenigen Werthen sein, die U in Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ besitzt. Hierdurch aber gewinnt der in (α.) ausgesprochene Satz folgende Fassung:

(δ.) Der *grösste* Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, ist in einem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{A}$, mag nun derselbe im Endlichen oder im Unendlichen gedacht werden, niemals anzutreffen.

Folglich wird jener *grösste* Werth nur *an der Grenze* von $\mathfrak{A}$, also nur auf σ anzutreffen sein. Analoges ergiebt sich offenbar für den *kleinsten* Werth. *Hiermit ist die Discussion des* II. *Falles beendet.*

Schliesslich können wir die Resultate bei Betrachtung des I. und II. Falles [das Resultat des II. Falles ist in (δ.) ausgesprochen], zusammenfassen, und gelangen so zu folgendem Satz:

Erster Satz. — *Ist U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, so wird der grösste Werth, den U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ besitzt, unter allen Umständen — einerlei ob U im Gebiete $\mathfrak{A}$ constant oder inconstant ist — an der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) anzutreffen sein. Und ist insbesondere U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ inconstant, so wird jener grösste Werth nur auf der genannten Grenze (d. i. nur auf σ) anzutreffen sein.*

Genau dasselbe gilt vom kleinsten Werthe.

Auf Grund dieses Satzes ergeben sich nun [genau ebenso wie früher beim Gebiete $\mathfrak{J}$; vergl. pag. 20] zwei weitere Sätze. Dieselben lauten:

Zweiter Satz. — *Ist U eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und setzt man voraus, dass U auf der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) constant ist, so wird U in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ allenthalben constant sein.*

Dritter Satz. — *Eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist vollständig bestimmt durch blosse Angabe ihrer auf der Grenze von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) vorhandenen Werthe.*

Es entsteht dabei die Aufgabe, eine Fundamentalfunction U des Gebietes $\mathfrak{A}$ wirklich zu construiren, falls ihre Werthe *an der Grenze*

von $\mathfrak{A}$ (d. i. auf σ) in *beliebiger*, jedoch *steliger* Weise vorgeschrieben sind. Ich werde diese Aufgabe das *äussere Problem* nennen, und jene gesuchte Function kurzweg als *die den vorgeschriebenen Grenzwerthen entsprechende Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ bezeichnen. — Es handelt sich dabei namentlich um die Frage, ob eine derartige Function stets *existirt*.

§ 3.

Definition der Potentiale W, w. Berechnung von w.

Auf der gegebenen geschlossenen *Curve* oder *Fläche* σ seien irgend welche Werthe f in bestimmter Weise vorgeschrieben. Denkt man sich nun irgendwo in der *Ebene* resp. im *Raume* einen Punkt x markirt, und die Abstände dieses Punktes von den einzelnen Elementen $d\sigma$ jener Curve oder Fläche σ mit E bezeichnet, so repräsentirt der Ausdruck

$$V_x = \int \left(\log \frac{1}{E}\right) f d\sigma, \quad \text{resp.} \quad V_x = \int \frac{f d\sigma}{E}$$

(in der Ebene) (im Raume)

dasjenige *Potential*, welches auf x ausgeübt wird von einer auf σ ausgebreiteten materiellen *Belegung* von der *Dichtigkeit* f. Dabei pflegt insbesondere der Ausdruck links als *Logarithmisches*, der rechts als *Newton'sches* Potential bezeichnet zu werden. Diese beiden Potentiale, welche, unter Anwendung der schon mehrfach gebrauchten Bezeichnungsweise $T = \log \frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$, in die gemeinschaftliche Form:

$$V_x = \int T f d\sigma$$

versetzbar, und vielfach untersucht sind, sollen hier nicht weiter besprochen werden.

Von besonderer Wichtigkeit hingegen für unsere Zwecke ist derjenige Ausdruck, welcher aus V_x sich ergiebt, sobald man daselbst das T durch $\frac{dT}{d\nu}$ ersetzt, wo ν die *innere* Normale der Curve oder Fläche σ vorstellen soll. Der so entstehende Ausdruck:

$$W_x = \int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma$$

pflegt ebenfalls als ein auf den Punkt x ausgeübtes *Potential* bezeichnet zu werden, und zwar als das Potential einer auf σ ausgebreiteten materiellen *Doppelbelegung* vom *Momente* f.

Bei der genauern Untersuchung dieses Potentials W_x wird es zweckmässig sein, das f durch $\frac{f}{h\pi}$ zu ersetzen, wo h wiederum die schon früher eingeführte Zahl sein soll, die *in der Ebene* $= 1$, *im Raume* $= 2$ ist. [Vgl. die Note pag. 17.] Der so entstehende Ausdruck:

$$(1.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma$$

kann übrigens, wie man leicht erkennt, auch in folgende Form versetzt werden:

$$(1a.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} f d\sigma ,$$

wo δ den Winkel vorstellt, unter welchem die Entfernung E ($d\sigma \ggg\!\!\rightarrow x$) gegen die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale ν geneigt ist. Bezeichnet man die *scheinbare Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in x befindlichen Beobachter mit $\pm(d\sigma)_x$, und zwar mit $+(d\sigma)_x$ oder $-(d\sigma)_x$, je nachdem der Beobachter die *innere* oder *äussere* Seite des Elementes $d\sigma$ vor Augen hat*), so kann das Potential W_x schliesslich auch so dargestellt werden:

$$(1b.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma_x) .$$

Denn es ist:

$$(2.)\qquad \frac{dT}{d\nu} d\sigma = \frac{\cos\delta}{E^h} d\sigma = (d\sigma)_x ;$$

wie sich solches durch einfache Betrachtungen leicht ergiebt.

Für den speciellen Fall: $f = 1$ mag das Potential W_x mit w_x bezeichnet werden. Alsdann hat man die mit (1.), (1a.), (1b.) analogen Formeln:

$$(3.)\qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} d\sigma ,$$

$$(3a.)\qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} d\sigma ,$$

$$(3b.)\qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x .$$

*) Die *innere* Normale des Elementes $d\sigma$ ist die in das Gebiet $\mathfrak{J}$ hineinlaufende. Und ebenso ist die *innere* Seite von $d\sigma$ diejenige, die dem Gebiet $\mathfrak{J}$ *zugewendet* ist.

Es handelt sich nun darum, *die allgemeinen Eigenschaften der* Potentiale W_x, w_x, *ihre Stetigkeit resp. Unstetigkeit, ihr Verhalten in den unendlich fernen Punkten, u. s. w.*, näher zu untersuchen.

Wir stellen uns zuvörderst die Aufgabe, das in (3b.) enthaltene Integral

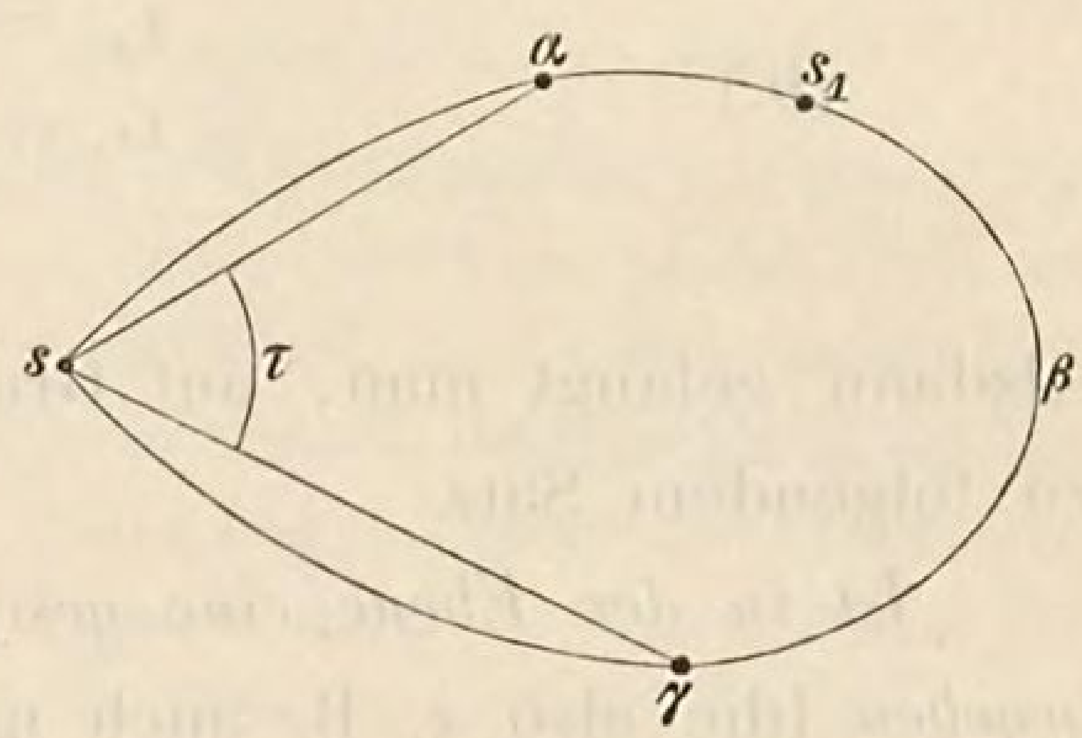
$$\int (d\sigma)_x$$

wirklich zu berechnen in der *Ebene* für irgend eine geschlossene Curve σ, z. B. für diejenige Curve σ, welche weiter unten gezeichnet ist. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Punkt x *ausserhalb* σ, oder *innerhalb* σ, oder endlich *auf* σ gelegen ist. Befindet sich x *ausserhalb* σ, so ergiebt sich sofort, falls man nur die geometrische Bedeutung des $(d\sigma)_x$ im Auge behält, die Formel:

$$(A.) \qquad \int (d\sigma)_x = 0 \;, \qquad (x \text{ ausserhalb } \sigma) \;.$$

Liegt ferner x *innerhalb* σ, so ergiebt sich mit gleicher Leichtigkeit, ebenfalls auf Grund der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_x$, die Formel:

$$(B.) \qquad \int (d\sigma)_x = 2\pi \;, \qquad (x \text{ innerhalb } \sigma) \;.$$



Liegt endlich x *auf* der Curve σ, z. B. in der Ecke s, so thut man gut, das in Rede stehende Integral $\int (d\sigma)_x$ oder vielmehr $\int (d\sigma)_s$ nicht sofort über die *ganze* Curve σ, sondern zuerst nur über den mit $\alpha\beta\gamma$ bezeichneten *Theil* derselben auszudehnen. Man erhält alsdann, wiederum auf Grund der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_s$, die Formel:

$$\int_{\alpha\beta\gamma} (d\sigma)_s = \tau \;,$$

wo τ den *Winkel* $\alpha s \gamma$ repräsentirt, während der Index $\alpha\beta\gamma$ andeuten soll, dass die Integration nur über den *Curventheil* $\alpha\beta\gamma$ ausgedehnt zu denken ist. Lässt man aber jetzt in dieser Formel den Curventheil $\alpha\beta\gamma$ nach beiden Seiten hin mehr und mehr wachsen, nämlich α

nach s, und γ ebenfalls nach s rücken, so gewinnt die Formel folgende Gestalt:

$$(C.)\qquad \int (d\sigma)_s = \tau_s\,,$$

wo die Integration jetzt über die *ganze* Curve σ sich ausdehnt, und τ_s den *Innenwinkel* der Curve im Punkte s bezeichnet. Dieser Innenwinkel τ_s hat zu Schenkeln die beiden *Tangenten* der Curve im Punkte s. — In ganz analoger Weise kann man den Fall behandeln, dass der Punkt x *auf* der Curve an irgend welcher *andern* Stelle, z. B. in s_1 liegt [vgl. die Figur]. Man erhält alsdann

$$(C_1.)\qquad \int (d\sigma)_{s_1} = \tau s_1 = \pi\,,$$

wo τs_1 den *Innenwinkel* der Curve im Punkte s_1 vorstellt. Dieser Innenwinkel τs_1 ist aber offenbar $= \pi$, weil der Punkt s_1 kein Eckpunkt der Curve ist, vielmehr an einer Stelle liegt, wo die Curve einer *stetigen Biegung* sich erfreut, [vergl. die Figur].

Wir wollen nun weiterhin jeden Punkt der Ebene, je nachdem derselbe *ausserhalb*, *auf*, oder *innerhalb* σ liegt, mit a, s oder i bezeichnen. Und überdies wollen wir den *Innenwinkel* der Curve σ in irgend einem Punkte s mit $\pi(1 - \vartheta_s)$ bezeichnen, also setzen:

$$(D.)\qquad \begin{aligned} \tau_s &= \pi(1 - \vartheta_s)\,, \\ \tau s_1 &= \pi(1 - \vartheta s_1)\,, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Alsdann gelangt man, auf Grund der Formeln ($A.$), ($B.$), ($C.$), ($C_1.$), zu folgendem Satz:

Ist in der Ebene eine geschlossene Curve σ von beliebiger Gestalt gegeben [die also z. B. auch mit *Ecken* behaftet sein kann], *und bezeichnet man jedweden Punkt x der Ebene mit a, s oder i, jenachdem derselbe ausserhalb σ, auf σ, oder innerhalb σ liegt, so gelten die Formeln*:

$$(4.)\qquad \begin{aligned} \int (d\sigma)_a &= 0\,, \\ \int (d\sigma)_s &= \pi(1 - \vartheta_s)\,, \\ \int (d\sigma)_i &= 2\pi\,, \end{aligned}$$

wo $\pi(1 - \vartheta_s)$ den Innenwinkel der Curve σ im Punkte s bezeichnet.

Hieraus ergeben sich für die Function w_x (3 *b*.), falls man nur beachtet, dass die Zahl h in der Ebene $= 1$ sein soll, folgende Werthbestimmungen:

$$w_a = \frac{1}{\pi} \int (d\sigma)_a = 0 \; ,$$

$$(5.) \qquad w_s = \frac{1}{\pi} \int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s \; ,$$

$$w_i = \frac{1}{\pi} \int (d\sigma)_i = 2 \; .$$

Erste Bemerkung. — Der *Innenwinkel* τ_s der Curve σ im Punkte s ist stets $= \pi$, ausser wenn s in einer Ecke der Curve liegt. Zufolge der in (*D*.) für ϑ_s gegebenen Definition:

$$(\alpha.) \qquad \tau_s = \pi(1 - \vartheta_s)$$

wird daher ϑ_s stets $= 0$ sein, ausser wenn s in einer Ecke der Curve liegt.

Zweite Bemerkung. — Der *Innenwinkel* τ_s liegt seiner Natur nach unter allen Umständen zwischen 0 und 2π:

$$0 \leqq \tau_s \leqq 2\pi.$$

Und diese Formel ist, sobald man voraussetzt, dass die Curve *keine Spitzen* haben soll, noch weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch

$$0 < \tau_s < 2\pi \; .$$

Demgemäss ergiebt sich mit Rücksicht auf (α.):

$$0 < 1 - \vartheta_s < 2 \; ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\beta.) \qquad -1 < \vartheta_s < +1 \; .$$

Die Grösse ϑ_s ist somit ein positiver oder negativer ächter Bruch.

Dritte Bemerkung. — Wir wollen jetzt insbesondere annehmen, die Curve σ sei *überall convex*, indem wir dabei unter einer überall convexen Curve auch eine solche verstehen, die (wie z. B. die Peripherie eines Kreissectors) zum Theil aus *geraden Linien* besteht, oder auch eine solche, die (wie z. B. die Peripherie eines Quadrates) aus *lauter* geraden Linien besteht. Für eine solche *überall convexe* Curve σ wird offenbar der irgend einem Punkte s entsprechende *Innenwinkel* τ_s stets zwischen 0 und π liegen:

$$0 \leqq \tau_s \leqq \pi \; .$$

Diese Formel ist, sobald man wiederum voraussetzt, dass die Curve *keine Spitzen* besitzt, weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch:

$$0 < \tau_s \leqq \pi \; .$$

Substituirt man hier für τ_s den Werth (α.), so folgt:

$$0 < 1 - \vartheta_s \leqq 1 \; ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(\gamma.) \qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1 \; .$$

Für eine überall convexe Curve ist somit ϑ_s ein positiver ächter Bruch.

Analoge Resultate ergeben sich offenbar im *Raume* für eine *geschlossene Fläche* σ. In der That wird man alsdann, an Stelle der Formeln (4.), folgende Formeln erhalten:

$$
(6.)\qquad
\begin{aligned}
&\int (d\sigma)_a = 0 \,, \\
&\int (d\sigma)_s = 2\pi(1 - \vartheta_s) \,, \\
&\int (d\sigma)_i = 4\pi \,,
\end{aligned}
$$

und an Stelle der Formeln (5.) folgende:

$$
(7.)\qquad
\begin{aligned}
w_a &= \frac{1}{2\pi} \int (d\sigma)_a = 0 \,, \\
w_s &= \frac{1}{2\pi} \int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s \,, \\
w_i &= \frac{1}{2\pi} \int (d\sigma)_i = 2 \,.
\end{aligned}
$$

Dabei ist der *räumliche* (vulgo: körperliche) *Innenwinkel* τ_s der gegebenen Fläche σ im Punkte s durch $2\pi(1 - \vartheta_s)$ bezeichnet. Dieser räumliche Innenwinkel hat zu seiner Begrenzung die Gesammtheit der im Punkte s an die Fläche σ gelegten *Tangentialebenen*. Ueber die in dieser Weise definirte Grösse ϑ_s sind nun folgende Bemerkungen zu machen, analog mit denen auf p. 31.

Erste Bemerkung. — Es ist, wie soeben festgesetzt wurde:

$$(\alpha.)\qquad \tau_s = 2\pi\,(1 - \vartheta_s) \,.$$

Und hieraus ergiebt sich, *dass die Grösse ϑ_s stets $= 0$ ist, ausser wenn der Punkt s in einer Ecke oder Kante der Fläche σ liegt.*

Zweite Bemerkung. — Die Grösse ϑ_s entspricht der Formel:

$$(\beta.)\qquad -1 < \vartheta_s < +1 \,.$$

Dritte Bemerkung. — Ist insbesondere die gegebene Fläche σ eine *überall convexe* [wobei unter diesem Namen auch solche Flächen mit einbegriffen sein sollen, die zum Theil *ebenflächig* sind], so entspricht ϑ_s der Formel:

$$(\gamma.)\qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1 \,.$$

Man kann schliesslich die Formelsysteme (5.) und (7.) zusammenfassen, indem man sich folgendermassen ausdrückt:

Ist in der Ebene oder im Raume irgend eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben [die z. B. mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein kann], *und bezeichnet man jedweden Punkt, je*

nachdem derselbe ausserhalb σ, auf σ, oder innerhalb σ liegt, mit a, s oder i, so gelten die Formeln:

$$w_a = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_a = 0\,,$$

$$(8.)\qquad w_s = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s = 1 - \vartheta_s\,,$$

$$w_i = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_i = 2\,,$$

wo $h = 1$ resp. $= 2$ ist, und wo $h\pi(1 - \vartheta_s)$ den ebenen Innenwinkel der Curve σ im Punkte s, resp. den räumlichen Innenwinkel der Fläche σ im Punkte s vorstellt. Man kann etwa diese Grösse $h\pi(1 - \vartheta_s)$ kurzweg das innere Winkelmaass der Curve oder Fläche σ im Punkte s nennen.

Dabei ist zu beachten, dass die Grösse ϑ_s stets

$$(9.)\qquad = 0$$

ist, ausser wenn der Punkt s in einer Ecke der Curve σ, resp. in einer Ecke oder Kante der Fläche σ liegt; — und ferner zu beachten, dass ϑ_s stets der Formel entspricht:

$$(10.)\qquad -1 \leqq \vartheta_s \leqq +1\,.$$

Ist insbesondere die Curve oder Fläche σ eine überall convexe, so tritt an Stelle des Spielraumes (10.) der engere Spielraum:

$$(11.)\qquad 0 \leqq \vartheta_s \leqq 1\,.$$

Dabei sind unter überall convexen Curven oder Flächen auch solche verstanden, die zum Theil geradlinig resp. ebenflächig sind.

Die Formeln (10.), (11.) ergeben sich unmittelbar aus den Bemerkungen pag. 31 und 32. Setzt man voraus, dass die gegebene Curve oder Fläche σ frei von *Spitzen*, resp. frei von *Spitzen und Schneiden* ist, so sind diese Formeln, wie aus jenen Bemerkungen folgt, noch weiter verschärfbar, nämlich ersetzbar durch:

$$(10\text{a.})\qquad -1 < \vartheta_s < +1\,,$$

respective durch:

$$(11\text{a.})\qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1\,.$$

Uebrigens wird im ganzen Verlauf der gegenwärtigen Abhandlung nur von den Formeln (10.), (11.) Gebrauch gemacht werden. Eine Ausnahme macht allein der § 6a. In diesem nämlich sind die *acuten* Formeln (10a.), (11a.) erforderlich.

Zu den soeben ausgesprochenen aus der *geometrischen Anschauung* herstammenden Sätzen (8.), (9.), (10.), (11.) resp. (10a.), (11a.), mögen noch zwei weitere Sätze hinzugefügt werden, von denen später Gebrauch zu machen ist, und die aus derselben Quelle herstammen. Dieselben lauten:

Ist in der Ebene oder im Raume eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, und setzt man:

$$(12.)\qquad \int d\sigma = \Sigma ,$$

so ist Σ eine positive e n d l i c h e *Constante.* In der That wird dieses Σ nichts Anderes sein, als der *Umfang* der gegebenen Curve, resp. das *Areal* (Complanationsresultat) der gegebenen Fläche.

Bezeichnet man ferner den absoluten Werth von $(d\sigma)_x$ *mit* abs $(d\sigma)_x$, *und setzt man das über die gegebene Curve oder Fläche σ ausgedehnte Integral*

$$(13.)\qquad \int \text{abs}\,(d\sigma)_x = \Phi_x ,$$

und bezeichnet man den g r ö s s t e n *Werth, den die so definirte (stets positive) Function* Φ_x *für beliebige Lagen des Punktes* x *anzunehmen im Stande ist, mit* M, *so wird dieses* M *eine der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige positive Constante sein, deren Werth stets ein* e n d l i c h e r *ist.*

Bemerkung. — All' diese Sätze (8.), (9.) ... (13.) beruhen, wie schon mehrfach betont ist, wesentlich auf der *geometrischen Anschauung*, und sind daher hinsichtlich ihrer *allgemeinen* Gültigkeit anfechtbar. Ohne auf solche Bedenken mich hier weiter einzulassen, will ich nur bemerken, dass die genannten Sätze das wesentliche Fundament der nachfolgenden Untersuchungen ausmachen, *und dass also die Gültigkeit dieser Untersuchungen auf* s o l c h e *Curven oder Flächen sich beschränkt, für welche die genannten Sätze correct sind.*

§ 4.

Allgemeine Eigenschaften des Potentials *W*.

Nachdem wir im vorhergehenden § das *specielle* Potential w_x untersucht haben, wollen wir gegenwärtig das *allgemeine* Potential

$$(1.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} f d\sigma = \frac{1}{h\pi}\int f (d\sigma)_x ,$$

[vgl. (1a., b., c.) pag. 28] einer genaueren Betrachtung unterwerfen.

Wir werden dabei schliesslich zu dem einfachen Resultate gelangen, dass dieses Potential W_x, was seine Werthe *innerhalb* der gegebenen Curve oder Fläche σ betrifft, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ ist, dass dasselbe also den in (1.), (2.) pag. 16 angegebenen Bedingungen entspricht. Und gleichzeitig werden wir zu dem Resultate geführt werden, dass dieses Potential W_x, was seine Werthe *ausserhalb* σ betrifft, eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ ist, dass nämlich dasselbe den in (1.), (2.), (3.), (4.) pag. 21 genannten Bedingungen sich subordinirt.

Dabei wird allerdings stets *vorausgesetzt* werden, dass die Werthe f, auf Grund deren das Potential W_x gebildet ist, auf der Curve oder Fläche σ überall *stetig* sind. — Zuvörderst ergeben sich folgende Sätze:

Erster Satz. — *Sind auf der geschlossenen Curve oder Fläche* σ [die mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend welche Werthe* f *oder* f_s *vorgeschrieben, die auf* σ *stetig sind, und setzt man:*

$$W = W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x ,$$

so werden die nach den Coordinaten x, y, *resp.* x, y, z *des Punktes* x *gebildeten Differentialquotienten beliebiger Ordnung:*

$$\frac{\partial^{p+q} W}{\partial x^p \, \partial y^q}, \quad resp. \quad \frac{\partial^{p+q+r} W}{\partial x^p \, \partial y^q \, \partial z^r},$$

und ebenso auch W *selber durchweg stetig sein, so lange der Punkt* x *von der gegebenen Curve oder Fläche* σ *durch irgend welche Zwischenräume getrennt bleibt. Und gleichzeitig wird, so lange dieser Anforderung Genüge geschieht, die Gleichung erfüllt sein:*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 , \quad resp. \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0 .$$

Zweiter Satz. — *Die Function* W_x *verschwindet im Unendlichen, d. h. sie wird* $= 0$, *falls man den Punkt* x *nach irgend welcher Richtung sich ins Unendliche entfernen lässt.*

Oder genauer ausgedrückt: Beschreibt man um irgend einen festen Punkt mit sehr grossem Radius R *eine Kreislinie oder Kugelfläche* S, *so sind die ausserhalb* S *befindlichen Werthe* W *durch Vergrösserung von* R *unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar.*

Dritter Satz. — *Construirt man irgend eine Kreislinie oder Kugelfläche s, welche die gegebene Curve oder Fläche σ umschliesst, und vollständig innerhalb 𝔄 liegt, so wird das über diese Kreislinie oder Kugelfläche s ausgedehnte Integral*

$$\int \frac{dW}{dn}\, ds \text{ stets} = 0$$

sein. Dabei bezeichnet n die Normale von s.

Der Beweis des ersten Satzes ergiebt sich leicht auf Grund des in (1.) für W_x angegebenen Ausdruckes

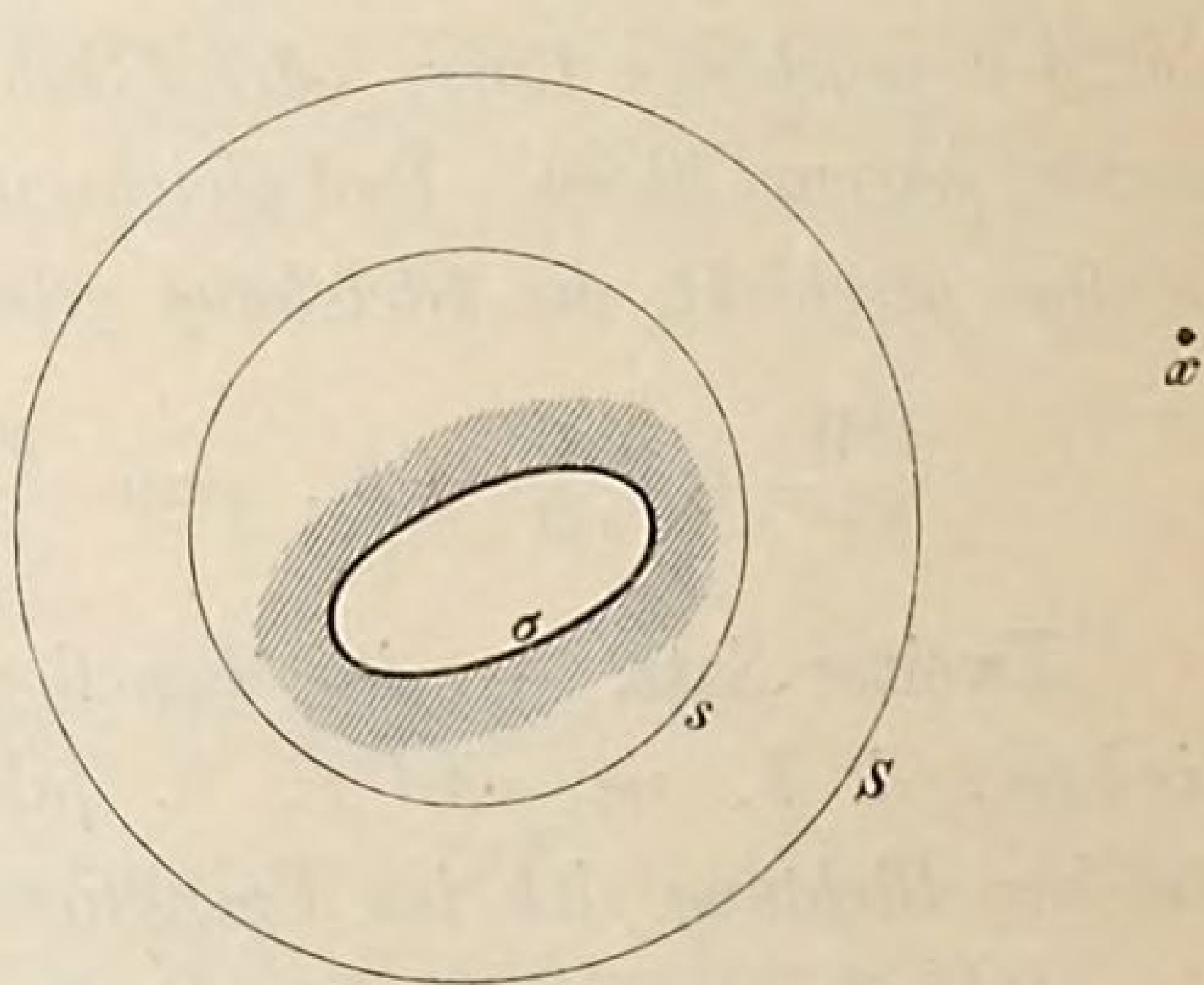
$$W = W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{dT}{d\nu} f d\sigma\,,$$

falls man nur beachtet, dass $T = \log \frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$ ist, und dass E die *Entfernung* des Punktes x vom Elemente $d\sigma$ vorstellt. Will man den Satz mit voller Strenge und zugleich mit einiger Kürze beweisen, so kann man sich dazu derjenigen Hülfssätze bedienen, welche von mir angegeben sind in meinem Werke über das Log. und Newton'sche Potential (bei Teubner, 1877; daselbst pag. 141, 142).

Beweis des zweiten Satzes. — Nach (1.) ist:

$$(2.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int \frac{\cos\delta}{E^h} f d\sigma\,.$$

Wir beschreiben um irgend einen festen Punkt mit beliebigen Radien r, R ($r < R$) zwei Kreislinien oder Kugelflächen s, S, jedoch der Art, dass s (mithin auch S) die gegebene Curve oder Fläche σ *umschliesst*. Betrachten wir nun irgend einen *ausserhalb* S gelegenen Punkt x, so sind die ihm zugehörigen E's [d. i. seine Abstände von den einzelnen Elementen $d\sigma$ der gegebenen Curve oder Fläche σ] durchweg $> (R - r)$; so dass also für jedes solches E die Formel stattfindet:



$$\frac{1}{E} < \frac{1}{R - r}\,.$$

Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von f auf σ mit M, so folgt aus (2.):

$$\text{abs}\, W_x < \frac{M}{h\pi(R-r)^h}\int d\sigma\ ,$$

also mit Rücksicht auf (12.) pag. 34.:

$$\text{(3.)}\qquad \text{abs}\, W_x < \frac{M\Sigma}{h\pi(R-r)^h}\ .$$

Diese Formel (3.), in welcher M, Σ, h gegebene *endliche* Constanten vorstellen ($h = 1$, resp. $= 2$), gilt für sämmtliche Punkte x, die *ausserhalb* S liegen. Demgemäss folgt aus dieser Formel, dass sämmtliche W_x, die *ausserhalb* S liegen, durch Vergrösserung von S, d. i. durch Vergrösserung des Radius R, unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. — *Q. e. d.*

Beweis des dritten Satzes. — Wir wollen den Satz beweisen für die schon construirte Kreislinie oder Kugelfläche s (r), indem wir dabei der Linie oder Fläche S (R) als eines *Hülfskreises* oder einer *Hülfskugelfläche* uns bedienen, [vgl. die vorhergehende Figur]. Auf Grund des *ersten* Satzes pag. 35, und unter Anwendung der bekannten Green'schen Formeln, ergiebt sich zuvörderst die Gleichung:

$$\int \frac{dW}{dr}\, ds = \int \frac{dW}{dR}\, dS\ ,$$

oder was dasselbe ist:

$$\int \frac{dW}{dn}\, ds = \int \frac{dW}{dN}\, dS\ ,$$

wo n und N die *inneren* Normalen von s und S vorstellen sollen. Hieraus folgt sofort:

$$\text{abs}\int \frac{dW}{dn}\, ds = \text{abs}\int \frac{dW}{dN}\, dS\ ,$$

mithin:

$$\text{(4.)}\qquad \text{abs}\int \frac{dW}{dn}\, ds \leqq \int\left(\text{abs}\ \frac{dW}{dN}\right) dS\ .$$

Das hier auf der rechten Seite befindliche $\frac{dW}{dN}$ ist, nach (1.), in folgender Weise darstellbar:

$$(\alpha.)\qquad \frac{dW}{dN} = \frac{1}{h\pi}\int \frac{d^2T}{d\nu\, dN} f d\sigma\ ,$$

wo $T = \log\frac{1}{E}$, resp. $= \frac{1}{E}$ ist, und E den gegenseitigen Abstand

zweier Elemente $d\sigma$, dS vorstellt, während ν, N die *inneren* Normalen dieser Elemente bezeichnen. Demgemäss ergiebt sich, mittelst elementarer Rechnung:

$$\frac{d^2T}{d\nu\, dN} = \frac{\cos\varepsilon - (h+1)\cos\delta\cos\Delta}{E^{h+1}},$$

wo ε der Neigungswinkel von ν gegen N ist, während δ und Δ die Winkel vorstellen, unter denen ν und N gegen die Linie $E(d\sigma \ggg\!\!\rightarrow dS)$ geneigt sind. Beachtet man, dass $h = 1$ resp. $= 2$ ist, so ergiebt sich aus der letzten Formel sofort:

$$\text{abs}\,\frac{d^2T}{d\nu\, dN} \leqq \frac{h+2}{E^{h+1}},$$

also, weil $E > R - r$ ist, *a fortiori*:

$$\text{abs}\,\frac{d^2T}{d\nu\, dN} < \frac{h+2}{(R-r)^{h+1}}.$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aus (α.) sofort:

$$(\beta.)\qquad \text{abs}\,\frac{dW}{dN} < \frac{h+2}{h\pi\,(R-r)^{h+1}}\int(\text{abs}\,f)\,d\sigma\,,$$

oder falls man den absolut grössten Werth von f auf σ mit M bezeichnet, und überdies beachtet, dass $\int f d\sigma = \Sigma$ ist [vgl. (12.) pag. 34]:

$$(\gamma.)\qquad \text{abs}\,\frac{dW}{dN} < \frac{(h+2)M\Sigma}{h\pi\,(R-r)^{h+1}}.$$

Dies in (4.) substituirt, erhält man jetzt:

$$(5.)\qquad \text{abs}\int\frac{dW}{dn}\,ds < \frac{(h+2)M\Sigma}{h\pi\,(R-r)^{h+1}}\int dS\,,$$

also, weil $\int dS = 2R\pi$, resp. $= 4R^2\pi$, mithin allgemein $= 2h\,R^h\pi$ ist:

$$(6.)\qquad \text{abs}\int\frac{dW}{dn}\,ds < \frac{2(h+2)M\Sigma\,.\,R^h}{(R-r)^{h+1}}.$$

Der hier auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist aber, weil M, Σ, r, h gegebene Constanten vorstellen ($h = 1$, resp. $= 2$), durch Vergrösserung von R unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar. Somit ergiebt sich, dass das der gegebenen Kreislinie oder Kugelfläche s entsprechende Integral

$$\int\frac{dW}{dn}\,ds$$

nothwendig $= 0$ ist. — *Q. e. d.*

Weitere Untersuchungen. — Nach dem ersten Satz (pag. 35) ist W_x *stetig*, so lange der Punkt x von der gegebenen Curve oder Fläche σ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt bleibt. Es fragt sich, ob diese Stetigkeit fortdauert bis *hart* an σ heran. Um auf diese Frage, deren Beantwortung nicht ganz leicht ist, näher einzugehen, wollen wir neben der Function

$$(7.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x$$

gleichzeitig auch die speciellere Function

$$(8.)\qquad w_x = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_x$$

in Betracht ziehen, und den Ausdruck bilden:

$$(9.)\qquad \Omega_x = W_x - k w_x\,,$$

wo k eine noch disponible *Constante* sein soll. Durch Substitution der Werthe (7.), (8.) ergiebt sich:

$$(10.)\qquad \Omega_x = \int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma)_x\,.$$

Wir markiren nun *auf* σ irgend einen Punkt $\varkappa$, beschreiben um $\varkappa$ (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ von noch unbestimmter Kleinheit, und nehmen zur Constanten k denjenigen Werth, welchen die auf σ vorgeschriebene Function f im Punkte $\varkappa$ besitzt:

$$(11.)\qquad k = f_\varkappa\,.$$

Durch die kleine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ zerfällt die gegebene Curve oder Fläche σ in zwei Theile, von denen der *innerhalb* $O_\varkappa$ liegende mit σ', der *ausserhalb* $O_\varkappa$ befindliche mit σ'' benannt werden mag. Diese kleine Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ bildet alsdann die *Grenze* zwischen σ' und σ'', und soll auch stets diese Grenze *bleiben*; so dass also z. B. bei einer *Verkleinerung* von $O_\varkappa$ der Theil σ' sich ebenfalls *verkleinern*, der Theil σ'' hingegen sich *vergrössern* wird.

Den beiden Theilen σ' und σ'' entsprechend, zerfällt das Integral (10.) ebenfalls in zwei Theile, die mit Ω_x' und Ω_x'' bezeichnet

werden mögen; wie solches angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(12.)\qquad \Omega_x = \underbrace{\int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma')_x}_{\Omega_x'} + \underbrace{\int \frac{f-k}{h\pi}(d\sigma'')_x}_{\Omega_x''} .$$

Alsdann ist also:

$$\Omega_x = \Omega_x' + \Omega_x'' ,$$

und falls man für x irgend einen *anderen* Punkt y nimmt:

$$\Omega_y = \Omega_y' + \Omega_y'' ,$$

mithin:

$$\Omega_x - \Omega_y = \Omega_x' + (-1)\,\Omega_y' + (\Omega_x'' - \Omega_y'') ,$$

folglich:

$$(13.)\qquad \text{abs}\,(\Omega_x - \Omega_y) \leqq \text{abs}\,\Omega_x' + \text{abs}\,\Omega_y' + \text{abs}\,(\Omega_x'' - \Omega_y'') ,$$

wobei über die Lage der Punkte x, y nicht die mindeste Voraussetzung gemacht ist.

Für Ω_x' ergiebt sich sofort die Formel [vgl. (12.)]:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \int \frac{\text{abs}\,(f-k)}{h\pi}\,\text{abs}\,(d\sigma')_x ,$$

oder, falls man den absolut grössten Werth von $(f-k)$ auf σ' mit M' bezeichnet:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma')_x ,$$

also *a fortiori*:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\left(\int \text{abs}\,(d\sigma')_x + \int \text{abs}(d\sigma'')_x\right) ,$$

oder was dasselbe ist:

$$\text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'}{h\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma)_x ,$$

also mit Rücksicht auf den Satz (13.) pag. 34:

$$(A.)\qquad \text{abs}\,\Omega_x' \leqq \frac{M'\mathsf{M}}{h\pi} ,$$

wo M eine der gegebenen Curve oder Fläche σ zugehörige *positive endliche Constante* vorstellt.

Ist O_x, mithin auch σ' sehr klein, so werden die *auf* σ' vorhandenen Werthe f (weil f nach unserer Voraussetzung *stetig* ist)

sehr wenig von einander abweichen, also z. B. auch sehr wenig abweichen von demjenigen Werthe k, den die Function f auf σ' im Centrum von $O_\varkappa$ d. i. in $\varkappa$ besitzt. Demgemäss wird die Differenz $f - k$ für alle *auf* σ' liegenden Punkte *sehr klein* sein, mithin der absolut grösste Werth M', den diese Differenz auf σ' besitzt, ebenfalls *sehr klein* sein. Kurz, man erkennt (auf Grund der *Stetigkeit* von f), dass jenes M' durch Verkleinerung der Kreislinie oder Kugelfläche $O_\varkappa$ und durch die damit Hand in Hand gehende Verkleinerung von σ' *beliebig* klein, z. B. *so* klein gemacht werden kann, dass der Quotient

$$\frac{M'\mathrm{M}}{h\pi} < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird, wo ε einen willkürlich gegebenen Kleinheitsgrad vorstellen soll. Solches aber ausgeführt gedacht, ergiebt sich aus (A.) die Formel:

$$(B.) \qquad \operatorname{abs} \Omega_x' < \frac{\varepsilon}{3},$$

ohne, dass bei Ableitung dieser Formel über die Lage des Punktes x auch nur die mindeste Voraussetzung gemacht wäre. Giebt man also dem Punkte x in der Ebene resp. im Raume irgend welche *andere* Lage y, so wird wiederum

$$(C.) \qquad \operatorname{abs} \Omega_y' < \frac{\varepsilon}{3}$$

sein.

Die Formeln (B.), (C.) sind entstanden durch eine gewisse dem vorgeschriebenen ε entsprechende Verkleinerung von $O_\varkappa$ und die damit Hand in Hand gehende Abänderung der Theile σ' und σ''. Nachdem solches ausgeführt ist, wollen wir jetzt diese geometrischen Gebilde $O_\varkappa$, σ', σ'' *erstarren* lassen, d. h. weiterhin *constant* erhalten. Hingegen wollen wir die bis jetzt in der Ebene resp. im Raume völlig frei beweglichen Punkte x, y fortan in das Innere einer um $\varkappa$ (als Centrum) beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche $o_\varkappa$ *hineinbannen*, und dabei den Radius von $o_\varkappa$ gleich von Anfang uns noch kleiner denken als den von $O_\varkappa$. Durch eine *weitere Verkleinerung* von $o_\varkappa$ werden wir offenbar dafür sorgen können, dass

$$(D.) \qquad \operatorname{abs} (\Omega_x'' - \Omega_y'') \text{ stets } < \frac{\varepsilon}{3}$$

bleibt, welche Bewegung man den Punkten x, y innerhalb $o_\varkappa$ auch zuertheilen mag.

Denn das Integral Ω_x'' und ebenso Ω_y'' erstreckt sich nur über den *ausserhalb* $O_\varkappa$ gelegenen Theil σ'', und ist daher stetig für alle *innerhalb* $O_\varkappa$ befindlichen Punkte. *Innerhalb* $O_\varkappa$ befindet sich aber jene die Punkte x und y umschliessende kleine Kreislinie oder Kugelfläche $o_\varkappa$.

Jetzt endlich folgt aus (13.), mittelst der Formeln (*B*.), (*C*.), (*D*.), dass

$$(14.)\qquad \text{abs}\,(\Omega_x - \Omega_y) \text{ stets } < \varepsilon$$

bleibt, welche Bewegung man den Punkten x und y innerhalb $o_\varkappa$ auch zuertheilen mag; so dass man also zu folgendem Satz gelangt:

Markirt man auf σ irgend einen Punkt $\varkappa$, und bezeichnet man den in $\varkappa$ vorhandenen Werth von f mit k, so werden die Werthdifferenzen, welche die Function

$$(15.)\qquad \Omega_x = W_x - k w_x$$

innerhalb einer um $\varkappa$ (als Centrum) beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche besitzt, durch Verkleinerung des Radius derselben unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein.

Oder kürzer ausgedrückt: Die Function Ω_x ist im Punkte $\varkappa$ stetig, mithin daselbst z. B. auch endlich.

Bemerkung. — Es wird nach (15.), falls man x nach $\varkappa$ rücken lässt:

$$(\alpha.)\qquad \Omega_\varkappa = W_\varkappa - k w_\varkappa\,,$$

oder mit Rücksicht auf (11.):

$$(\beta.)\qquad \Omega_\varkappa = W_\varkappa - f_\varkappa w_\varkappa\,.$$

Hier ist $\Omega_\varkappa$, wie soeben erläutert wurde, *endlich*. Gleiches aber gilt [in Folge der Stetigkeit von f] auch von $f_\varkappa$, und [auf Grund des Satzes (8) pag. 33] auch von $w_\varkappa$. Gleiches gilt daher, zufolge der Formel (β.), auch von $W_\varkappa$. Nun war aber der Punkt $\varkappa$ auf σ *ganz beliebig* markirt. Demgemäss erkennen wir, dass die Function $W_\varkappa$ *auf σ überall endlich* ist.

Nehmen wir ferner für x irgend einen Punkt *innerhalb* σ oder *ausserhalb* σ, so wird in diesem die Function W_x (erster Satz pag. 35) *stetig*, mithin auch *endlich* sein. Und diese Endlichkeit wird (vergl. den zweiten Satz pag. 35) auch dann noch fortbestehen, wenn wir den Punkt x in unendliche Ferne rücken lassen.

Demgemäss gelangen wir also zu dem Satz, *dass die Function W_x* (ebenso wie w_x) *in der ganzen Ebene resp. im ganzen Raume allenthalben endlich ist, wobei die unendlich fernen Punkte der Ebene resp. des Raumes mit einbegriffen sind.*

Man kann den Satz (15.), indem man für w_x seine Werthe [(8.) pag. 33] substituirt, wobei alsdann, was die Punkte x betrifft, zwischen den a, s und i zu unterscheiden ist, auch so aussprechen:

Markirt man auf σ irgend einen Punkt $\varkappa$, und bezeichnet man den in $\varkappa$ vorhandenen Werth von f mit k, so wird die durch die Formeln

$$(16.)\quad \begin{cases} \Omega_a = W_a\,, \\ \Omega_s = W_s - (1-\vartheta_s)k\,, \\ \Omega_i = W_i - 2k \end{cases}$$

definirte Function Ω_x innerhalb einer um $\varkappa$ beschriebenen Kreislinie oder Kugelfläche Werthe besitzen, deren Differenzen, durch Verkleinerung dieser Kreislinie oder Kugelfläche, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind.

Genau derselbe Satz gilt aber auch von denjenigen Functionen H_x und Z_x, die durch die Formeln definirt sind:

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathsf{H}_a = 0\,, \\ \mathsf{H}_s = -(1-\vartheta_s)(f_s - k)\,, \\ \mathsf{H}_i = 0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathsf{Z}_a = 2k\,, \\ \mathsf{Z}_s = 2k + (1+\vartheta_s)(f_s - k)\,, \\ \mathsf{Z}_i = 2k\,; \end{cases}$$

wie man solches sofort erkennt, falls man nur beachtet, dass die Function f oder f_s (nach unserer Voraussetzung) auf σ *stetig* ist, und dass k den Werth dieser Function im Punkte $\varkappa$ repräsentirt.

Genau derselbe Satz gilt daher z. B. auch von der aus Ω_x und H_x durch Addition entstehenden Function:

$$\Phi_x = \Omega_x + \mathsf{H}_x\,,$$

ebenso von der Function:

$$\Psi_x = \Omega_x + \mathsf{Z}_x\,;$$

wobei zu bemerken ist, dass für diese neuen Functionen Φ_x und Ψ_x aus (16.) und (17.) folgende Ausdrücke resultiren:

$$(18.)\quad \begin{cases} \Phi_a = W_a\,, \\ \Phi_s = W_s + \vartheta_s f_s - f_s\,, \\ \Phi_i = W_i - 2k\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Psi_a = W_a + 2k\,, \\ \Psi_s = W_s + \vartheta_s f_s + f_s\,, \\ \Psi_i = W_i\,. \end{cases}$$

Genau derselbe Satz wird daher auch gelten für einen *Theil* dieser Functionswerthe, z. B. für die Φ_a, Φ_s (unter Fortlassung der Φ_i), ebenso für die Ψ_i, Ψ_s (unter Fortlassung der Ψ_a). Demgemäss wird also die durch die Formeln

$$(19.)\quad \begin{cases} \Phi_a = W_a\,, \\ \Phi_s = W_s + \vartheta_s f_s - f_s \end{cases}$$

für alle Punkte a, s, d. i. für das Gebiet $\mathfrak{A}$ (inclusive σ) definirte Function Φ_x innerhalb einer um $\varkappa$ beschriebenen Kreislinie oder

Kugelfläche Werthe besitzen, deren Differenzen, durch Verkleinerung des Radius dieser Kreislinie oder Kugelfläche, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sind. *Und es wird daher diese Function* Φ_x *im Punkte* $\varkappa$ *stetig zu nennen sein.*

Dabei repräsentirt $\varkappa$ einen auf σ beliebig zu wählenden Punkt. Nimmt man an Stelle *eines* solchen Punktes $\varkappa$ einen *anderen* (ebenfalls auf σ liegenden) Punkt $\varkappa$, so bleiben die Ausdrücke (19.) *genau dieselben* [was, beiläufig bemerkt, bei den früheren Ausdrücken (16.), (17.), (18.) *nicht* der Fall ist; denn jene sind mit $\varkappa$ resp. k behaftet]; so dass man also sagen kann: *Die durch die Ausdrücke* (19.) *für alle a, s, d. i. für das Gebiet* $\mathfrak{A}$ (*inclusive* σ) *definirte Function* Φ_x *ist stetig für jedweden auf* σ *gelegenen Punkt* $\varkappa$. Oder, falls man den Buchstaben $\varkappa$ mit s vertauscht: *Sie ist stetig für jedweden auf* σ *liegenden Punkt s.*

Sie ist andererseits aber auch stetig für jedweden innerhalb $\mathfrak{A}$ *liegenden Punkt a.* Denn innerhalb $\mathfrak{A}$ ist sie [nach (19.)] identisch mit W; und dass W innerhalb $\mathfrak{A}$ überall stetig ist, unterliegt [vgl. den ersten Satz pag. 35] keinem Zweifel. Demgemäss gelangen wir also zu folgendem eleganten Satz:

Die durch die Formeln

$$(20.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= W_a\,, \\ \Phi_s &= W_s + \vartheta_s f_s - f_s \end{aligned}$$

definirte Function Φ *ist stetig in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$. *Und hieraus folgt* [unter Hinzunahme des zweiten Satzes pag. 35], *dass sie in Erstreckung von* $\mathfrak{A}$ *auch überall endlich ist, miteingerechnet die unendlich fernen Punkte von* $\mathfrak{A}$.

Zu einem ganz analogen Resultat gelangt man, wie jetzt leicht zu übersehen ist, mit Bezug auf die in (18.) angegebenen Werthe Ψ_i, Ψ_s, nämlich zu folgendem Satz:

Die durch die Formeln

$$(21.)\qquad \begin{aligned} \Psi_i &= W_i\,, \\ \Psi_s &= W_s + \vartheta_s f_s + f_s \end{aligned}$$

definirte Function Ψ *ist stetig in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{J}$, *mithin daselbst auch überall endlich.*

Sie ist also z. B. auch stetig *auf der Grenze* von $\mathfrak{J}$. D. h. Ψ_s ist stetig auf σ. Gleiches aber gilt auf σ (nach unserer Voraus-

setzung) auch von f_s, folglich auch von der Differenz

$$\Psi_s - f_s\,,$$

d. i. [nach (21.)] von der Function:

$$W_s + \vartheta_s f_s\,.$$

Und demgemäss ergiebt sich also der Satz:

Die Function

$$f_s' = W_s + \vartheta_s f_s \tag{22.}$$

ist auf der gegebenen Curve oder Fläche σ überall stetig, mithin daselbst auch überall endlich.

Es handelt sich bei diesen Sätzen (20.), (21.) und (22.) eigentlich nur um die Function f und das von ihr abhängende Potential W. Wir müssen daher, nachdem die Richtigkeit jener drei Sätze einmal erkannt ist, auf Mittel und Wege bedacht sein, um die *überflüssigen* Buchstaben Φ, Ψ wieder los zu werden. Zu diesem Zwecke können wir jene Sätze selber uns dienstbar machen.

Da nämlich Φ, zufolge des Satzes (20.), *in Erstreckung von* 𝔄 *stetig* ist, so wird solches z. B. auch stattfinden innerhalb einer kleinen Kreislinie oder Kugelfläche o_s, die um irgend welchen auf σ markirten Punkt s (als Centrum) beschrieben ist. Die Abweichungen, welche die innerhalb o_s befindlichen Werthe Φ_a gegenüber dem Centralwerth Φ_s zeigen, sind also durch Verkleinerung des Radius von o_s unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar. Jene innerhalb o_s vorhandenen Werthe Φ_a *convergiren* also, falls man o_s ins Unendliche verkleinert, gegen jenen Centralwerth Φ_s. Oder noch kürzer ausgedrückt: *Der Centralwerth Φ_s ist der Convergenzwerth der benachbarten Φ_a.*

Dieser Satz aber wird, falls man für Φ_s und Φ_a ihre eigentlichen Ausdrücke (20.) substituirt, dahin auszusprechen sein, *dass der in s vorhandene Werth*

$$W_s + \vartheta_s f_s - f_s$$

den Convergenzwerth der benachbarten W_a repräsentirt. Um diese Beziehung anzudeuten, kann man schreiben:

$$\lim_{a=s} W_a = W_s + \vartheta_s f_s - f_s\,,$$

oder einfacher:

$$W_{as} = W_s + \vartheta_s f_s - f_s\,,$$

wo alsdann das Symbol W_{as} denjenigen Werth bezeichnet, gegen welchen die innerhalb o_s befindlichen W_a convergiren, sobald man den Radius

von o_s *ins Unendliche verkleinert.* Uebrigens kann man diese Formel für W_{as}, mit Rücksicht auf (22.), offenbar auch so schreiben:

$$W_{as} = f_s' - f_s \,.$$

Analoges ist zu bemerken beim Satze (21.). Und in solcher Weise gelangt man, auf Grund der Sätze (20.), (21.), (22.), zu folgendem Resultat:

Vierter Satz. — *Sind auf der geschlossenen Curve oder Fläche* σ, [die mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend welche Werthe* f *oder* f_s *vorgeschrieben, die auf* σ *stetig sind, und setzt man:*

$$(23.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x \,,$$

und setzt man überdies:

$$(24.)\qquad f_s' = W_s + \vartheta_s f_s \,,$$

wo ϑ_s *die schon früher* [vgl. (8.) pag. 33] *angegebene Bedeutung haben soll, so sind die in solcher Weise definirten* f' *oder* f_s' *auf* σ *überall stetig**).

Das hier in (24.) *auftretende* W_s *repräsentirt den directen Werth des Integrales* (23.) *in einem auf* σ *gelegenen Punkte* s, *nämlich denjenigen Werth, welcher entsteht, wenn man in* (23.) *statt* x *den Punkt* s *eintreten lässt, und sodann die Integration ausführt.*

Ausser diesem directen Werthe W_s *treten nun im Punkte* s *noch zwei andere Werthe von* W, *in mehr indirecter Weise, zu Tage. Denkt man sich nämlich um den Punkt* s (als Centrum) *eine kleine Kreislinie oder Kugelfläche* o_s *construirt, so werden die innerhalb* o_s *vorhandenen Werthe* W_a, *falls man* o_s *ins Unendliche verkleinert, gegen einen bestimmten endlichen Werth convergiren, der mit* W_{as} *bezeichnet werden mag. Und ebenso werden bei dieser Procedur die innerhalb* o_s *vorhandenen Werthe* W_i *ebenfalls gegen einen bestimmten endlichen Werth convergiren, der* W_{is} *heissen mag. Diese dem betrachteten Punkte* s *zugehörigen, resp. aus den Gebieten* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$ *herstammenden Convergenzwerthe* W_{as} *und* W_{is} *stehen zu den Functionen* f *und* f' *in einfacher Beziehung. Es gelten nämlich für jedweden Punkt* s *die Gleichungen:*

$$(25.)\qquad \begin{aligned} W_{as} &= f_s' - f_s \,, \\ W_{is} &= f_s' + f_s \,. \end{aligned}$$

*) Dies ist der Satz (22).

Ferner bilden, was von hervorragender Wichtigkeit ist, die Werthe W_a *und* W_{as} *zusammengenommen ein Werthsystem, welches stetig ist in ganzer Erstreckung von* 𝔄 *). *Und ebenso repräsentiren die* W_i *und* W_{is} *zusammengenommen ein zweites Werthsystem, welches stetig ist in ganzer Erstreckung des Gebietes* 𝔍 **).

Insbesondere sei noch hervorgehoben, dass sämmtliche Werthe

$$(26.) \qquad W_s\,,\ W_a\,,\ W_{as}\,,\ W_i\,,\ W_{is}$$

endlich sind, mitinbegriffen die in unendlicher Ferne vorhandenen W_a; *wie solches aus* (20.), (21.), (22.) *sich sofort ergiebt.*

Auf diese Weise dürfte das Resultat unserer letzten Untersuchungen einigermassen *übersichtlich* hingestellt sein. *Schärfer* ist jedenfalls das Resultat in seiner ursprünglichen Fassung, nämlich in (20.), (21.), (22.), ausgesprochen.

Wir können jetzt endlich den soeben ausgesprochenen *vierten Satz* mit den *drei früheren Sätzen*, die zu Anfang dieses § auf pag. 35 hingestellt wurden, zu *einem einzigen Theorem* zusammenziehen. Aus den genannten vier Sätzen ergiebt sich nämlich sofort, dass die Werthe W_a und W_{as} eine *Fundamentalfunction des Gebietes* 𝔄, und dass andererseits die Werthe W_i und W_{is} eine *Fundamentalfunction des Gebietes* 𝔍 repräsentiren. Man erkennt solches, falls man nur zurückblickt auf die für derartige Functionen gegebenen Definitionen pag. 16 und pag. 21. Wir haben somit folgendes Theorem:

Theorem. — *Denkt man sich auf einer geschlossenen Curve oder Fläche* σ, [die auch mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf] *irgend eine Function* f *vorgeschrieben, die daselbst stetig ist, und setzt man:*

$$W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\,,$$

oder allgemeiner:

$$W_x = \text{Const.} + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\,,$$

so repräsentiren die Werthe W_a, W_{as} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* 𝔄, *und die Werthe* W_i, W_{is} *eine Fundamentalfunction des Gebietes* 𝔍.

*) Dies ist der Satz (20.).

**) Dies ist der Satz (21.).

§ 5.

Ueber die mit dem Potential W zusammenhängenden unendlich vielen Functionen f, f', f'', f''', etc.

Eliminirt man aus den beiden Formeln (23.), (24.) pag. 46:

$$(1.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\ ,$$

$$(2.)\qquad f_s' = \vartheta_s f_s + W_s$$

das W, so ergiebt sich zwischen den beiden Functionen f und f' folgende directe Beziehung:

$$(3.)\qquad f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\ .$$

Nach unserer Voraussetzung ist die auf σ von Hause aus vorgeschriebene Function f auf σ überall *stetig*. Und Gleiches gilt, in Folge dessen, auch von der neuen Function f', [Satz (24.) pag. 46].

Denkt man sich also zu f und f' noch unendlich viele andere Functionen f'', f''', etc. hinzugefügt, und zwar der Art, dass in der Reihe:

$$(4.)\qquad f,\ f',\ f'',\ f''',\ \ldots\ f^{(n)},\ \ldots$$

jede Function aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entstanden sein soll, wie f' aus f, so werden *all'* diese Functionen auf σ *stetig* sein. Bezeichnet man also z. B. die *kleinsten* und *grössten* Werthe, welche diese Functionen auf σ besitzen, resp. mit

$$(5.)\qquad K,\ K',\ K'',\ K''',\ \ldots\ K^{(n)},\ \ldots\ ,$$

und mit:

$$(6.)\qquad G,\ G',\ G'',\ G''',\ \ldots\ G^{(n)},\ \ldots\ ,$$

so werden all' diese Grössen (5.), (6.) bestimmte *endliche* Constanten sein. — Will man, was kaum nöthig sein dürfte, die Entstehungsweise der f', f'', f''', ... noch deutlicher vor Augen haben, so hat man nur die mit (3.) analogen Formeln hinzuschreiben:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} f_s' &= \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\ , \\ f_s'' &= \vartheta_s f_s' + \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_s\ , \\ f_s''' &= \vartheta_s f_s'' + \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_s\ , \end{aligned}$$

etc. etc.

Wir wollen nun diese Functionen und die ihnen zugehörigen Constanten (5.), (6.) einer genaueren Untersuchung unterwerfen, *unter der Voraussetzung, dass die gegebene Curve oder Fläche σ überall convex ist, wobei unter diesem Namen auch solche Curven und Flächen miteinbegriffen sein sollen, die zum Theil geradlinig resp. ebenflächig sind.* Zufolge dieser Voraussetzung sind alsdann die Grössen

(8x.) $(d\sigma)_i$, $(d\sigma)_s$, ϑ_s durchweg *positiv*,

und überdies die ϑ_s der Formel unterworfen:

(8y.) $$0 \leqq \vartheta_s \leqq 1\ ;$$

wie solches theils aus der geometrischen Bedeutung der $(d\sigma)_x$ folgt [vgl. pag. 28], theils aus schon früher gemachten Bemerkungen sich ergiebt [vgl. (11.) pag. 33]. Dabei sei noch folgende Relation notirt [(8.) pag. 33]:

(8z.) $$\int (d\sigma)_s = h\pi\,(1 - \vartheta_s)\ ,$$

von der mehrfach Gebrauch zu machen sein wird.

Die *rechte* Seite der Formel (3.) wird offenbar, weil die ϑ_s und $(d\sigma)_s$ durchweg *positiv* sind [vgl. (8x.)], *vergrössert* werden, sobald man alle daselbst vorkommenden f's durch ihren *grössten* Werth, d. i. durch G [vgl. (6.)] ersetzt. Somit ergiebt sich die Relation

$$f_s' \leqq G\left[\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s\right]\ ;$$

und in analoger Weise auch folgende Relation:

$$f_s' \geqq K\left[\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_s\right]\ .$$

Diese beiden Relationen gewinnen aber mit Rücksicht auf (8z.) die einfache Gestalt:

$$f_s' \leqq G\ ,$$
$$f_s' \geqq K\ .$$

Diese Relationen werden, weil bei ihrer Ableitung über die Lage des Punktes s auf der gegebenen Curve oder Fläche σ keinerlei Voraussetzung gemacht ist, in Kraft bleiben für einen auf σ in *beliebiger Bewegung* begriffenen Punkt s. Und demgemäss werden also *sämmtliche* Werthe, welche die Function f' auf σ überhaupt besitzt, der Formel entsprechen:

(9.) $$K \leqq f' \leqq G\ .$$

Es wird daher diese Formel z. B. auch gelten für den *grössten* Werth von f', d. i. für G', desgleichen für ihren *kleinsten* Werth, d. i. für K'; sodass man erhält:

$$(10.)\qquad K \leqq K' \leqq G' \leqq G\,.$$

Die Beziehung zwischen f und f' ist aber dieselbe, wie zwischen f' und f''. Ebenso also wie für die Functionen f und f' oder vielmehr für die diesen Functionen zugehörigen Constanten K, G und K', G' die Formel (10.) sich ergeben hat, — ebenso wird für die den Functionen f' und f'' entsprechenden Constanten K', G' und K'', G'' die analoge Formel sich herausstellen:

$$(10\,\mathrm{a.})\qquad K' \leqq K'' \leqq G'' \leqq G'\,.$$

U. s. w. U. s. w.

Durch Combination all' dieser Formeln (10.), (10 a.), etc. ergiebt sich jetzt sofort:

$$(11.)\qquad \begin{array}{l} K \leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots \\ G \geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots \end{array}$$

Demgemäss ist also [um einen schon früher benutzten Ausdruck zu brauchen, vgl. pag. 12] die Curve $K K' K'' \ldots$ eine *monoton steigende*, und die Curve $G G' G'' \ldots$ eine *monoton sinkende*.

Gelingt es uns also nachzuweisen, dass die Differenz $G^{(n)} - K^{(n)}$ durch Vergrösserung der Zahl n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist, so wird hierdurch [vgl. pag. 13] zugleich nachgewiesen sein, dass die Function $f^{(n)}$ für $n = \infty$ in eine *bestimmte endliche Constante* sich verwandelt. *Und dies ist das eigentliche Ziel des gegenwärtigen Paragraphs.*

Wir haben den kleinsten und grössten Werth der Function f mit K und G bezeichnet. Wir wollen jetzt die gegebene Curve oder Fläche σ in *zwei Theile* α und β zerlegen, deren jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen darf, und zwar in solcher Weise, dass alle auf α vorhandenen f's zwischen K und $\frac{G+K}{2}$, andererseits alle auf β befindlichen f's zwischen $\frac{G+K}{2}$ und G liegen; was angedeutet sein mag durch die Formeln:

$$(12.)\qquad \begin{array}{ll} K \leqq f \leqq \dfrac{G+K}{2}\,, & (\text{auf } \alpha)\,, \\ \dfrac{G+K}{2} \leqq f \leqq G\,, & (\text{auf } \beta)\,. \end{array}$$

Denkt man sich die Theile α und β in lauter unendlich kleine Elemente zerlegt, und diese Elemente resp. mit $d\alpha$ und $d\beta$ bezeichnet, so ist offenbar

$$(13.)\qquad \int d\alpha + \int d\beta = \int d\sigma = \Sigma\,,$$

falls man nämlich das Integral $\int d\alpha$ über alle Elemente $d\alpha$ des Theiles α, ebenso $\int d\beta$ über alle Elemente $d\beta$ des Theiles β sich ausgedehnt denkt, und falls man überdies unter Σ (ebenso wie früher) den *Umfang* der gegebenen Curve σ, resp. das *Areal* der gegebenen Fläche σ versteht. Analog mit (13.) wird z. B. auch folgende Formel gelten:

$$(14.)\quad \int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_s = \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s)\,, \quad [\text{vgl. } (8\,\text{z.})]\,,$$

wo unter s ein beliebiger Punkt auf der gegebenen Curve oder Fläche σ zu verstehen ist. Da die $(d\sigma)_s$, mithin auch die $(d\alpha)_s$ und $(d\beta)_s$, durchweg *positiv* sind [vgl. (8 x.)], so folgt aus (14.) sofort:

$$(15.)\qquad \begin{aligned} \int (d\alpha)_s &\leqq \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s)\,,\\ \int (d\beta)_s &\leqq \int (d\sigma)_s = h\pi(1 - \vartheta_s)\,. \end{aligned}$$

Solches constatirt, kehren wir zurück zur Formel (3.):

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s\,,$$

und geben derselben folgende Gestalt:

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\alpha)_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\beta)_s\,.$$

Die hier auftretenden beiden Integrale werden offenbar [weil die $(d\alpha)_s$ und $(d\beta)_s$ sämmtlich *positiv* sind; vergl. (8 x.)] *vergrössert* werden, sobald man alle in ihnen enthaltenen f's *vergrössert*. Solches aber geschieht nach (12.), sobald man die mit den Elementen $(d\alpha)_s$ multiplicirten f durch $\frac{G+K}{2}$, und die mit den $(d\beta)_s$ multiplicirten f durch G ersetzt. Man erhält also:

$$(A.)\qquad f_s' \leqq \vartheta_s f_s + \frac{G+K}{2h\pi}\int (d\alpha)_s + \frac{2G}{2h\pi}\int (d\beta)_s\,,$$

und in analoger Weise:

$$(B.)\qquad f_s' \geqq \vartheta_s f_s + \frac{2K}{2h\pi}\int (d\alpha)_s + \frac{G+K}{2h\pi}\int (d\beta)_s\,.$$

Benutzt man jetzt die Relation (14.):

$$\int (d\alpha)_s + \int (d\beta)_s = h\pi(1 - \vartheta_s),$$

um aus der Formel (*A.*) das $\int(d\beta)_s$ und aus (*B.*) das $\int(d\alpha)_s$ zu eliminiren, so ergiebt sich:

$$f_s' \leqq \vartheta_s f_s + G(1 - \vartheta_s) + \frac{K - G}{2h\pi}\int (d\alpha)_s,$$

$$f_s' \geqq \vartheta_s f_s + K(1 - \vartheta_s) + \frac{G - K}{2h\pi}\int (d\beta)_s,$$

oder was dasselbe ist:

$$(C.)\qquad f_s' \leqq G - (G - K)\left\{\frac{\int(d\alpha)_s}{2h\pi} + \frac{G - f_s}{G - K}\vartheta_s\right\},$$

$$(D.)\qquad f_s' \geqq K + (G - K)\left\{\frac{\int(d\beta)_s}{2h\pi} + \frac{f_s - K}{G - K}\vartheta_s\right\}.$$

Markirt man jetzt *auf* σ zwei ganz *beliebige* Punkte p und q, und subtrahirt man sodann die beiden Formeln (*C.*), (*D.*) von einander, nachdem man zuvor den Punkt s in (*C.*) durch p, in (*D.*) aber durch q ersetzt hat, so erhält man:

$$(16.)\qquad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\underbrace{\left\{1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{G - f_p}{G - K}\vartheta_p - \frac{f_q - K}{G - K}\vartheta_q\right\}}_{z},$$

wo z als Abbreviatur dienen soll für den in der geschweiften Klammer enthaltenen Ausdruck.

Die Grössen $(G - K)$, $(G - f_p)$ und $(f_q - K)$ sind, nach der Definition von G und K, stets *positiv*. Und Gleiches gilt [nach (8x.)] auch von den Grössen ϑ_p und ϑ_q. Somit folgt aus (16.) *a fortiori*:

$$(17.)\qquad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\underbrace{\left\{1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi}\right\}}_{\zeta},$$

wo ζ als Abbreviatur dienen soll für den in der geschweiften Klammer enthaltenen Ausdruck*).

*) Man übersieht sofort, dass man in den Formeln (*A.*) und (*B.*) das auf der rechten Seite stehende f_s ohne Weiteres durch G, resp. K ersetzen, und so auf bedeutend *kürzerem* Wege zur Formel (17.) gelangen könnte. Der eingeschlagene *Umweg* hat aber den Vortheil, dass man dabei gleichzeitig auch zur Formel (16.) gelangt, von der späterhin [in § 6a.] Gebrauch zu machen ist.

Ich werde nachweisen, dass dieser Ausdruck ζ stets $\geqq 0$, und dass derselbe, abgesehen von gewissen singulären Fällen, stets < 1 ist.

Ersteres ergiebt sich mit grösster Leichtigkeit. Zufolge (15.) ist nämlich

$$\int (d\alpha)_p \leqq h\pi (1 - \vartheta_p) \; ,$$
$$\int (d\beta)_q \leqq h\pi (1 - \vartheta_q) \; .$$

Und mit Rücksicht hierauf ergiebt sich für jenen Ausdruck

$$\zeta = 1 - \frac{\int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q}{2h\pi}$$

die Formel:

$$\zeta \geqq 1 - \frac{h\pi(1 - \vartheta_p) + h\pi(1 - \vartheta_q)}{2h\pi} \; , \quad \text{d. i.:} \quad \zeta \geqq \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} \; .$$

Nach (8x.) sind aber ϑ_p und ϑ_q stets *positiv*. Somit folgt:

$$(18.) \qquad \zeta \geqq \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} \geqq 0 \; . \text{ — } Q. \; e. \; d.$$

Weniger einfach ist der Beweis für die Behauptung: $\zeta < 1$. Nach (17.) ist:

$$(19.) \qquad \zeta = 1 - \frac{\xi}{2h\pi} \; , \quad (h = 1 \text{ resp.} = 2) \; ,$$

wo alsdann ξ die Bedeutung hat:

$$(20.) \qquad \xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q \; .$$

Dieses ξ ist offenbar [weil die $(d\alpha)_p$, $(d\beta)_q$ durchweg *positiv* sind, vergl. (8x.)] eine Summe von lauter *positiven* Grössen, also stets der Formel entsprechend:

$$(21.) \qquad \xi \geqq 0 \; .$$

Von besonderer Wichtigkeit ist nun für uns die Frage, ob der Ausdruck ξ seine untere Grenze, die 0, wirklich *erreichen* kann.

Der Ausdruck ξ ist [wie schon betont] eine Summe von lauter *positiven* Gliedern, zu seinem Nullwerden also erforderlich, dass sämmtliche Glieder *einzeln* $= 0$ sind. Nun kann aber ein Glied von der Form $(d\alpha)_p$ [zufolge seiner geometrischen Bedeutung, vgl. pag. 28] offenbar nur dann $= 0$ werden, wenn die in $d\alpha$ an die gegebene Curve oder Fläche σ gelegte Tangente resp. Tangentialebene durch p geht. Analoges gilt für die Glieder $(d\beta)_q$. *Soll also jener Ausdruck ξ verschwinden, so müssen sämmtliche Tangenten resp.*

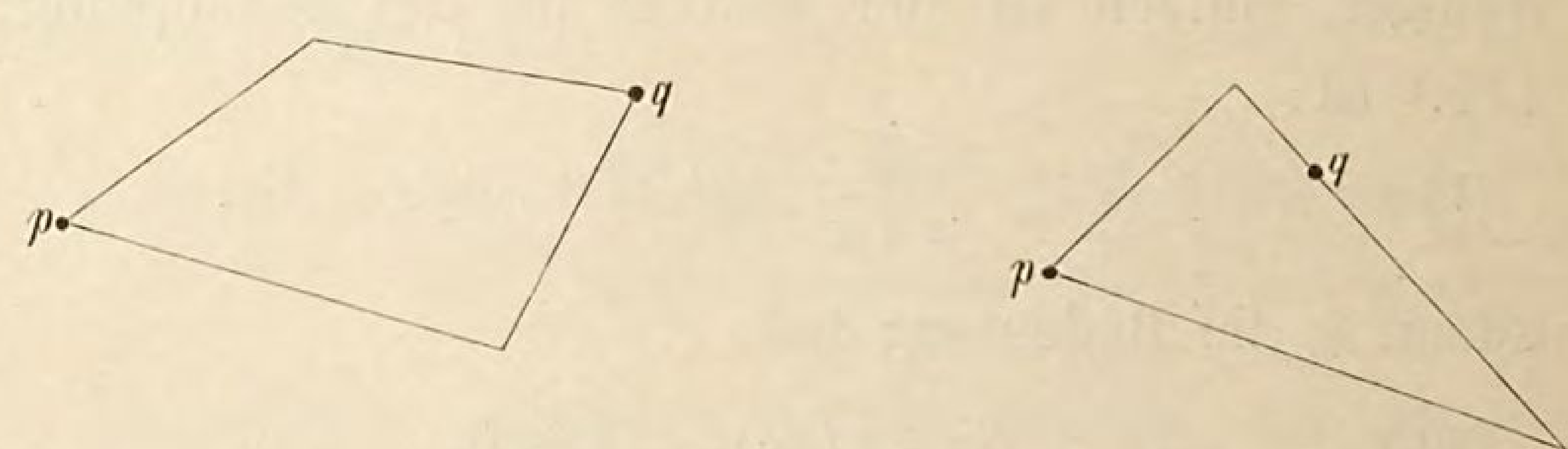
Tangentialebenen des Theiles α *durch* p, *und gleichzeitig sämmtliche Tangenten resp. Tangentialebenen des Theiles* β *durch* q *gehen*; wobei zu beachten ist, dass die Punkte p und q *auf* σ liegen.

Es muss also, falls etwa die beiden Punkte p und q mit einander coincidiren, die gegebene Curve oder Fläche σ die Gestalt eines von diesem Coincidenzpunkte (p, q) ausgehenden *Winkels*, resp. die Gestalt einer von (p, q) ausgehenden Kegelfläche haben; — was *nicht* möglich ist, weil σ nach unserer Voraussetzung geschlossen sein soll.

Oder es muss, falls die Punkte p und q *nicht* mit einander coincidiren, die Curve oder Fläche σ aus *zwei* von p und q ausgehenden *Winkeln*, resp. aus zwei von p und q ausgehenden *Kegelflächen* zusammengesetzt sein.

Soll also der Ausdruck ξ *verschwinden*, *so muss* [um einen schon früher (pag. 11) eingeführten *Terminus technicus* zu brauchen] *die gegebene Curve oder Fläche* σ *eine zweisternige sein*, *und überdies der Punkt* p *im einen*, *der Punkt* q *im andern Stern gelegen sein*; wie solches angedeutet ist in folgenden beiden Figuren:

(22.)



Die erste derselben repräsentirt ein geradliniges *Viereck* mit den *Sternen* p, q, die zweite ein Dreieck mit den Sternen p, q [vergl. pag. 12]. Man kann aber diese beiden Figuren andererseits auch *räumlich* auffassen. Alsdann werden in der *ersteren* unter den beiden von p und q ausgehenden Winkeln zwei von p und q auslaufende *Kegelflächen* zu verstehen sein. Ferner ist alsdann in der *zweiten* Figur unter dem von p ausgehenden Winkel wiederum eine von p auslaufende *Kegelfläche*, hingegen unter der durch q gehenden Linie eine durch q gehende *Ebene* zu verstehen*).

*) Das hier im *Raum* über die *zweite* Figur Gesagte ist noch nicht erschöpfend. Denn es kann durch diese zweite Figur z. B. auch ein Tetraeder angedeutet sein, und zwar in der [schon auf pag. 12 erwähnten] Auffassung, dass der *eine* Stern in irgend einem Punkte einer Tetraederkante, und der *andere* Stern in einem beliebigen Punkte der gegenüberliegenden Kante gedacht wird.

Um die Hauptsache zu wiederholen: *Soll die Grösse ξ verschwinden, so muss die gegebene Curve oder Fläche σ eine zweisternige sein.* Schliesst man also diesen Fall der Zweisternigkeit von der Betrachtung ganz aus, so wird die Grösse ξ ihre untere Grenze, die 0, *niemals* erreichen können, die Formel (21.) also umzuwandeln sein in:

(23.) $$\xi > 0 \, .$$

Hieraus folgt alsdann, mittelst (19.):

(24.) $$\zeta < 1 \, .$$

Vereinigen wir schliesslich dieses Resultat mit dem in (18.) erhaltenen, so gelangen wir zu folgendem Satz:

Zerlegt man eine geschlossene Curve oder Fläche σ in zwei Theile α und β, von denen jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen kann, und versteht man unter p und q zwei auf σ frei bewegliche Punkte, so wird die Grösse

(25.) $$\zeta = 1 - \frac{\int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q}{2h\pi}$$

variiren mit der Art und Weise jener Zerlegung, sowie auch mit der Lage der Punkte p, q.

Setzt man aber voraus, die Curve oder Fläche σ sei überall convex und keine zweisternige, so wird ζ dem Spielraum unterworfen sein:

(26.) $$0 \leqq \zeta < 1 \, .$$

Da nun ζ bei stetiger Abänderung der vorhin genannten Zerlegung und bei stetiger Bewegung der Punkte p, q in stetiger Weise variirt, so muss [nach den *Weierstrass*'schen*) Principien] *unter allen Werthen, die ζ überhaupt anzunehmen im Stande ist, ein bestimmter Maximalwerth existiren. Dieser Maximalwerth aber wird sich, ebenso wie jeder andere Specialwerth von ζ, der Formel (21.) subordiniren. Bezeichnet man also diesen Maximalwerth der Grösse ζ mit λ, so erhält man:*

(27.) $$0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1 \, .$$

*) Es könnte wohl sein, dass hier [beim Uebergange von (26.) zu (27.)] die Tragweite der *Weierstrass*'schen Principien *überschritten* ist. Ich betrachte daher den hier für den Satz (27.) gegebenen Beweis nur als einen *provisorischen*, und werde denselben im folgenden § durch einen anderen und zwar *absolut strengen* Beweis ersetzen.

Das so definirte λ repräsentirt eine der gegebenen Curve oder Fläche σ eigenthümliche Constante, welche die Configurationsconstante derselben heissen mag.

Wir kehren jetzt zurück zur Formel (17.):

$$(28.) \qquad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\,\zeta\;,$$

und bemerken, dass wir derselben, auf Grund des soeben bewiesenen Satzes (27.), auch folgende Gestalt geben können:

$$(29.) \qquad f_p' - f_q' \leqq (G - K)\,\lambda\;.$$

Diese Formel wird, weil bei ihrer Ableitung über die Lage der Punkte p, q auf σ keinerlei Voraussetzung gemacht ist, Gültigkeit haben für zwei auf σ in *beliebiger Bewegung* begriffene Punkte p, q, und also z. B. in Kraft bleiben, wenn man die Punkte p und q an diejenigen Stellen von σ rücken lässt, in denen die Function f' ihre extremen Werthe G' und K' besitzt. Somit folgt:

$$(30.) \qquad G' - K' \leqq (G - K)\,\lambda\;.$$

Da nun die Beziehung zwischen f, f' genau dieselbe ist wie zwischen f', f'', u. s. f., so ergeben sich, parallel der Formel (30.), folgende weitere Formeln:

$$(30\text{a.}) \qquad G'' - K'' \leqq (G' - K')\,\lambda\;,$$

$$(30\text{b.}) \qquad G''' - K''' \leqq (G'' - K'')\,\lambda\;,$$

etc. etc. etc.

Aus diesen Relationen (30.), (30a.), (30b.), etc. entspringt sofort folgendes Formelsystem:

$$(31.) \qquad \begin{aligned} G' - K' &\leqq (G - K)\,\lambda\;, \\ G'' - K'' &\leqq (G - K)\,\lambda^2\;, \\ G''' - K''' &\leqq (G - K)\,\lambda^3\;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G^{(n)} - K^{(n)} &\leqq (G - K)\,\lambda^n\;, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nehmen wir zu diesen Formeln (31.) noch die früheren Formeln (11.) hinzu:

$$(32.) \qquad \begin{aligned} K \leqq K' \leqq K'' \leqq K''' \leqq \ldots\;, \\ G \geqq G' \geqq G'' \geqq G''' \geqq \ldots\;, \end{aligned}$$

so haben wir jetzt die Mittel in Händen zur Erreichung unseres eigentlichen Zieles.

Ist nämlich $\varphi(n)$ eine *monoton wachsende*, ferner $\Phi(n)$ eine *monoton abnehmende* Function, und ist überdies bekannt, dass die Differenz

$$\Phi(n) - \varphi(n)$$

einen stets *positiven* und für $n = \infty$ gegen *Null* convergirenden Werth hat; so folgt hieraus, dass beide Functionen $\varphi(n)$ und $\Phi(n)$ für $n = \infty$ gegen *ein und dieselbe endliche Constante* convergiren.

Die hier den Functionen $\varphi(n)$ und $\Phi(n)$ auferlegten Bedingungen sind aber erfüllt, wenn man für dieselben respective $K^{(n)}$ und $G^{(n)}$ nimmt. Denn nach (32.) ist $K^{(n)}$ *monoton wachsend*, ebenso $G^{(n)}$ *monoton abnehmend*. Ferner ist die Differenz

$$G^{(n)} - K^{(n)} ,$$

ihrer Natur nach, stets *positiv*. Und ausserdem convergirt diese Differenz für $n = \infty$ gegen *Null*; wie sich solches sofort aus (31.) ergiebt, falls man nur beachtet, dass die *Configurationsconstante* λ [vergl. den Satz (27.)] *positiv* und < 1 ist. Man erhält also:

$$(33.) \qquad \lim_{n=\infty} K^{(n)} = \lim_{n=\infty} G^{(n)} = C ,$$

wo C eine *bestimmte endliche Constante* vorstellt. *Hieraus endlich folgt* [vergl. pag. 3], *dass die Function* $f^{(n)}$ *für* $n = \infty$ *in eine Constante, und zwar in die Constante* C *sich verwandelt*; *was angedeutet werden kann durch die Formel:*

$$(34.) \qquad \lim_{n=\infty} f^{(n)} = C .$$

Hiermit haben wir das eigentliche Ziel des gegenwärtigen § erreicht. Es bleibt noch übrig, einige Bemerkungen hinzuzufügen, die weiterhin von Nutzen sein werden.

Erste Bemerkung. — Nach der Definition der $K^{(n)}$, $G^{(n)}$ ist stets:

$$(35.) \qquad \begin{aligned} K^{(p)} &\leqq f^{(p)} \leqq G^{(p)} , \\ K^{(p+q)} &\leqq f^{(p+q)} \leqq G^{(p+q)} , \end{aligned}$$

wo p und q irgend zwei *positive* ganze Zahlen vorstellen sollen. Solches aber vorausgesetzt, ist nach (32.)

$$K^{(p)} \leqq K^{(p+q)} \text{ und } G^{(p+q)} \leqq G^{(p)} ;$$

so dass man also aus (35.) erhält:

$$(36.) \qquad \begin{aligned} K^{(p)} &\leqq f^{(p)} \leqq G^{(p)} , \\ K^{(p)} &\leqq f^{(p+q)} \leqq G^{(p)} . \end{aligned}$$

Demgemäss liegen also die Werthe $f^{(p)}$ und $f^{(p+q)}$ beide zwischen *denselben* Grenzen $K^{(p)}$, $G^{(p)}$; und es ist daher:

$$\text{abs}\,(f^{(p+q)} - f^{(p)}) \leqq G^{(p)} - K^{(p)}\ ,$$

also mit Rücksicht auf (31.):

$$(37.)\qquad \text{abs}\,(f^{(p+q)} - f^{(p)}) \leqq (G - K)\,\lambda^p\ .$$

Lässt man in dieser letzten Formel die Zahl q ins Unendliche wachsen, so folgt mit Rücksicht auf (34.):

$$(38.)\qquad \text{abs}\,(C - f^{(p)}) \leqq (G - K)\,\lambda^p\ .$$

In gleicher Weise, nämlich ebenfalls durch ein Anwachsen von q ins Unendliche, ergiebt sich aus der *zweiten* Formel (36.):

$$(39.)\qquad K^{(p)} \leqq C \leqq G^{(p)}\ .$$

Bei all' diesen Formeln (35.), (36.), (37.), (38.), (39.) *ist festzuhalten, dass p und q beliebige Zahlen aus der Reihe* 0, 1, 2, 3, 4, ... *vorstellen.*

Zweite Bemerkung. — Setzt man *nur* voraus, dass die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ *überall convex* ist, *ohne* dabei z. B. den Fall der Zweisternigkeit auszuschliessen, so sind die in der Formel (3.):

$$f_s' = \vartheta_s f_s + \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_s$$

enthaltenen Grössen ϑ_s und $(d\sigma)_s$ durchweg *positiv*, und überdies $\vartheta_s \leqq 1$. Somit folgt:

$$(40.)\qquad \text{abs}\, f_s' \leqq (\text{abs}\, f_s)\,\vartheta_s + \frac{1}{h\pi}\int(\text{abs}\, f)\,(d\sigma)_s\ .$$

Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von f [derselbe würde unter Anwendung der in (5.), (6.) eingeführten Grössen entweder $= -K$ oder $= +G$ sein] mit M, so ergiebt sich zuvörderst für jedweden auf σ liegenden Punkt s die Relation:

$$(41.)\qquad \text{abs}\, f_s \leqq M\ ,$$

und alsdann aus (40.) die Formel:

$$\text{abs}\, f_s' \leqq M\,\vartheta_s + \frac{M}{h\pi}\int(d\sigma)_s\ .$$

Das Integral $\int(d\sigma)_s$ ist aber, nach (8 z.), $= h\pi(1 - \vartheta_s)$; man erhält also:

$$(42.)\qquad \text{abs}\, f_s' \leqq M\ .$$

Nun gelten, was das Potential (1.):

$$(43.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x$$

anbetrifft, die bekannten Relationen:

$$(44.)\qquad \begin{aligned} W_s &= f_s' - \vartheta_s f_s\,, \\ W_{as} &= f_s' - f_s\,, \\ W_{is} &= f_s' + f_s\,, \end{aligned} \qquad \text{[vergl. (24), (25.) pag. 46]}\,.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (41.), (42.), und falls man von Neuem beachtet, dass ϑ_s positiv und < 1 ist:

$$(45.)\qquad \begin{aligned} &\text{abs}\; W_s \leqq 2M\,, \\ &\text{abs}\; W_{as} \leqq 2M\,, \\ &\text{abs}\; W_{is} \leqq 2M\,; \end{aligned}$$

Analoges gilt aber auch für die W_a und W_i. Es repräsentiren nämlich die W_a und W_{as} zusammengenommen eine *Fundamental-function des Gebietes* $\mathfrak{A}$ [Satz pag. 47]. Und nach (45.) gilt für sämmtliche W_{as} die Formel

$$-2M \leqq W_{as} \leqq +2M\,.$$

Zufolge eines bekannten allgemeinen Satzes über die Fundamental-functionen [Erster Satz pag. 26] wird daher für die W_a ebendieselbe Formel gelten:

$$-2M \leqq W_a \leqq +2M\,;$$

woraus folgt:

$$(46.)\qquad \text{abs}\; W_a \leqq 2M\,.$$

In ähnlicher Weise wird man offenbar erhalten:

$$(47.)\qquad \text{abs}\; W_i \leqq 2M\,.$$

Diese Formeln (45.), (46.), (47.) führen zu folgendem Satz:

Denkt man sich auf einer überall convexen geschlossenen Curve oder Fläche σ [die übrigens mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf], *irgend eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben, deren absolut grösster Werth M heissen mag, und setzt man:*

$$(48.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\,,$$

so werden die W_s, W_a, W_{as}, W_i, W_{is}, *ihrem absoluten Betrage nach, durchweg* $\leqq 2M$ *sein.*

§ 6.

Genauere Untersuchung der im vorhergehenden Paragraph eingeführten variablen Grösse ζ.

In einem beliebigen geradlinigen Viereck $ABCD$ wird die Halbirungslinie des bei A gelegenen Innenwinkels nothwendiger Weise durch das Centrum *des dem Viereck einbeschriebenen Kreises* gehen. Gleiches gilt von den Winkeln B, C, D. Somit gelangt man zu dem Satz, dass bei jedem Viereck die Halbirungslinien der vier Innenwinkel sich in ein und demselben Punkte schneiden.

Dieser Satz ist offenbar *falsch.* Und der von uns gemachte Fehler besteht darin, dass wir mit einem in Wirklichkeit *nicht* existirenden Begriff (nämlich mit dem Begriff des dem Viereck einbeschriebenen Kreises) operirt haben. Es erwächst hieraus die Regel, dass man bei mathematischen Untersuchungen, falls Fehler vermieden werden sollen, keinen Begriff früher gebrauchen darf, als bis seine *Existenz* nachgewiesen ist, — selbst dann nicht, wenn der betreffende Begriff nur eine auxiliare Rolle spielt, und das schliesslich sich ergebende Resultat von demselben frei ist.

So wird man z. B. den *Maximalwerth* einer gegebenen Function in die Reihe der aufeinander folgenden Conclusionen niemals aufnehmen dürfen, falls nicht zuvor seine *Existenz* constatirt ist.

Nun ist im vorhergehenden § bei Aufstellung des Satzes (27.) pag. 55 von dem *Maximalwerthe* der Variablen ζ Gebrauch gemacht worden. Wäre ζ eine *gewöhnliche* Function von n Argumenten, so würde (weil die Stetigkeit von ζ keinem Zweifel unterliegt) die *Existenz* eines solchen Maximalwerthes ohne Weiteres folgen aus einem bekannten *Weierstrass'schen Theorem.* Bei dem ganz *absonderlichen* Charakter der Variablen ζ erscheint aber die Anwendbarkeit des Weierstrass'schen Theorems auf diese Variable ζ einigermassen *bedenklich*, mithin die Existenz eines Maximalwerthes von ζ einigermassen *unsicher*, und hierdurch das Fundament des in Rede stehenden Satzes (27.) pag. 55 einigermassen *erschüttert.*

Demgemäss werde ich diesen Satz (27.) im gegenwärtigen § auf einem *andern* Wege ableiten, und zwar auf einem Wege, der von subtilen Maximums- oder Minimums-Untersuchungen völlig frei, und überhaupt von ganz elementarer Natur ist. Dabei beschränke

ich mich von vornherein auf solche Curven oder Flächen σ, die *überall convex* und *keine zweisternigen* sind.

Es handelt sich um die Variable

$$(1.)\qquad \zeta = 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi}\,, \quad \text{(vgl. pag. 52)};$$

und es mag wie früher gesetzt werden:

$$(2.)\qquad \zeta = 1 - \frac{\xi}{2h\pi}\,,$$

wo alsdann ξ die Bedeutung hat:

$$(3.)\qquad \xi = \int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q\,.$$

Ich beginne in der *Ebene*, und zwar mit dem Falle, dass die Curve σ ein *geradliniges Fünfeck* ist. Alsdann wird also, weil σ überall convex und nicht zweisternig sein soll, vorauszusetzen sein, *dass die Innenwinkel dieses Fünfecks durchweg* $< 180^\circ$, *und dass seine Seiten durchweg* > 0 *sind.* Diese Seiten des Fünfecks seien bezeichnet mit a, b, c, d, e; ferner sei k die *kleinste* derselben, und ϱ irgend eine positive Constante, die $< \frac{k}{2}$ ist. Ueberdies sei der zu a *complementare Theil* der Peripherie des Fünfecks, d. i. die gebrochene Linie $bcde$, mit A bezeichnet. Ebenso sei der zu b complementare Theil jener Peripherie mit B benannt; u. s. w.

Denkt man sich um die beiden Endpunkte von a Kreise beschrieben vom Radius ϱ, und die innerhalb dieser Kreise befindlichen Theile von a und A *ausgelöscht*, so mögen die alsdann noch übrig bleibenden Theile von a und A respective mit a_0 und A_0 bezeichnet sein. Alsdann sind offenbar a_0 und A_0 zwei von einander *völlig getrennte* Gebilde, a_0 *geradlinig*, und A_0 eine *gebrochene Linie mit drei Ecken**). In analoger Weise mögen b_0 und B_0, ferner c_0 und C_0, ferner d_0 und D_0, endlich e_0 und E_0 definirt sein.

Ich werde nun nachweisen, dass der in (3.) angegebene Ausdruck:

$$\xi = \int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q\,,$$

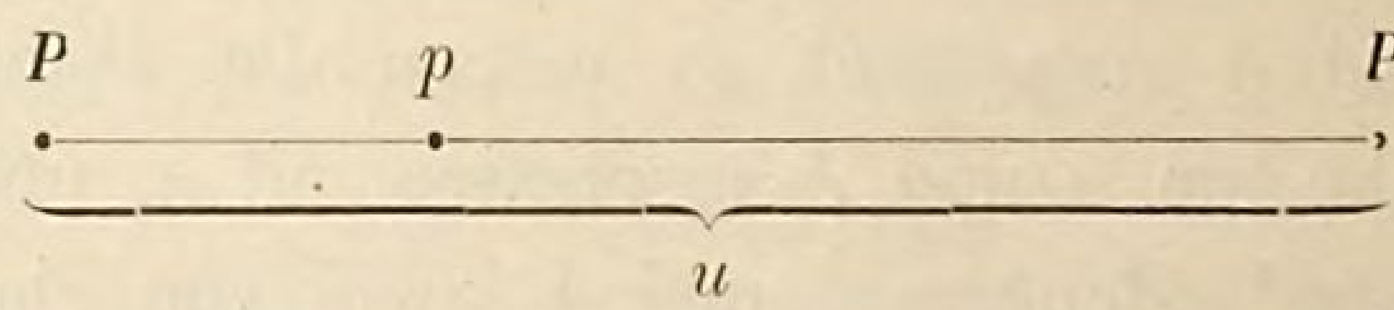
wie man die beiden Theile α und β der Peripherie σ des gegebenen Fünfecks auch immer wählen mag, stets > 0 bleibt, so lange die Punkte p, q in ihrer Bewegung *auf* A_0 *beschränkt* sind. Solches aus-

*) Vergl. die Figur pag. 64.

geführt gedacht, wird alsdann offenbar Gleiches auch gelten, wenn die Bewegung der beiden Punkte p, q auf B_0 beschränkt ist, ebenso, wenn sie auf C_0, oder auf D_0, oder auf E_0 beschränkt ist. *Hiermit wird alsdann aber zugleich dargethan sein*, dass ξ auch dann stets > 0 bleibt, wenn jene Punkte p, q auf der Peripherie σ des Fünfecks in *völlig freier* Bewegung begriffen sind. Denn welche Lage man den Punkten p, q auf dieser Peripherie auch zuertheilen mag, stets werden sie entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, oder *beide* auf C_0, oder *beide* auf D_0, oder endlich *beide* auf E_0 liegen; — wie sich solches leicht beweisen lässt in folgender Art.

Man denke sich die Punkte p, q auf der Peripherie des Fünfecks *beliebig markirt*, und bezeichne *diejenige* der fünf Seiten a, b, c, d, e, auf welcher p liegt, oder (falls p in einer Ecke des Fünfecks gelegen sein sollte) *eine* von denjenigen beiden Seiten, auf denen p liegt, mit u. Desgleichen bezeichne man *diejenige* Seite, auf welcher q liegt, resp. *eine* von denjenigen beiden Seiten, auf denen q liegt, mit v. Möglicherweise können p und q beide auf *derselben* Seite sich befinden; alsdann würden u und v untereinander identisch sein, — was auf den Gang unserer Betrachtungen keinen Einfluss hat.

Man bezeichne nun die beiden Endpunkte der Seite u mit P, P', und zwar der Art, dass $pP \leqq pP'$ ist. Alsdann wird offenbar,



weil (nach der Definition von ϱ) $PP' > 2\varrho$ ist, die Formel gelten:

$$(\alpha.) \qquad pP' > \varrho\ .$$

Ebenso bezeichne man die beiden Endpunkte von v mit Q, Q', der Art, dass $qQ \leqq qQ'$ ist; so dass also wiederum die Formel stattfindet:

$$(\beta.) \qquad qQ' > \varrho\ .$$

Die beiden Punkte P, Q repräsentiren zwei *Ecken* des gegebenen Fünfecks. Diese beiden Ecken P, Q können zusammengenommen höchstens *vier* Seiten des Fünfecks angehören. Es wird also stets mindestens *eine* Seite existiren, die von P, Q *frei* ist. Diese von P, Q freie Seite mag w heissen. Und sollten *mehrere* solche von P, Q freie Seiten vorhanden sein, so mag unter w irgend eine derselben

(gleichviel welche) verstanden werden. Gleichzeitig mögen die Bezeichnungen w_0, W, W_0 eingeführt werden, genau in derselben Weise, wie z. B. mit Bezug auf a die Bezeichnungen a_0, A, A_0 gebraucht sind; so dass z. B. W eine *gebrochene Linie*, nämlich einen *Complex von vier Seiten* vorstellt. Alsdann gehören die beiden Seiten

$$(\gamma.) \qquad u = PpP' \quad \text{und} \quad v = QqQ'$$

nothwendiger Weise zum Seitencomplex W. Denn gehörte z. B. die Seite $u = PpP'$ *nicht* zu W, so müsste sie identisch sein mit w, und es müsste also w den Punkt P enthalten, während doch w (seiner Definition zufolge) von P *frei* sein soll.

Die beiden *Endpunkte* des Complexes W sind offenbar identisch mit den beiden *Endpunkten* der Seite w. Und dabei ist zu bemerken, dass keiner der beiden Punkte

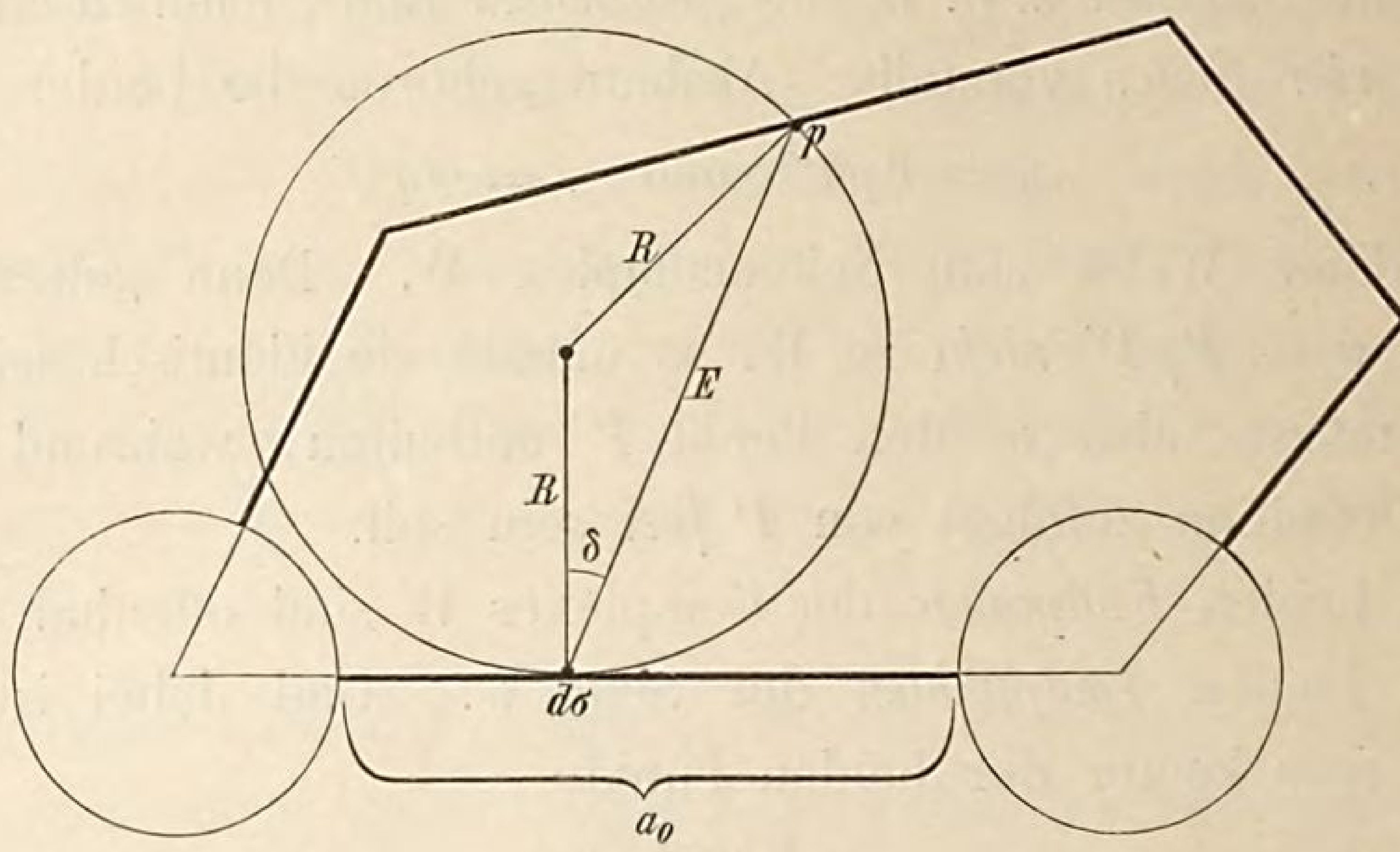
$$(\delta.) \qquad P \text{ und } Q$$

ein Endpunkt von W, oder (was dasselbe) ein Endpunkt von w sein kann. Denn sonst würde w mit P behaftet sein, respective mit Q, während doch w (seiner Definition zufolge) von P und Q *frei* sein soll. Schliesslich sei noch bemerkt, dass die *vier* den Complex W constituirenden Seiten in *innere* und *äussere* eintheilbar sind; wobei alsdann unter den *äusseren* diejenigen beiden zu verstehen sein werden, welche je einem *Endpunkte* von W sich anschliessen.

Wir kommen endlich zum eigentlichen Kern der Sache. Der Punkt p liegt auf u, also, nach (γ.), auch auf W. *Nun lässt sich aber nachweisen, dass p nicht nur auf W, sondern auch auf W_0 liegt.* Dies bedarf offenbar für den Fall, dass $u = PpP'$ eine *innere* Seite des Complexes W ist, keiner weiteren Erläuterung. Ist andererseits $u = PpP'$ eine *äussere* Seite des Complexes W, so muss entweder P oder P' ein Endpunkt von W sein; und es muss daher, weil die erstere Möglichkeit durch (δ.) abgeschnitten wird, nothwendiger Weise *der Punkt P'* ein Endpunkt von W sein. Der Abstand des Punktes p von diesem Endpunkte P' ist aber, nach (α.), $> \varrho$. Folglich liegt p auf W_0.

Der Punkt p befindet sich also unter allen Umständen auf W_0. Und Gleiches wird, mittelst (β.), (γ.), (δ.) für q nachweisbar sein. Es liegen also die Punkte p, q *beide* auf W_0, d. h. entweder beide auf A_0, oder beide auf B_0, oder beide auf C_0, oder beide auf D_0, oder endlich beide auf E_0. — *Q. e. d.*

In der nachstehenden Figur sei a die *untere* Seite; so dass also a_0 den ausserhalb der beiden Kreise (ϱ) befindlichen *stark markirten* Theil der Linie a, und A_0 die ausserhalb jener beiden Kreise be-



findliche *stark markirte* gebrochene Linie bezeichnet *). Ist nun $d\sigma$ irgend ein Element der Linie a_0, und p irgend ein Punkt auf A_0, so wird [vgl. (2.) pag. 28]:

$$(4.)\qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma\,.\,\cos\delta}{E},$$

wo E den Abstand des Punktes p von $d\sigma$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete Normale vorstellt. Construirt man eine die Linie a_0 in $d\sigma$ berührende und durch p gehende Kreisperipherie, so ergiebt sich für den Radius R dieser Peripherie die Gleichung: $2R\cos\delta = E$; wodurch die Formel (4.) übergeht in:

$$(5.)\qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma}{2R}\,.$$

Welche Lage man nun dem Elemente $d\sigma$ auf a_0 und dem Punkte p auf A_0 zuertheilen mag, niemals kann dabei der Kreisradius R unendlich gross werden; denn der Punkt p kann bei einer Durchlaufung der gebrochenen Linie A_0 niemals auf die Linie a_0 oder auf die Verlängerung derselben fallen **).

*) In dieser Figur ist in der That $\varrho < \frac{k}{2}$, entsprechend der auf pag. 61 gemachten Festsetzung.

**) Es ist hierbei die anfangs (pag. 61) gemachte Voraussetzung im Auge zu behalten, dass das gegebene Fünfeck *überall convex* und *kein zweisterniges* sein soll, dass also seine Innenwinkel durchweg $< 180^0$, und seine Seiten durchweg > 0 sind.

Ja noch mehr: Man erkennt, dass der *grösste Werth*, den jener Radius R für alle auf a_0 befindlichen Elemente $d\sigma$ und für alle auf A_0 befindlichen Punkte p annehmen kann, ein **bestimmter endlicher** ist, *der, falls die Seiten und Winkel des Fünfecks in bestimmter Weise gegeben sind, sofort und ohne Mühe berechnet werden könnte.* Bezeichnet man nun diesen bestimmten endlichen Werth mit R_A, so ist R stets $\leqq R_A$; so dass sich also aus (5.) ergiebt:

$$(6\text{p.})\quad (d\sigma)_p \geqq \frac{d\sigma}{2R_A}\,,\quad (\text{vorausgesetzt } d\sigma \text{ auf } a_0, \text{ und } p \text{ auf } A_0)\;.$$

Nimmt man statt p irgend einen *anderen*, ebenfalls auf A_0 gelegenen Punkt q, so wiederholt sich dieselbe Formel:

$$(6\text{q.})\quad (d\sigma)_q \geqq \frac{d\sigma}{2R_A}\,,\quad (d\sigma \text{ auf } a_0, \text{ und } q \text{ auf } A_0)\;.$$

Wir zerlegen jetzt die *ganze Peripherie* des Fünfecks [genau wie früher, Satz pag. 55] in beliebiger Weise in zwei Theile α und β, deren jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen kann, und bezeichnen die auf a_0 fallenden Theile von α und β respective mit α_0 und β_0; so dass also a_0 durch die Gesammtheit von α_0 und β_0 dargestellt ist:

$$(7.)\qquad a_0 = \alpha_0 + \beta_0\;.$$

Alsdann wird offenbar, weil α_0 einen Theil von α, möglicherweise auch das ganze α repräsentirt [und weil überdies die $(d\alpha)_p$ durchweg *positiv* sind; vergl. (8x.) pag. 49], die Relation stattfinden:

$$\int (d\alpha)_p \geqq \int (d\alpha_0)_p\;.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$\int (d\beta)_q \geqq \int (d\beta_0)_q\;.$$

Demgemäss folgt aus (3.) pag. 61 sofort:

$$(8.)\qquad \xi \geqq \int (d\alpha_0)_p + \int (d\beta_0)_q\;.$$

Nach (6p.) ist aber jedwedes $(d\alpha_0)_p \geqq \frac{d\alpha_0}{2R_A}$, und nach (6q.) jedwedes $(d\beta_0)_q \geqq \frac{d\beta_0}{2R_A}$. Somit folgt aus (8.):

$$(9.)\qquad \xi \geqq \frac{\int d\alpha_0 + \int d\beta_0}{2R_A} = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2R_A}\,,$$

d. i. mit Rücksicht auf (7.):

$$(10\text{a.})\quad \xi \geqq \frac{a_0}{2R_A}\,,\quad (\text{vorausgesetzt } p \text{ und } q \text{ beide auf } A_0)\;.$$

Bei analoger Bezeichnungsweise wird sich nun ferner ergeben:

$$(10\text{b.})\qquad \xi \geqq \frac{b_0}{2R_B}\,, \quad (\text{falls } p \text{ und } q \text{ beide auf } B_0)\ ;$$

hier steht alsdann R_B zu b_0, B_0 in derselben Beziehung wie R_A zu a_0, A_0. U. s. w. U. s. w.

Im Ganzen erhält man *fünf* solche Formeln (10a.), (10b.), etc., in denen *fünf* Grössen R, nämlich R_A, R_B, R_C, R_D, R_E enthalten sind, die durchweg ebenso wie R_A, *völlig bestimmte endliche* Werthe haben. Bezeichnet man nun den *kleinsten* der fünf Quotienten:

$$(11.)\qquad \frac{a_0}{2R_A}\,,\ \frac{b_0}{2R_B}\,,\ \frac{c_0}{2R_C}\,,\ \frac{d_0}{2R_D}\,,\ \frac{e_0}{2R_E}$$

mit $\varkappa^2$, so folgt aus jenen fünf Formeln sofort:

$$(12.)\qquad \begin{aligned} &\xi \geqq \varkappa^2, \ (\text{falls } p,\ q \text{ beide auf } A_0)\ ,\\ &\xi \geqq \varkappa^2, \ (\text{falls } p,\ q \text{ beide auf } B_0)\ ,\\ &\xi \geqq \varkappa^2, \ (\text{falls } p,\ q \text{ beide auf } C_0)\ ,\\ &\xi \geqq \varkappa^2, \ (\text{falls } p,\ q \text{ beide auf } D_0)\ ,\\ &\xi \geqq \varkappa^2, \ (\text{falls } p,\ q \text{ beide auf } E_0)\ . \end{aligned}$$

Folglich gilt die Formel $\xi \geqq \varkappa^2$ *ganz allgemein* für zwei auf der Peripherie des Fünfecks in *beliebiger Bewegung* begriffene Punkte p, q. Denn welche Lage dieselben auf dieser Peripherie auch annehmen mögen, stets wird, wie vorhin bewiesen ist, unter den gebrochenen Linien A_0, B_0, C_0, D_0, E_0 *eine* vorhanden sein, welche gleichzeitig *beide* Punkte enthält. Aus dieser ganz allgemein geltenden Formel

$$(13.)\qquad \xi \geqq \varkappa^2$$

folgt sodann aber mittelst (2.) pag. 61, dass in gleicher Allgemeinheit auch

$$(14.)\qquad \zeta \leqq 1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

ist*). Die Constante $\varkappa^2$ repräsentirt den kleinsten der in (11.) aufgeführten Quotienten, und besitzt also einen jeder Zeit berechenbaren *positiven* und *von Null verschiedenen* Werth. Und demgemäss ist die Differenz

$$1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

nothwendig < 1.

*) Es ist zu beachten, dass die in (2.) enthaltene Zahl h hier im Fall der *Ebene* $= 1$ ist.

Hiermit können wir in Verbindung bringen ein früher [in (18.) pag. 53] auf völlig unanfechtbarem Wege erhaltenes Resultat, demzufolge die Variable ζ stets *positiv* bleibt. Da nun nach (14.) dieses stets *positive* $\zeta \leqq \left(1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)$ ist, so folgt hieraus, dass die Constante

$$1 - \frac{\varkappa^2}{2\pi}$$

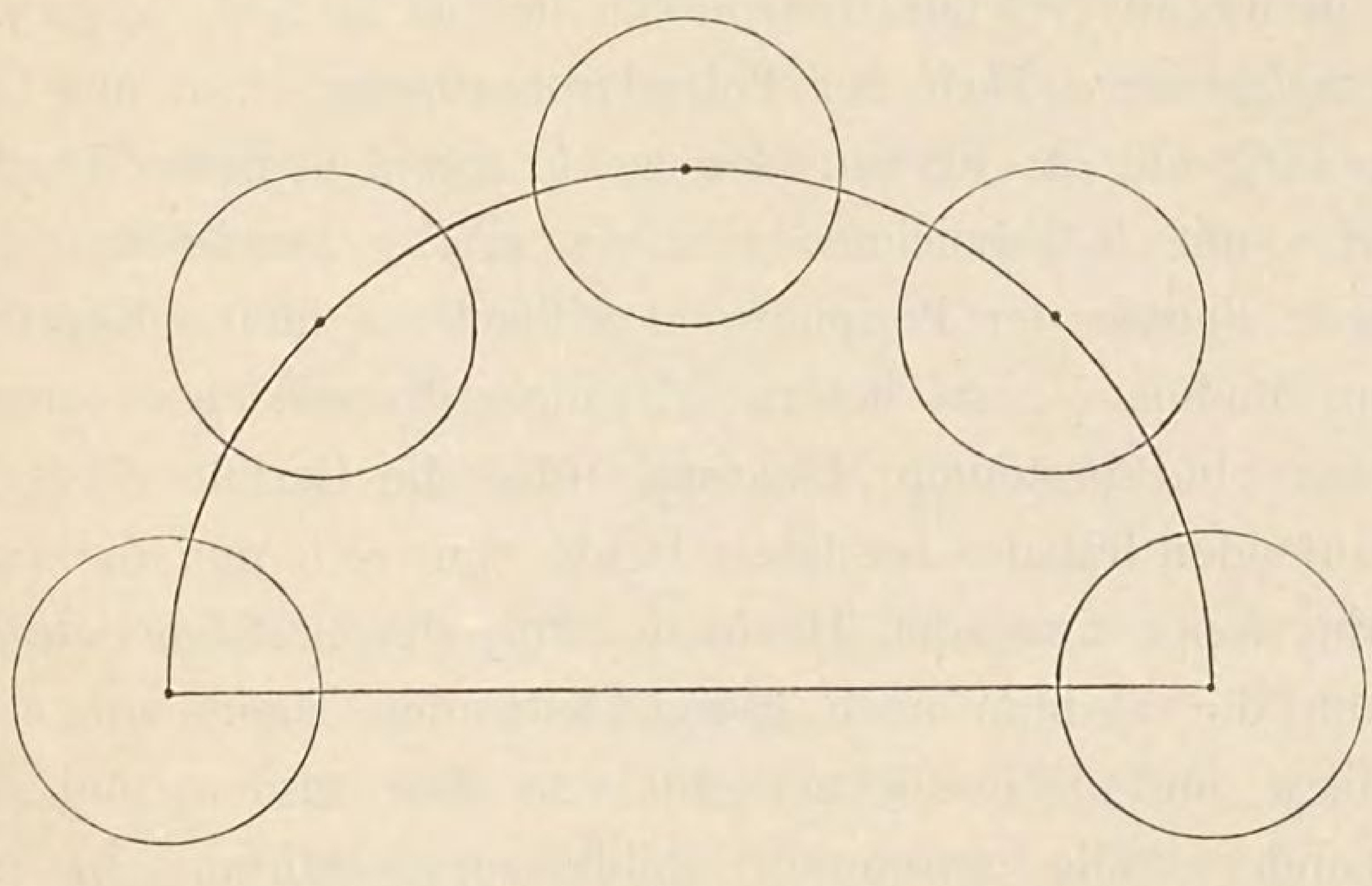
ebenfalls *positiv* ist. Bezeichnet man daher diese Constante mit λ, so gelangt man, auf Grund der Formel (14.), zu folgendem Resultat:

Denkt man sich irgend ein geradliniges Fünfeck gegeben, und setzt man voraus, dass die Peripherie desselben überall convex und keine zweisternige ist, so wird die dieser Peripherie entsprechende Variable ζ, unter allen Umständen, immer nur solche Werthe anzunehmen im Stande sein, die der Formel Genüge leisten:

$$(15.) \qquad 0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1 .$$

Dabei bezeichnet λ eine positive Constante, die wirklich < 1 ist, d. h. eine positive Constante, die um einen angebbaren Betrag < 1 ist. Und zwar würde man diesen Betrag, falls die Seiten und Winkel des Fünfecks in bestimmter Weise gegeben sind, sofort und ohne Mühe zu berechnen im Stande sein.

In genau derselben Weise wie das *Fünfeck* wird man nun z. B. auch den *Halbkreis* behandeln können. Man hat zu diesem Zweck die Peripherie des Halbkreises in *fünf Theile* a, b, c, d, e



zu zerlegen, von denen a den *Durchmesser* repräsentirt, mithin $= 2$ ist, falls man den Radius des gegebenen Halbkreises der Einfachheit willen $= 1$ nimmt. Für die vier anderen Theile b, c, d, e kann

man je ein Viertel der halben Kreislinie nehmen; so dass also jeder der Theile b, c, d, e die Länge $\frac{\pi}{4}$ besitzt. Ueberdies kann man den Radius ϱ der anzuwendenden *kleinen Kreise* (die um die gegenseitigen Grenzpunkte von a, b, c, d, e zu beschreiben sind), beliebig wählen, jedoch der Art, dass *ausserhalb* dieser Kreise noch gewisse Stücke jener Theile b, c, d, e übrig bleiben. — Solches festgesetzt, ist alsdann die anzuwendende Methode Schritt für Schritt dieselbe wie vorhin beim Fünfeck, auch genau von demselben Resultat (15.) begleitet, und genau von derselben *Evidenz*.

Solches erkannt, übersieht man jetzt sofort, dass jener Satz (15.) in ganz analoger Weise constatirbar ist für jede beliebige *überall convexe* und *nicht zweisternige* geschlossene Curve σ. Man wird zu diesem Zweck die Curve σ in irgend welche fünf Theile a, b, c, d, e zu zerlegen, und dabei nur darauf zu achten haben, dass, falls die Curve geradlinige Strecken besitzen sollte, keine dieser geradlinigen Strecken bei jener Zerlegung zerschnitten wird.

In analoger Weise lässt sich nun auch die Untersuchung im Raume bewerkstelligen. Wir betrachten zunächst ein von *sieben ebenen Seitenflächen begrenztes Polyeder*, welches *überall convex* und *nicht zweisternig* sein soll (wie z. B. ein mit zwei ebenen Endflächen versehenes fünfseitiges Prisma), und bezeichnen die sieben Seitenflächen in irgend welcher Reihenfolge mit a, b, c, d, e, f, g. Der zu a *complementare Theil* der Polyederoberfläche, d. i. der Complex $bcdefg$ mag mit A, ebenso der zu b complementare Theil jener Oberfläche mit B bezeichnet sein, u. s. f. Beschreibt man um sämmtliche Punkte der Peripherie der Fläche a kleine Kugelflächen, alle vom Radius ϱ, so liefern all' diese Kugelflächen zusammengenommen eine bestimmte *Enveloppe* (die die Gestalt eines in sich zurücklaufenden Kanales besitzt). Denkt man sich nun die *innerhalb* dieser Enveloppe liegenden Theile der Polyederoberfläche *ausgelöscht*, so mögen die alsdann noch übrig bleibenden Theile von a und A resp. mit a_0 und A_0 bezeichnet sein; so dass also a_0 und A_0 zwei von einander völlig getrennte Gebilde repräsentiren. In analoger Weise mögen b_0, B_0 definirt sein, ferner c_0, C_0, u. s. f.; wobei der für die kleinen Kugeln resp. Enveloppen anzunehmende Radius ϱ stets *ein und derselbe* sein soll.

Diese Constante ϱ braucht übrigens nicht gerade eine superlative Kleinheit zu haben, sondern nur so klein zu sein, dass das Polygon a_0 *ebenso viele* Seiten hat wie a selber, dass ferner das Polygon b_0 *ebenso viele* Seiten hat wie b, u. s. f.

Nachdem ϱ, dieser Restriction entsprechend, in *bestimmter* Weise festgesetzt, mithin a_0, A_0, b_0, B_0, etc. ebenfalls völlig *bestimmt* fixirt sind, wollen wir jetzt in der Ebene der beiden Polygone a, a_0 eine Kreislinie vom Radius ϱ construiren. Diese Kreislinie wird, falls man ihr Centrum *längs der Peripherie des Polygons* a_0 fortwandern lässt, fortdauernd mit der Peripherie von a in *Berührung* bleiben; und zwar der Art, dass in jedem Augenblick entweder *einer* oder *zwei* Berührungspunkte vorhanden sind. Ferner wird diese Kreislinie, wenn man ihr Centrum *innerhalb* a_0 sich bewegen lässt, die Peripherie von a *nirgends* treffen. Endlich wird diese Kreislinie, falls man ihr Centrum *zwischen den beiden Peripherien von a_0 und a* sich fortbewegen lässt, die Peripherie von a *schneiden*, jedoch der Art, dass sie in jedem Augenblick von allen Seiten oder Kanten*) des Polygons a immer nur *eine* oder aber *zwei aufeinanderfolgende* schneidet.

Diese Bemerkungen vorausgeschickt, werde ich nun nachweisen, dass die dem gegebenen Polyeder entsprechende Variable

$$\xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q$$

stets > 0 bleibt, so lange die Punkte p, q auf A_0 beschränkt sind. Gleiches gilt alsdann für eine Beschränkung derselben auf B_0, oder auf C_0, u. s. f. Und Gleiches gilt daher alsdann auch für den Fall, dass die Punkte p, q auf der gegebenen Polyederoberfläche in *völlig freier* Bewegung begriffen sind. Denn welche Lage man den Punkten p, q auf dieser Oberfläche auch zuertheilen mag, stets werden sie entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, u. s. f. sich befinden, wie sich solches in folgender Art beweisen lässt.

Die Punkte p, q seien auf der Polyederoberfläche *beliebig* markirt; und es sei u diejenige der sieben Polyederflächen a, b, c, d, e, f, g, auf welcher p, und v diejenige, auf welcher q liegt. Man bezeichne nun eine Ecke des Polygons u mit P, die

*) Ich bezeichne die Seiten des Polygons a als *Kanten*, weil sie Kanten des gegebenen Polyeders sind.

beiden von P ausgehenden Seiten (oder Kanten) des Polygons mit PP' und PP'', und *alle übrigen* Seiten (oder Kanten) des Polygons zusammengenommen mit $P'P''$. Und zwar richte man diese Bezeichnungen der Art ein, dass der auf u markirte Punkt p von jedweder Seite des Complexes $P'P''$ einen senkrechten Abstand hat, der

$$(\alpha.) \qquad > \varrho$$

ist, — was zufolge der Ueberlegungen auf pag. 69 stets möglich sein wird *).

In analoger Weise mögen auf v der Punkt Q und die Symbole QQ', QQ'', $Q'Q''$ definirt sein; also der Art, dass der auf v gegebene Punkt q von jedweder Seite des Complexes $Q'Q''$ einen senkrechten Abstand hat, der

$$(\beta.) \qquad > \varrho$$

ist.

Die Polyederecken P und Q liegen zusammengenommen (weil die Polyederoberfläche aus *sieben* ebenen Flächen besteht, und keine zweisternige sein soll) höchstens auf *sechs* Polyederflächen. Unter allen Umständen wird also *eine* von P und Q *freie* Polyederfläche angebbar sein. Sie mag w heissen. Und dementsprechend mögen die Bezeichnungen w_0, W, W_0 angewandt werden. Alsdann gehören die beiden Polyederflächen

$$(\gamma.) \qquad u = (pPP'P'') \quad \text{und} \quad v = (qQQ'Q'')$$

jedenfalls zu W. Denn gehörte z. B. u *nicht* zu W, so müsste u identisch sein mit w; es müsste also w den Punkt P enthalten, während doch w (seiner Definition zufolge) von P *frei* sein soll.

*) Denkt man sich nämlich in der Ebene der Polyederfläche u um den gegebenen Punkt p (als Centrum) eine Kreislinie vom Radius ϱ beschrieben, so sind, welche Lage auch p auf u haben mag, stets nur drei Fälle möglich. Entweder die Kreislinie schneidet (resp. berührt) *gar keine* Seite des Polygons u; oder sie schneidet (resp. berührt) nur *eine* Seite des Polygons; oder endlich sie schneidet (resp. berührt) *zwei aufeinanderfolgende* Seiten des Polygons. Stets wird man also die Bezeichnungen PP', PP'', $P'P''$ der Art einrichten können, dass der Complex $P'P''$ nur solche Seiten enthält, die von jener Kreislinie weder geschnitten noch auch berührt werden. Alsdann aber wird p von *jedweder* Seite dieses Complexes $P'P''$ einen senkrechten Abstand haben, der $> \varrho$ ist. — *Q. e. d.*

Die *Peripherie* des Complexes W ist offenbar identisch mit der *Peripherie* von w. Hieraus folgt, dass keiner der beiden Punkte

(δ.) P und Q

auf der Peripherie von W, oder (was dasselbe) auf der Peripherie von w liegen kann. Denn sonst würde w mit P behaftet sein, respective mit Q, während doch w (seiner Definition nach) von P und Q *frei* sein soll. Dabei sei bemerkt, dass die *sechs* den Complex W constituirenden Flächen in *innere* und *äussere* eintheilbar sind, wobei alsdann unter den *äusseren* diejenigen zu verstehen sein werden, welche der *Peripherie* von W sich anschliessen.

Der Punkt p liegt auf u, also nach (γ.) auch auf W. *Nun lässt sich aber zeigen, dass der Punkt p nicht nur auf W, sondern auch auf W_0 liegt.* Dies bedarf für den Fall, dass u eine *innere* Fläche des Complexes W ist, keiner Erläuterung. Ist andererseits u eine *äussere* Fläche des Complexes W, so werden unter den mit PP', PP'', $P'P''$ bezeichneten Seiten des Polygons u *eine* oder *mehrere* vorhanden sein, die auf der Peripherie von W liegen. Hierher aber können die Seiten PP' und PP'' unmöglich gehören, weil sonst P auf dieser Peripherie liegen würde, was nach (δ.) nicht der Fall ist. Auf der Peripherie von W können daher nur solche Seiten des Polygons u gelegen sein, welche dem Complex $P'P''$ zugehören. Von jeder solchen zu $P'P''$ gehörigen Seite hat aber der Punkt p, nach (α.), einen senkrechten Abstand, der $> \varrho$ ist. Folglich wird der Punkt p auch in diesem Falle, dass u eine *äussere* Fläche des Complexes W repräsentirt, nothwendig auf W_0 liegen.

Gleiches lässt sich, mittelst (β.), (γ.), (δ.), für q nachweisen. Folglich liegen die Punkte p und q *beide* auf W_0, d. i. entweder *beide* auf A_0, oder *beide* auf B_0, u. s. f. — *Q. e. d.*

Ist nun $d\sigma$ irgend ein Element der Fläche a_0, und p irgend ein Punkt auf A_0, so wird [vergl. (2.) pag. 28]

$$(16.) \qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma \,.\, \cos\delta}{E^2},$$

wo E den Abstand des Punktes p vom Element $d\sigma$ vorstellt, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete Normale bezeichnet. Construirt man eine die Fläche a_0 in $d\sigma$ berührende und durch p

gehende Kugelfläche, und ist R der Radius dieser Kugelfläche, so wird [vergl. etwa die Figur auf pag. 64] die Relation stattfinden: $2R \cos\delta = E$. Somit folgt aus (16.):

$$(17.)\qquad (d\sigma)_p = \frac{d\sigma}{2RE},$$

also, weil $E \leqq 2R$ ist:

$$(18.)\qquad (d\sigma)_p \geqq \frac{d\sigma}{4R^2}.$$

Von hier aus kann man nun in genau derselben Weise weiter schliessen, wie früher beim Fünfeck [beim Uebergange von (5.) zu (11.), (12.)], und gelangt so zu dem Resultate, dass

$$(19.)\qquad \xi \text{ stets } \geqq \varkappa^2$$

ist, wo $\varkappa^2$ eine bestimmt angebbare *positive* und *von Null verschiedene* Constante vorstellt.

U. s. w. — *Man findet also schliesslich, dass der für ζ beim Fünfeck aufgestellte Satz (15.) in genau derselben Weise auch bei dem hier betrachteten siebenflächigen Polyeder gilt.*

Sodann aber übersieht man sofort, dass man diesen Satz auf demselben Wege überhaupt für jede beliebige *überall convexe* und *nicht zweisternige* geschlossene Fläche beweisen kann. Man wird zu diesem Zweck die gegebene Fläche in *sieben* beliebige Stücke a, b, c, d, e, f, g zu zerlegen, und dabei nur darauf zu achten haben, dass, falls die Fläche etwa *ebene Theile* besitzen sollte, keiner dieser ebenen Theile bei jener Zerlegung zerschnitten wird.

Alles zusammengefasst, gelangen wir also zu folgendem Resultate:

Betrachtet man die früher [(25.) pag. 55] *definirte Variable ζ für irgend eine geschlossene Curve oder Fläche σ, und setzt man dabei voraus, dass diese Curve oder Fläche σ überall convex und keine zweisternige ist, so wird jene Variable ζ stets der Formel entsprechen:*

$$(20.)\qquad 0 \leqq \zeta \leqq \lambda < 1,$$

wo λ eine positive Constante vorstellt, die wirklich < 1 ist. Diese Constante λ mag die Configurationsconstante der gegebenen Curve oder Fläche σ genannt werden.

§ 6a.

An Stelle von ζ wird eine etwas andere Variable z eingeführt, und letztere näher untersucht.

Wir wollen hier eine *überall convexe* geschlossene Curve oder Fläche σ betrachten, und dabei die zugehörige Formel (11a.) pag. 33:

$$(1.)\qquad 0 \leqq \vartheta_s < 1$$

in ihrer *vollen Strenge* verwenden, was die Voraussetzung involvirt, dass jene Curve oder Fläche σ frei ist von *Spitzen* resp. von *Spitzen und Schneiden**).

Ein Blick auf die früheren Formeln

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)z\,, \quad [(16.)\text{ pag. } 52]\,,$$

und

$$f_p' - f_q' \leqq (G - K)\zeta\,, \quad [(17.)\text{ pag. } 52]\,,$$

zeigt, dass man, statt der Discussion von ζ, ebenso gut die von z hätte können eintreten lassen, und dass letzteres wohl sogar vortheilhafter gewesen wäre. Denn ζ ist entstanden durch eine gewisse *Vergrösserung* von z, mithin $\geqq z$; und in Folge dieser Beziehung

$$z \leqq \zeta\,,$$

dürfte für die Beweisbarkeit der Formel $z < 1$ *mehr* Aussicht vorhanden sein, als für die Beweisbarkeit der Formel $\zeta < 1$.

Allerdings liegt bei der Variablen z

$$(2.)\; z = 1 - \frac{\int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{G - f_p}{G - K}\vartheta_p - \frac{f_q - K}{G - K}\vartheta_q$$

[vgl. (16.) pag. 52] der Uebelstand vor, dass sie *nicht*, wie dies bei ζ der Fall war, *nur* von *geometrischen* Verhältnissen abhängt, sondern vielmehr überdies auch noch von den jedesmal vorgeschriebenen *Functionswerthen* f dependirt. Von diesem Uebelstande aber kann man sich leicht dadurch befreien, dass man vier Fälle unterscheidet:

$$(3.)\quad \begin{cases} \textit{I. Fall:} & \text{die Punkte } p,\ q \text{ liegen beide auf } \alpha, \\ \textit{II. Fall:} & p,\ q \text{ liegen beide auf } \beta, \\ \textit{III. Fall:} & p \text{ liegt auf } \alpha, \text{ und } q \text{ auf } \beta, \\ \textit{IV. Fall:} & p \text{ liegt auf } \beta, \text{ und } q \text{ auf } \alpha\,; \end{cases}$$

*) Es ist dieser § 6a. der *einzige*, in welchem wir die Formel (1.) in voller Strenge anwenden. Denn in allen *früheren* §§, und auch in allen *weiter folgenden* §§ wird immer nur die *laxe* Formel

$$0 \leqq \vartheta_s \leqq 1$$

in Anwendung gebracht. Vgl. pag. 33.

und jeden Fall *einzeln* betrachtet. Alsdann nämlich gewähren die für α und β von Anfang an festgesetzten Bestimmungen:

$$(4\alpha.)\qquad K \leqq f \leqq \frac{G+K}{2}\,,\quad (\text{auf } \alpha)\,,$$

$$(4\beta.)\qquad \frac{G+K}{2} \leqq f \leqq G\,,\quad (\text{auf } \beta)\,,$$

[vgl. (12.) pag. 50] die Mittel und Wege, um die Variable z in jedem solchen *einzelnen* Fall von den f's zu befreien.

So ergeben sich z. B. im *I. Fall*, wo p und q beide *auf* α liegen sollen, aus der Formel (4α.) die Relationen

$$\frac{G-f_p}{G-K} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f_q-K}{G-K} \geqq 0\,,\quad (p \text{ und } q \text{ beide auf } \alpha)\;;$$

und hieraus ergeben sich, weil ϑ_p und ϑ_q [vgl. (1.)] stets *positiv* sind, die weiteren Relationen:

$$\frac{G-f_p}{G-K}\,\vartheta_p \geqq \frac{\vartheta_p}{2} \quad \text{und} \quad \frac{f_q-K}{G-K}\,\vartheta_q \geqq 0\,,\quad (p \text{ und } q \text{ beide auf } \alpha)\,.$$

Betrachtet man also den *I. Fall* für sich *allein*, so folgt aus (2.), und mit Rücksicht auf die beiden letzten Relationen, sofort:

$$z \leqq 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_p}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p}{2}\,,\quad (\text{im I. Fall})\,.$$

Wir wollen das in dieser Formel enthaltene z, weil es speciell dem I. Fall entspricht, mit z_1 benennen, und in ähnlicher Weise die dem II., III. und IV. Fall entsprechenden Werthe von z resp. mit z_2, z_3 und z_4 bezeichnen. Alsdann ergeben sich aus (2.) mit Rücksicht auf die in (3.) gegebene Charakteristik jener vier Fälle, und mit Rücksicht auf ($4\alpha,\beta$.) im Ganzen folgende vier Formeln:

$$(5.)\qquad \begin{aligned}
z_1 &\leqq 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p}{2} = Z_1\,,\\
z_2 &\leqq 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_q}{2} = Z_2\,,\\
z_3 &\leqq 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi} - \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} = Z_3\,,\\
z_4 &\leqq 1 - \frac{\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_q}{2h\pi} = Z_4\,,
\end{aligned}$$

wo Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 als Abbreviaturen dienen sollen für die Ausdrücke rechts.

Wir wollen jetzt z_1, z_2, z_3, z_4 oder vielmehr Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 einer genaueren Discussion unterwerfen, indem wir dabei die gegebene Curve

oder Fläche σ der in (1.) genannten Beschränkung unterwerfen, sonst aber über dieselbe **keine** *weitere Voraussetzung machen.*

Der Ausdruck Z_1 (5.) gewinnt, falls man aus ihm das Integral $\int(d\alpha)_p$, mittelst der Relation

$$\int(d\alpha)_p + \int(d\beta)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p)\,, \quad \text{[vgl. (14.) pag. 51]}\,,$$

eliminirt, die Gestalt:

$$(6.) \qquad Z_1 = \frac{1+\psi}{2}\,, \quad \text{wo } \psi = \frac{\int(d\beta)_p - \int(d\beta)_q}{h\pi}\,.$$

Nun sind zwei Möglichkeiten vorhanden, indem β entweder einen *Theil* von σ, oder das *ganze* σ repräsentirt.

Repräsentirt β das *ganze* σ, so ist:

$$\int(d\beta)_p = \int(d\sigma)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p)\,,$$
$$\int(d\beta)_q = \int(d\sigma)_q = h\pi\,(1 - \vartheta_q)\,, \quad \text{[vgl. (14.) pag. 51]}\,,$$

also nach (6.)

$$\psi = \vartheta_q - \vartheta_p\,.$$

Hieraus aber folgt, mittelst der aus (1.) entspringenden Relationen

$$0 \leqq \vartheta_p < 1\,,$$
$$0 \leqq \vartheta_q < 1\,,$$

sofort:

$$(G.) \qquad -1 < \psi < +1\,.$$

Repräsentirt andererseits β einen *Theil* von σ, so ergiebt sich:

$$\int(d\beta)_p < \int(d\sigma)_p = h\pi\,(1 - \vartheta_p) \leqq h\pi\,,$$
$$\int(d\beta)_q < \int(d\sigma)_q = h\pi\,(1 - \vartheta_q) \leqq h\pi\,,$$

also, weil die $(d\beta)_p$, $(d\beta)_q$ stets positiv sind:

$$0 \leqq \int(d\beta)_p < h\pi\,,$$
$$0 \leqq \int(d\beta)_q < h\pi\,.$$

Somit erhält man für den in (6.) angegebenen Ausdruck ψ die Formel

$$(H.) \qquad -1 < \psi < +1\,,$$

d. i. dieselbe Formel, wie vorher in (*G.*).

Stets ist also $\psi < 1$, und daher nach (6.) auch

(7.) Z_1 stets < 1 .

In genau derselben Weise wird sich offenbar ergeben, dass auch

(8.) Z_2 stets < 1

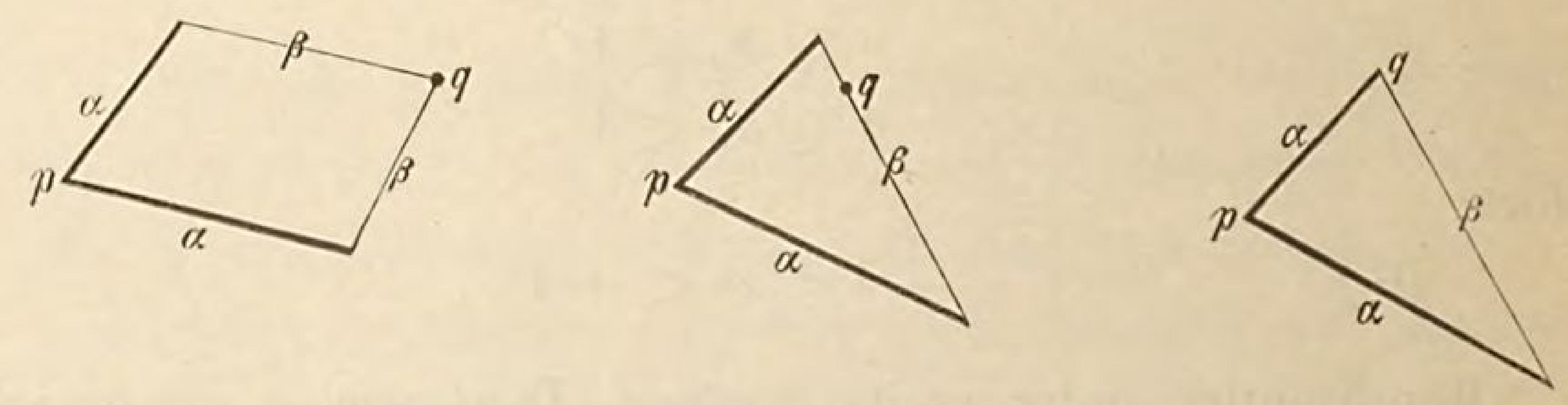
ist. Ferner ist nach (5.): $Z_3 = Z_2 - \frac{\vartheta_p}{2}$, also, weil $Z_2 < 1$ und ϑ_p positiv ist, auch:

(9.) Z_3 stets < 1 .

Es erübrigt also nur noch die Untersuchung des Ausdruckes

(10.) $Z_4 = 1 - \frac{\xi}{2h\pi}$, wo $\xi = \int (d\alpha)_p + \int (d\beta)_q$.

Beschränkt man sich zunächst auf die *Ebene*, d. i. auf eine in der Ebene gegebene *überall convexe* geschlossene Curve σ, so ist zum *Verschwinden* des Ausdruckes ξ [wie schon früher constatirt wurde; vgl. pag. 53, 54] erforderlich, dass alle Tangenten des Theiles α durch p, und alle Tangenten des Theiles β durch q gehen. Es ist also zum Verschwinden von ξ erforderlich, dass die Curve σ ein *geradliniges Viereck* oder *Dreieck* ist, und gleichzeitig erforderlich, dass dabei die Situation der Curventheile α, β und die Lage der Punkte p, q einer der drei folgenden Figuren entspricht:

(11.) 

Betrachtet man aber diese Figuren (in denen der Theil α *stark*, der Theil β *schwach* angegeben ist) ein wenig genauer, so bemerkt man, dass der Punkt p in der ersten Figur *nicht* auf β liegt, ebensowenig in der zweiten und dritten Figur, dass mithin all' diese drei Figuren in *Widerspruch* sind mit dem Charakter des hier betrachteten IV. Falles [vgl. (3.)].

Die Grösse ξ kann also in dem hier betrachteten IV. Fall *niemals* verschwinden *). Sie wird daher (weil sie ihrer Natur nach

*) Sie kann aber, ohne mit dem Charakter des IV. Falles in Widerspruch zu gerathen, *unendlich klein* werden; wie solches z. B. der Fall sein wird, wenn man z. B. in der *ersten* Figur (11.) auf der Peripherie des Vierecks zu beiden Seiten von p, und *unendlich nahe* an p zwei Punkte p' und p'' markirt, und die so entstehende unendlich kleine gebrochene Linie $p'p\,p''$ nicht zu α, sondern zu β gehören lässt. Alsdann nämlich ist der Charakter des IV. Falles *gewahrt*, und gleichzeitig ξ *unendlich klein*.

positiv ist) in dem hier betrachteten IV. Fall stets > 0 sein. Solches aber erkannt, folgt aus (10.), dass das diesem IV. Fall entsprechende Z_4 stets < 1 ist.

Analoges wird sich offenbar in analoger Weise im *Raume* bei einer *geschlossenen* Fläche herausstellen. Und man gelangt also zu dem Resultate, dass im Raume wie in der Ebene

$$(12.) \qquad Z_4 \text{ stets } < 1$$

ist.

Die Resultate (7.), (8.), (9.) und (12.) übertragen sich, mittelst der Relationen (5.), sofort auf z_1, z_2, z_3, z_4. Man erhält in solcher Weise die Formeln:

$$(13.) \qquad z_1 < 1 \,, \quad z_2 < 1 \,, \quad z_3 < 1 \,, \quad z_4 < 1 \,,$$

und gelangt also zu der Erkenntniss, *dass für irgend welche der Voraussetzung* (1.) *entsprechende geschlossene Curve oder Fläche σ die Variable z stets < 1 bleibt, dass sie also z. B. auch dann stets < 1 bleibt, wenn jene Curve oder Fläche σ eine zweisternige ist.*

Gegen die Richtigkeit dieses Satzes an und für sich ist nichts einzuwenden. Sehr störend aber für die Anwendung des Satzes ist der Umstand, dass die Variable z, im Fall einer *zweisternigen* Curve oder Fläche, dem Werthe 1 sich *asymptotisch* zu nähern im Stande ist; wie solches aus einer näheren Betrachtung der in (11.) angedeuteten Verhältnisse leicht hervorgeht [vgl. die Note pag. 76].

§ 7.

Das äussere und innere Problem. Lösung derselben nach der Methode des arithmetischen Mittels.

Ich habe die hier zu behandelnden Aufgaben — das äussere und innere Problem — bereits früher angegeben [pag. 20 und 27]. Dieselben lauten:

Das äussere Problem. — *Es soll diejenige Fundamentalfunction Φ des Gebietes 𝔄 construirt werden, welche an der Grenze von 𝔄 (d. i. auf σ) vorgeschriebene Werthe f besitzt. Oder kürzer ausgedrückt: Es soll die den vorgeschriebenen Grenzwerthen f entsprechende Fundamentalfunction Φ des Gebietes 𝔄 construirt werden.*

Das innere Problem. — *Es soll die den vorgeschriebenen Grenzwerthen f entsprechende Fundamentalfunction* Ψ *des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *construirt werden.*

Bei der Behandlung dieser beiden Probleme setze ich voraus, jene auf σ vorgeschriebenen Werthe f seien daselbst überall *stetig*. Die gegebene geschlossene Curve oder Fläche σ soll mit Ecken resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein dürfen. Jedoch setze ich voraus, dass dieselbe *überall convex* und *keine zweisternige* ist. Demgemäss wird derselben eine bestimmte *Configurationsconstante* λ zugehören, d. i. eine Constante, die positiv und < 1 ist [vgl. den Satz pag. 55 u. 72].

Ich werde im gegenwärtigen § *nur* die *Lösungen* der beiden Probleme angeben, und den Beweis für die Richtigkeit derselben erst im nächstfolgenden § mittheilen.

Die Lösungen der beiden Probleme. — Auf Grund der auf σ vorgeschriebenen *stetigen* Werthe f bilde man zuvörderst die Functionen W und f' mittelst der Formeln:

$$(A.)\qquad W_x = \frac{1}{h\pi}\int f(d\sigma)_x\,, \qquad f_s' = W_s + \vartheta_s f_s\,;$$

hierauf bilde man, auf Grund der Function f', die neuen Functionen W' und f'' mittelst der Formeln:

$$(A'.)\qquad W_x' = \frac{1}{h\pi}\int f'(d\sigma)_x\,, \qquad f_s'' = W_s' + \vartheta_s f_s'\,;$$

sodann bilde man, auf Grund von f'', die Functionen W'' und f''':

$$(A''.)\qquad W_x'' = \frac{1}{h\pi}\int f''(d\sigma)_x\,, \qquad f_s''' = W_s'' + \vartheta_s f_s''\,;$$

u. s. w., u. s. w.

Alsdann sind [vgl. pag. 48] die Functionen f_s', f_s'', f_s''', etc., ebenso wie f_s selber, auf σ *stetig*. Auch finden alsdann [nach Satz pag. 46] die Relationen statt:

$$(B.)\qquad W_{as} = f_s' - f_s\,, \qquad W_{is} = f_s' + f_s\,,$$

$$(B'.)\qquad W_{as}' = f_s'' - f_s'\,, \qquad W_{is}' = f_s'' + f_s'\,,$$

$$(B''.)\qquad W_{as}'' = f_s''' - f_s''\,, \qquad W_{is}'' = f_s''' + f_s''\,,$$

u. s. w., u. s. w.

Auch ist bekannt [Satz (34.) pag. 57], dass alsdann die Function $f^{(n)}$, für $n = \infty$, in eine *bestimmte endliche Constante* C sich verwandelt:

$$(P.)\qquad \lim_{n=\infty} f_s^{(n)} = C\ .$$

Setzt man nun, unter Benutzung dieser Constante C:

$$(Q.)\qquad \begin{aligned} \xi_s &= (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \ldots \text{ in inf.},\\ \eta_s &= (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{(4)} - f_s^{(5)}) + \ldots \text{ in inf.}, \end{aligned}$$

so sind diese Reihen auf σ überall *convergent*, und die durch sie definirten Functionen ξ_s, η_s auf σ überall *stetig*.

Gleichzeitig sind jetzt die Lösungen Φ und Ψ der beiden Probleme ohne Weiteres angebbar. *Einerseits nämlich werden dieselben auf σ identisch sein mit den daselbst vorgeschriebenen f's. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln*:

$$(R.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi}\int \xi (d\sigma)_a\ ,\\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi}\int \eta (d\sigma)_i\ , \end{aligned}$$

wo C, ξ, η die in (P.), (Q.) angegebene Bedeutung haben.

Es werden also die Lösungen jener beiden Probleme dargestellt sein durch die beiden Werthsysteme:

$$(R'.)\qquad (\Phi_a, f_s) \quad \text{und} \quad (\Psi_i, f_s)\ .$$

Oder was auf dasselbe hinauskommt: Sie werden dargestellt sein durch die beiden Werthsysteme:

$$(R''.)\qquad (\Phi_a,\ \Phi_{as}) \quad \text{und} \quad (\Psi_i,\ \Psi_{is})\ ;$$

denn die Φ_{as} sind identisch mit den f_s, und die Ψ_{is} ebenfalls identisch mit den f_s.

Diese in (Q.), (R.), (R'.), (R''.) gemachten Behauptungen sollen im folgenden § bewiesen werden. Zuvor aber mag hier noch auf gewisse Transformationen der Ausdrücke (R.) aufmerksam gemacht werden.

Andere Form der Lösungen. — Aus (R.) ergiebt sich durch Substitution der Werthe (Q.):

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi}\int \Big[(C - f) + (C - f') + (C - f'') + \ldots \Big] (d\sigma)_a\ ,\\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi}\int \Big[(f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \ldots \Big] (d\sigma)_i\ . \end{aligned}$$

Hier sind die Integrationen sofort ausführbar. Einerseits ist nämlich nach (*A.*), (*A'.*), (*A''.*), etc.:

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}(d\sigma)_a &= W_a^{(n)}\,, \\ \frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}(d\sigma)_i &= W_i^{(n)}\,, \end{aligned}$$

und andererseits ist nach bekanntem Satz [vgl. (8.) pag. 33]:

$$(\gamma.)\qquad \int (d\sigma)_a = 0\,.$$

Man erhält somit:

$$(S.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - W_a - W_a' - W_a'' - W_a''' - \ldots \text{ in inf.}, \\ \Psi_i &= C + (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Dies dürfte die *einfachste* Gestalt sein, in welcher die Lösungen der beiden Probleme im Allgemeinen angebbar sind.

Dritte (aber hypothetische) Form der Lösungen. — Man kann offenbar die Formeln (*α.*) mit Rücksicht auf (*γ.*) auch so schreiben:

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C + \frac{1}{h\pi}\int\Big[-f - f' - f'' - f''' - \ldots\Big](d\sigma)_a\,, \\ \Psi_i &= C + \frac{1}{h\pi}\int\Big[(f - f') + (f'' - f''') + \ldots\Big](d\sigma)_i\,. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (*B.*), (*B'.*) etc.:

$$f + f' = + W_{is}\,,\quad f'' + f''' = + W_{is}''\,,\quad f^{(4)} + f^{(5)} = + W_{is}^{(4)}\,,\quad \text{etc. etc.},$$
$$f - f' = - W_{as}\,,\quad f'' - f''' = - W_{as}''\,,\quad f^{(4)} - f^{(5)} = - W_{as}^{(4)}\,,\quad \text{etc. etc.},$$

und überdies ist [vgl. (2.) pag. 28]:

$$(d\sigma)_a = \frac{dT^a}{d\nu}\,d\sigma\,,$$
$$(d\sigma)_i = \frac{dT^i}{d\nu}\,d\sigma\,.$$

Somit folgt aus (*δ.*):

$$(\varepsilon.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - \frac{1}{h\pi}\int\Big(W_{is} + W_{is}'' + W_{is}^{(4)} + \ldots\Big)\frac{dT^a}{d\nu}\,d\sigma\,, \\ \Psi_i &= C - \frac{1}{h\pi}\int\Big(W_{as} + W_{as}'' + W_{as}^{(4)} + \ldots\Big)\frac{dT^i}{d\nu}\,d\sigma\,, \end{aligned}$$

Hier repräsentirt ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale. Ferner ist $T^a = \log\frac{1}{E^a}$, resp. $= \frac{1}{E^a}$, falls man nämlich unter E^a den Abstand des Punktes a vom Elemente $d\sigma$ versteht. Und analoge Bedeutung hat T^i mit Bezug auf den Punkt i.

Construirt man jetzt zwei auxiliare geschlossene Curven oder Flächen: σ' und σ'', beide *sehr wenig von σ verschieden*, und der Art gelegen, dass σ' von σ, und σ von σ'' *umschlossen* wird, so ist offenbar das *innerhalb* σ' liegende Gebiet $\mathfrak{J}'$ ein *Theil* von $\mathfrak{J}$, und ebenso das *ausserhalb* σ'' befindliche Gebiet $\mathfrak{A}''$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. Durch Anwendung der bekannten Green'schen Sätze auf diese Gebiete $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{A}''$ ergeben sich alsdann die Formeln:

$$(\zeta.)\qquad \begin{aligned} &\int\left(W\frac{dT^a}{d\nu'}-T^a\frac{dW}{d\nu'}\right)d\sigma'=0\,,\\ &\int\left(W\frac{dT^i}{d\nu''}-T^i\frac{dW}{d\nu''}\right)d\sigma''=0\,,\end{aligned}$$

wo ν' und ν'' die *inneren* Normalen von σ' und σ'' vorstellen. Es sind nämlich (bei festgehaltenem a) W_x und T_x^a Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$. Demgemäss sind auf diese Functionen die Green-schen Sätze anwendbar, wenn auch nicht mit Bezug auf $\mathfrak{J}$ selber, so doch mit Bezug auf jedes *kleinere* Gebiet, welches, wie z. B. $\mathfrak{J}'$, mit all' seinen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{J}$ liegt. Bringt man nun aber jene Sätze auf W_x, T_x^a und das Gebiet $\mathfrak{J}'$ in Anwendung, so erhält man die *erste* der beiden Formeln (ζ.). Und in analoger Weise ergiebt sich die *zweite* dieser Formeln durch Anwendung der genannten Sätze auf W_x, T_x^i und das Gebiet $\mathfrak{A}''$.

Nun lässt sich zeigen, dass diese Formeln (ζ.) *im Allgemeinen* [d. h. unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen will; vgl. meinen Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 16, pag. 409—438] auch dann noch in Kraft bleiben, wenn man σ' mit σ, und ebenso auch σ'' mit σ identificirt; so dass man also erhält:

$$(\eta.)\qquad \begin{aligned} &\int\left(W_{is}\frac{dT^a}{d\nu}-T^a\frac{dW_{is}}{d\nu}\right)d\sigma=0\,,\\ &\int\left(W_{as}\frac{dT^i}{d\nu}-T^i\frac{dW_{as}}{d\nu}\right)d\sigma=0\,.\end{aligned}$$

Diese Formeln (η.) können hingeschrieben werden, nicht nur für W, sondern ebenso auch für W', W'', W''', etc. Und mit Rücksicht auf all' diese Formeln gewinnen alsdann die Ausdrücke (ε.) folgende Gestalt:

$$(\vartheta.)\qquad \begin{aligned} &\Phi_a=C-\frac{1}{h\pi}\int\left\{\frac{d(W_{is}+W_{is}''+W_{is}^{(4)}+\ldots)}{d\nu}\right\}T^a d\sigma\,,\\ &\Psi_i=C-\frac{1}{h\pi}\int\left\{\frac{d(W_{as}+W_{as}''+W_{as}^{(4)}+\ldots)}{d\nu}\right\}T^i d\sigma\,,\end{aligned}$$

Nun lässt sich zeigen, dass *im Allgemeinen* [d. h. unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen mag; vgl. in den Math. Annal. Bd. 16 die Formeln (*D.*) pag. 414 und die Formeln (*D.*) pag. 436] die Gleichung stattfindet

$$\frac{dW_{is}^{(n)}}{d\nu} = \frac{dW_{as}^{(n)}}{d\nu},$$

und dass also die in (ϑ.) in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdrücke beide *ein und denselben* Werth haben. Demgemäss gewinnen also jene Formeln (ϑ.) folgende Gestalt:

$$(T.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= C - \frac{1}{h\pi}\int \varrho\, T^a\, d\sigma\,, \\ \Psi_i &= C - \frac{1}{h\pi}\int \varrho\, T^i\, d\sigma\,, \end{aligned}$$

wo ϱ die Bedeutung hat:

$$\varrho = \frac{d(W_{is} + W_{is}'' + W_{is}^{(4)} + \ldots)}{d\nu} = \frac{d(W_{as} + W_{as}'' + W_{as}^{(4)} + \ldots)}{d\nu}.$$

Durch diese Formeln (*T.*) werden die Lösungen Φ_a und Ψ_i der beiden Probleme, abgesehen von der Constante C, dargestellt *als Potentiale ein und derselben Curven- oder Flächenbelegung.* Die Dichtigkeit dieser Belegung ist $= -\frac{\varrho}{h\pi}$.

Bemerkung. — Es sei innerhalb $\mathfrak{J}$ irgend ein Punkt i markirt, und um i (als Centrum) eine Kreislinie oder Kugelfläche $\varkappa$ vom Radius 1 beschrieben. Denkt man sich nun die auf der gegebenen geschlossenen Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Werthe f, längs der von i ausgehenden Strahlen, und ohne Aenderung ihrer Grössen, von σ nach $\varkappa$ versetzt, so wird das *arithmetische Mittel* aller dieser jetzt auf $\varkappa$ vorhandenen Werthe f dargestellt sein durch:

$$\frac{1}{2h\pi}\int f\, d\varkappa\,.$$

Versteht man aber unter $d\sigma$ das mit $d\varkappa$ correspondirende Element der gegebenen Curve oder Fläche σ, so ist offenbar $d\varkappa$ nichts Anderes als das $(d\sigma)_i$. Jenes arithmetische Mittel ist daher auch so darstellbar:

$$\frac{1}{2h\pi}\int f(d\sigma)_i\,,$$

also identisch mit $\frac{1}{2} W_i$, [vgl. (*A.*)].

Demgemäss kann man dieses $\frac{1}{2}W_i$ *das arithmetische Mittel aller auf σ ausgebreiteten Werthe f in Bezug auf den Punkt i* nennen. Und mit Rücksicht hierauf habe ich die hier exponirte Methode, in welcher die aufeinanderfolgenden arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}W_i$, $\frac{1}{2}W_i'$, $\frac{1}{2}W_i''$, etc. eine wichtige Rolle spielen, die *Methode des arithmetischen Mittels* genannt.

§ 8.

Beweis für die Richtigkeit der angegebenen Lösungen. Das schliesslich sich ergebende Existenztheorem.

Zu beweisen ist zuvörderst die Convergenz der Reihen (Q.):

$$(1.)\quad \begin{aligned} \xi &= (C-f)+(C-f')+(C-f'')+\ldots \text{ in inf.},\\ \eta &= (f-f')+(f''-f''')+(f^{(4)}-f^{(5)})+\ldots \text{ in inf.} \end{aligned}$$

Setzt man

$$(2.)\quad \begin{aligned} \xi &= \xi^{(n)}+\varrho^{(n)}\ ,\\ \eta &= \eta^{(n)}+\varsigma^{(n)}\ , \end{aligned}$$

indem man dabei den *Restgliedern* $\varrho^{(n)}$, $\varsigma^{(n)}$ die Bedeutungen zuertheilt:

$$(3.)\quad \begin{aligned} \varrho^{(n)} &= (C-f^{(n)})+(C-f^{(n+1)})+\ldots \text{ in inf.},\\ \varsigma^{(n)} &= (f^{(2n)}-f^{(2n+1)})+(f^{(2n+2)}-f^{(2n+3)})+\ldots \text{ in inf.}, \end{aligned}$$

so folgt aus (37.), (38.) pag. 58 sofort:

$$(\alpha.)\quad \text{abs } \varrho^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\lambda^{n+2}+\ldots \text{ in inf.})\ ,$$

$$(\beta.)\quad \text{abs } \varsigma^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^{2n}+\lambda^{2n+2}+\lambda^{2n+4}+\ldots \text{ in inf.})\ ;$$

also, weil λ ein *positiver ächter Bruch* ist, *a fortiori*:

$$(\gamma.)\quad \text{abs } \varsigma^{(n)} \leqq (G-K)(\lambda^n+\lambda^{n+1}+\lambda^{n+2}+\ldots \text{ in inf.})\ .$$

Und nunmehr folgt aus (α.) und (γ.):

$$(4.)\quad \begin{aligned} \text{abs } \varrho^{(n)} &\leqq (G-K)\,\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\ ,\\ \text{abs } \varsigma^{(n)} &\leqq (G-K)\,\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\ , \end{aligned}$$

wo der Ausdruck rechts in beiden Formeln *derselbe* ist. Denkt man sich nun diesen Ausdruck (was offenbar stets möglich ist) durch Vergrösserung von n unter einen beliebigen Kleinheitsgrad ϵ hinab-

gedrückt, so sind die Restglieder $\varrho^{(n)}$, $\varsigma^{(n)}$, ihrem absoluten Betrage nach, in *sämmtlichen* Punkten der Curve oder Fläche σ kleiner als jenes ε. Hieraus aber folgt, dass die Reihen nicht nur *convergent* sind, sondern auch, dass die durch sie dargestellten Functionen ξ, η auf σ *stetig* sind.

Erläuterung. — Hat man nämlich n so weit vergrössert, dass abs $\varrho^{(n)}$ für sämmtliche Punkte der Curve oder Fläche σ kleiner als ε ist, so finden für je zwei solche Punkte s und s_1 die Formeln statt:

$$(a.)\qquad \text{abs}\ \varrho_s^{(n)} < \varepsilon\ ,$$

$$(b.)\qquad \text{abs}\ \varrho_{s_1}^{(n)} < \varepsilon\ .$$

Andererseits kann kein Zweifel darüber bestehen, dass der *geschlossene* Ausdruck

$$\xi^{(n)} = (C - f) + (C - f') + \ldots + (C - f^{(n-1)})$$

eine Function repräsentirt, welche [ebenso wie $f, f', f'', \ldots$; vgl. pag. 78] auf σ überall *stetig* ist; und man kann daher durch gegenseitige Annäherung der (bis jetzt beliebig gelassenen) Punkte s und s_1 dafür sorgen, dass

$$(c.)\qquad \text{abs}\ (\xi_s^{(n)} - \xi_{s_1}^{(n)})\ \text{ebenfalls} < \varepsilon$$

wird.

Solches aber ausgeführt gedacht, folgt jetzt aus ($a.$), ($b.$), ($c.$) sofort:

$$\text{abs}\ [(\xi_s^{(n)} + \varrho_s^{(n)}) - (\xi_{s_1}^{(n)} + \varrho_{s_1}^{(n)})] < 3\varepsilon\ ,$$

oder, was dasselbe ist [vgl. (2.)]:

$$\text{abs}\ (\xi_s - \xi_{s_1}) < 3\varepsilon\ .$$

D. h. ξ ist im Punkte s *stetig*; s war aber ein *beliebiger* Punkt der Curve oder Fläche σ. U. s. w.

In analoger Weise ergiebt sich der Beweis mit Bezug auf die Function η.

Da nun die Functionen ξ, η auf σ überall *stetig* sind, so subordiniren sich die in ($R.$) pag. 79 angegebenen Ausdrücke

$$(5.)\qquad \begin{aligned} \Phi_x &= C + \frac{1}{h\pi}\int \xi (d\sigma)_x\ , \\ \Psi_x &= C + \frac{1}{h\pi}\int \eta (d\sigma)_x \end{aligned}$$

ohne Weiteres dem allgemeinen Theorem pag. 47. Demzufolge ist jedes der beiden Werthsysteme

$$(\Phi_a,\ \Phi_{as})\ \text{und}\ (\Psi_a,\ \Psi_{as})$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$, und andererseits jedes der beiden Systeme

$$(\Phi_i,\ \Phi_{is}) \text{ und } (\Psi_i,\ \Psi_{is})$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$.

Soll also nachgewiesen werden, dass die Systeme $(\Phi_a,\ \Phi_{as})$ *und* $(\Psi_i,\ \Psi_{is})$ *wirklich die Lösungen unserer beiden Probleme sind, so wird nur noch zu zeigen sein, dass die* Φ_{as} *identisch mit den* f_s, *und die* Ψ_{is} *ebenfalls identisch mit den* f_s *sind.*

Zu diesem Zwecke substituiren wir in (5.) für ξ die Zerlegung (2.), und erhalten so, indem wir gleichzeitig für x einen Punkt a eintreten lassen, die Formel:

$$\Phi_a = C + \frac{1}{h\pi}\int (\xi^{(n)} + \varrho^{(n)})\,(d\sigma)_a\ ,$$

d. i. die Formel:

$$\Phi_a = \Phi_a^{(n)} + \mathsf{P}_a^{(n)}\ , \tag{6.}$$

wo alsdann $\Phi_a^{(n)}$ und $\mathsf{P}_a^{(n)}$ die Bedeutungen haben:

$$\Phi_a^{(n)} = C + \frac{1}{h\pi}\int \xi^{(n)}\,(d\sigma)_a\ , \tag{7.}$$

$$\mathsf{P}_a^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\int \varrho^{(n)}\,(d\sigma)_a\ . \tag{8.}$$

Dabei mag die Zahl n vorläufig ganz *ad libitum* gewählt sein.

Aus (7.) ergiebt sich durch Substitution des Werthes von $\xi^{(n)}$ [vgl. (1.), (2.), (3.)]:

$$\Phi_a^{(n)} = C + \frac{1}{h\pi}\int \Big[(C-f) + (C-f') \ldots + (C-f^{(n-1)})\Big]\,(d\sigma)_a\ ;$$

hier aber ist die Integration sofort ausführbar mittelst gewisser schon im vorhergehenden § [auf pag. 80] notirter Formeln:

$$\frac{1}{h\pi}\int f^{(n)}\,(d\sigma)_a = W_a^{(n)}\ ,$$
$$\int (d\sigma)_a = 0\ .$$

Man erhält in solcher Weise:

$$\Phi_a^{(n)} = C - [W_a + W_a' + W_a'' \ldots + W_a^{(n-1)}]\ . \tag{9.}$$

Nach den Formeln ($B.$), ($B.'$), ($B.''$) etc. pag. 78 ist aber

$$\begin{aligned} W_{as} &= f_s' - f_s \,, \\ W_{as}' &= f_s'' - f_s' \,, \\ W_{as}'' &= f_s''' - f_s'' \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_{as}^{(n-1)} &= f_s^{(n)} - f_s^{(n-1)} \,; \end{aligned}$$

woraus durch Addition folgt:

$$W_{as} + W_{as}' + W_{as}'' \ldots + W_{as}^{(n-1)} = f_s^{(n)} - f_s \,.$$

Demgemäss ergiebt sich aus der Formel (9.) für $\Phi_{as}^{(n)}$ folgender Werth:

$$(10.) \qquad \Phi_{as}^{(n)} = C - f_s^{(n)} + f_s \,.$$

Was nun ferner den Ausdruck (8.) betrifft:

$$\mathsf{P}_a^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int \varrho^{(n)} (d\sigma)_a \,,$$

so subordinirt sich derselbe, weil ξ selber, mithin auch das [dem ξ zugehörige Restglied] $\varrho^{(n)}$ auf σ *stetig* ist, ohne Weiteres dem Satze pag. 59. Diesem Satze zufolge sind z. B. die *absoluten* Werthe der $\mathsf{P}_a^{(n)}$ und $\mathsf{P}_{as}^{(n)}$ durchweg $\leqq 2M$, falls man nämlich unter M den *absolut grössten* Werth von $\varrho^{(n)}$ auf σ versteht. Man erhält also:

$$\text{abs}\ \mathsf{P}_{as}^{(n)} \leqq 2M \,.$$

Dieses M, der absolut grösste Werth von $\varrho^{(n)}$ auf σ, ist aber nach (4.) nothwendig

$$\leqq (G - K) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \,.$$

Demgemäss ergiebt sich:

$$\text{abs}\ \mathsf{P}_{as}^{(n)} \leqq 2(G - K) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \,,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(11.) \qquad \mathsf{P}_{as}^{(n)} = 2\Theta (G - K) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \,,$$

wo Θ einen unbekannten positiven oder negativen *ächten Bruch* vorstellt.

Substituirt man jetzt die Werthe (10.), (11.) in die aus (6.) sich ergebende Formel:

$$\Phi_{as} = \Phi_{as}^{(n)} + \mathsf{P}_{as}^{(n)} \,,$$

so erhält man

$$(12.) \quad \Phi_{as} = C + f_s - f_s^{(n)} + 2\Theta (G - K) \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \,.$$

Diese Formel ist gültig für *jedwedes* n, weil n zu Anfang *ad libitum* gewählt war. Lässt man aber n ins Unendliche wachsen, und beachtet man, dass die Configurationsconstante λ positiv und < 1 ist, so ergiebt sich

$$(13.) \qquad \Phi_{as} = C + f_s - \lim_{n=\infty} f_s^{(n)} ,$$

also mit Rücksicht auf (*P*.) pag. 79:

$$(14.) \qquad \Phi_{as} = f_s \,.$$

In analoger Weise lässt sich zeigen, dass auch

$$(15.) \qquad \Psi_{is} = f_s$$

ist; was weiter auszuführen überflüssig sein würde. Nachdem aber die beiden Relationen (14.), (15.) constatirt sind, *ist hiermit zugleich die Richtigkeit aller im vorhergehenden § gemachten Behauptungen dargethan.*

Bemerkung. — Man wird vielleicht der Ansicht sein, dass die Relation (14.) auf *kürzerem* Wege ableitbar sei, dass nämlich dieselbe direct aus der Formel (10.) sich ergebe, sobald man daselbst $n = \infty$ macht.

Um genauer hierauf einzugehen, sei zunächst bemerkt, dass die Function Φ ausführlicher zu bezeichnen sein würde mit $\Phi^{(\infty)}$. Unsere Aufgabe bestand in der Ermittelung derjenigen Werthe, welche diese Function Φ oder $\Phi^{(\infty)}$ für die Punkte as annimmt; und hierüber haben wir durch die Relation (14.) Auskunft erhalten; denn dieselbe lautet:

$$(\alpha.) \qquad (\Phi^{(\infty)})_{as} = f_s \,.$$

Aus der Formel (10.) hingegen würde sich für $n = \infty$ ein ganz *anderes* Resultat ergeben haben, nämlich folgendes:

$$(\beta.) \qquad (\Phi_{as}{}^{(n)})_{n=\infty} = f_s \,.$$

In solcher Weise geschrieben, dürfte der Unterschied klar zu Tage liegen. — Wir können uns so ausdrücken: Die linken Seiten der Formeln (α.), (β.) beziehen sich beide auf den Ausdruck $\Phi_a{}^{(n)}$, jedoch mit dem Unterschiede, dass die linke Seite von (α.) denjenigen Werth bezeichnet, welchen dieser Ausdruck annimmt, sobald man darin *zuerst* $n = \infty$ macht, und *sodann* a nach s rücken lässt; während die linke Seite von (β.) denjenigen Werth bezeichnet, welchen der Ausdruck annimmt, sobald man die genannten beiden Operationen in *umgekehrter* Reihenfolge vornimmt.

Nachdem wir nun die Richtigkeit der im vorhergehenden § gegebenen Lösungen der beiden Probleme bewiesen haben, ist damit zugleich auch constatirt, dass diese Probleme stets *lösbar* sind, d. h., dass die durch die beiden Probleme geforderten Functionen Φ, Ψ stets *existiren*; so dass wir also zu folgendem Theorem gelangen.

Existenztheorem. — *Es sei in der Ebene oder im Raume eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein kann, welche aber überall convex und nicht zweisternig sein soll. Und von den beiden Gebieten, in welche die Ebene oder der Raum durch diese Curve oder Fläche σ zerlegt wird, mag das äussere mit 𝔄, das innere mit 𝔍 bezeichnet sein.*

Denkt man sich nun auf σ irgend welche daselbst stetige Werthe f vorgeschrieben, so wird immer eine Fundamentalfunction Φ des Gebietes 𝔄 existiren, welche auf σ jene vorgeschriebenen Werthe f besitzt; desgleichen wird alsdann stets eine Fundamentalfunction Ψ des Gebietes 𝔍 existiren, welche ebenfalls auf σ jene vorgeschriebenen Werthe f besitzt.

Auch sind diese Fundamentalfunctionen Φ und Ψ durch die Anforderung, auf σ mit jenen vorgeschriebenen Werthen f identisch zu sein, vollständig und eindeutig bestimmt [zufolge der Sätze pag. 20 und 26].

§ 9.

Sich anschliessende Betrachtungen.

Wir halten fest an den Vorstellungen, Voraussetzungen und Bezeichnungen der beiden vorhergehenden §§; so dass also z. B. Φ und Ψ die den vorgeschriebenen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete 𝔄 und 𝔍, und diese f auf σ überall *stetig* sein sollen.

Ausser f selber mögen auf der gegebenen Curve oder Fläche σ noch unendlich viele andere Functionen*)

$$(1.) \qquad f^1, f^2, f^3, \ldots f^p, \ldots \text{ in inf.}$$

ausgebreitet sein, die (ebenso wie f) auf σ überall *stetig* sind. Dabei wollen wir annehmen, dass f^p, bei ins Unendliche wachsendem p, gegen jene eigentlich *vorgeschriebene* Function f *convergirt*. Alsdann wird, sobald auf σ irgend ein Punkt s markirt ist, die diesem Punkte s zugehörige Quantität

$$\text{abs}\,(f_s{}^p - f_s)$$

*) Diese Functionen sollen vollständig *andere* sein, als die in den vorhergehenden §§ besprochenen Functionen

$$f', f'', f''', \ldots f^{(n)}, \ldots$$

Zur bessern Unterscheidung habe ich daher die einen durch *obere Indices*, die andern durch *Accente* bezeichnet. So ist ja z. B. auch das eingeklammerte (n) ebenfalls nur eine Andeutung für n aufeinanderfolgende *Accente*.

durch Vergrösserung des Parameters p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabdrückbar sein. Oder genauer ausgedrückt: Es wird alsdann, falls irgend ein Kleinheitsgrad ε_0 *ad libitum* gegeben ist, stets eine positive ganze Zahl p_0 von solcher Grösse angebbar sein, dass jene Quantität

$$\text{abs}(f_s^p - f_s)$$

$< \varepsilon_0$ ist, nicht nur für $p = p_0$, sondern auch für alle ganzen Zahlen p, die $> p_0$ sind.

Wir wollen jetzt aber die über die Convergenz von f^p gemachte Voraussetzung noch *weiter verschärfen*, nämlich annehmen, dass f^p, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ befindlichen Punkte s *gleichmässig* gegen f convergirt. Alsdann wird, nachdem irgend ein Kleinheitsgrad ε_0 *ad libitum* gewählt ist, stets eine Zahl p_0 angebbar sein von solcher Grösse, dass die Formel

$$(2.) \quad \text{abs}(f_s^p - f_s) < \varepsilon_0, \quad (p \text{ beliebig, aber } \geqq p_0 \text{ gedacht}),$$

simultan stattfindet für *sämmtliche* Punkte s der Curve oder Fläche σ.

Dies vorangeschickt, betrachten wir jetzt die den Functionen

$$f \text{ und } f^1, f^2, f^3, \ldots f^p, \ldots$$

entsprechenden *Fundamentalfunctionen*

$$\Phi \textit{ und } \Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \ldots \Phi^p, \ldots$$

des Gebietes $\mathfrak{A}$ *); und legen uns die Frage vor, ob ebenso wie f^p gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Φ^p gegen Φ convergiren wird.

Nach der Definition von Φ und Φ^p ist: $\Phi_{as} = f_s$ und ebenso: $\Phi_{as}^p = f_s^p$, oder wenn man hier (wo kein Missverständniss möglich ist) s für as schreibt:

$$\Phi_s = f_s \quad \text{und} \quad \Phi_s^p = f_s^p .$$

Demgemäss ist jene *simultan* für alle Punkte s geltende Formel (2.) auch so schreibbar:

$$(3.) \quad \text{abs}(\Phi_s^p - \Phi_s) < \varepsilon_0, \quad (p \text{ beliebig, aber } \geqq p_0 \text{ gedacht}) .$$

*) Diese Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{A}$ würden, falls es beliebt, sofort construirt werden können mittelst der Methode des arithmetischen Mittels (pag. 79). An ihrer *Existenz* ist also kein Zweifel.

Da nun $\Phi^p - \Phi$ (ebenso wie Φ und Φ^p selber) eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ist, so können wir auf diese Function $\Phi^p - \Phi$ ohne Weiteres den ersten Satz pag. 26 in Anwendung bringen. Alsdann aber gelangen wir auf Grund der Relation (3.) sofort zu der allgemeineren Formel:

$$(4.)\qquad \text{abs}\,(\Phi_x{}^p - \Phi_x) < \varepsilon_0\,, \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0)\,,$$

nämlich zu dem Resultat, dass diese letztere Formel *simultan* stattfindet für sämmtliche Punkte x *in ganzer Erstreckung des Gebietes* $\mathfrak{A}$.

Erläuterung. — Ist nämlich U irgend eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, und findet für alle auf der *Grenze* von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ gelegenen Punkte s die Formel statt:

$$-\varepsilon_0 < U_s < +\varepsilon_0\,,$$

so wird, zufolge des ersten Satzes pag. 26, für alle Punkte x in *ganzer Erstreckung* von $\mathfrak{A}$ die analoge Formel gelten:

$$-\varepsilon_0 < U_x < +\varepsilon_0\,.$$

Oder mit anderen Worten: *Findet für die Punkte s an der Grenze von $\mathfrak{A}$ die Formel statt:*

$$(\alpha.)\qquad \text{abs}\, U_s < \varepsilon_0\,,$$

so wird für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ die analoge Formel gelten:

$$(\beta.)\qquad \text{abs}\, U_x < \varepsilon_0\,.$$

Mittelst dieses Satzes (α.), (β.) gelangt man aber sofort von der Formel (3.) zur Formel (4.). — *Q. e. d.*

Erinnern wir uns an die Art und Weise, wie [bei (2.)] ε_0 und p_0 eingeführt worden sind, so werden wir dieses Resultat folgendermassen klar zu stellen haben: *Bezeichnet ε_0 einen ad libitum gegebenen Kleinheitsgrad, so existirt stets eine positive ganze Zahl p_0 von solcher Grösse, dass die Formel*

$$\text{abs}\,(\Phi_x{}^p - \Phi_x) < \varepsilon_0\,, \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0)\,,$$

simultan erfüllt ist für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$. — Hierfür aber können wir kürzer sagen: *Die Function Φ^p convergirt, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ gleichmässig gegen die Function Φ.*

Dass man Analoges in Betreff des Gebietes $\mathfrak{J}$ und der Function Ψ zu beweisen vermag, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Man gelangt daher zu folgendem Satz.

Theorem. — *In der Ebene oder im Raume sei eine geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, welche mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf, welche aber überall convex, und keine zweisternige ist. Ferner sei auf σ irgend welche daselbst stetige Function f vorgeschrieben.*

Ueberdies sei [durch irgend welche Methode, oder vielleicht auch durch Zufall] *eine mit einem variablen Parameter p* (= 1, 2, 3, 4, ...) *behaftete Function f^p entdeckt, welche ebenfalls, und zwar für jedwedes p, auf σ stetig ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für sämmtliche Punkte der Curve oder Fläche σ gleichmässig gegen f convergirt.*

Bezeichnet man alsdann die den Functionen f, f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete 𝔄 und 𝔍 mit Φ, Φ^p und mit Ψ, Ψ^p, so wird Φ^p in ganzer Erstreckung von 𝔄 gleichmässig gegen Φ, und Ψ^p in ganzer Erstreckung von 𝔍 gleichmässig gegen Ψ convergiren.

Wir haben hier dieses Theorem unter der (besonders betonten) Voraussetzung bewiesen, dass σ *überall convex* und *nicht zweisternig* ist. Doch lässt sich das Theorem von diesen Restrictionen befreien. Um die hierzu erforderlichen Mittel zu gewinnen, werden wir in den beiden folgenden §§ zunächst einige *speciellere* Untersuchungen anzustellen haben.

§ 10.

Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kreislinie.

Bringt man die Methode des arithmetischen Mittels auf eine *Kreislinie* σ in Anwendung, so tritt insofern eine Vereinfachung ein, als die ϑ_s durchweg = 0 werden. [Vgl. (9.) pag. 33.]

Die auf der *Kreislinie* σ vorgeschriebenen Werthe f oder f_s seien daselbst *stetig*, mithin darstellbar durch eine *Fourier'sche Reihe*:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega) \,,$$

wo ω das *Azimuth* vorstellt, und die A, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ Constanten sind. Dabei aber wollen wir zuvörderst auf *den* Fall uns beschränken,

dass diese Reihe *endlich* ist, dass mithin für jene f oder f_s eine Formel vorliegt von der Gestalt:

$$(1.)\qquad f = f_s = A + \sum_{n=1}^{p} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ ,$$

wo p irgend eine *endliche* Zahl vorstellen soll.

Es sei ϱ der *Radius* der Kreislinie σ; demgemäss seien (ϱ, ω) die *Polarcoordinaten* irgend eines auf σ liegenden Punktes s. Bezeichnet man nun den Abstand dieses Punktes $s(\varrho, \omega)$ von irgend einem Punkte $a(\varrho_a, \omega_a)$ mit E, so ergeben sich die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_a^2 - 2\varrho\varrho_a \cos(\omega - \omega_a)\ ,$$

$$T = \log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{\varrho_a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a)\ ,\qquad (\varrho < \varrho_a)\ .$$

Nun ist nach (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_a = \frac{dT}{d\nu}\, d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho}\, \varrho\, d\omega\ ,$$

wo ν die *innere* Normale von σ bezeichnet. Somit folgt:

$$(2.)_a\qquad (d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a)\right] d\omega\ .$$

In analoger Weise erhält man ferner für den Abstand E des Punktes $s(\varrho, \omega)$ von irgend einem Punkte $i(\varrho_i, \omega_i)$ die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_i^2 - 2\varrho\varrho_i \cos(\omega - \omega_i)\ ,$$

$$T = \log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i)\ ,\qquad (\varrho_i < \varrho)\ .$$

Bezeichnet man nun wiederum die *innere* Normale von σ mit ν, so ist nach (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_i = \frac{dT}{d\nu}\, d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho}\, \varrho\, d\omega\ .$$

Somit folgt:

$$(2.)_i\qquad (d\sigma)_i = +\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i)\right] d\omega\ .$$

Dies vorausgeschickt, haben wir nun zu verfahren nach den *allgemeinen Vorschriften* (pag. 78) der Methode des arithmetischen

Mittels, und in solcher Weise die Functionen W, f, W', f', etc., sodann die Functionen ξ, η, endlich die Functionen Φ, Ψ zu construiren. Die letzteren werden alsdann die *Lösungen der beiden Probleme*, d. i. *die den vorgeschriebenen Werthen* f *entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{J}$ repräsentiren.

Nach jenen allgemeinen Vorschriften [vgl. (A.), (B.) pag. 78] ist:

$$(3). \qquad W_a = \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_a\,, \quad \text{und} \quad f_s' = W_{as} + f_s\,.$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (1.), (2.)$_a$ und durch Ausführung der Integration:

$$W_a = -\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n (A^{(n)}\cos n\omega_a + B^{(n)}\sin n\omega_a)\,.$$

Lässt man jetzt in dieser Formel den Punkt $a(\varrho_a, \omega_a)$ unendlich nahe an den Kreislinienpunkt $s(\varrho, \omega)$ heranrücken, mithin ϱ_a in ϱ und ω_a in ω übergehen, so erhält man keineswegs das W_s, sondern vielmehr das W_{as} [vgl. den allgemeinen Satz pag. 46]; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$W_{as} = -\sum_{n=1}^{p}(A^{(n)}\cos n\omega + B^{(n)}\sin n\omega)\,.$$

Substituirt man diesen Werth in der *zweiten* Formel (3.), und substituirt man daselbst gleichzeitig für f_s den Werth (1.), so folgt:

$$(4.) \qquad f_s' = A\,, \quad \text{d. i.} = \text{Const.}$$

Da nun von den Functionen f_s, f_s', f_s'', f_s''', etc. jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entsteht, wie f_s' aus f_s, so gelangt man ohne Weiteres, auf Grund der bereits vorliegenden Formeln (1.), (4.), zu dem Resultate, dass $f_s'' = A$, dass ferner f_s''' ebenfalls $= A$ ist, u. s. w. Man erhält also:

$$(5.) \qquad f_s' = f_s'' = f_s''' = \ldots = A\,,$$

mithin z. B.:

$$\lim_{n=\infty} f_s^{(n)} \text{ ebenfalls} = A\,.$$

Die in unseren allgemeinen Vorschriften auftretende Constante C [vgl. (P.) pag. 79] wird daher im gegenwärtigen Falle identisch mit A sein:

$$(6.) \qquad C = A\,.$$

Ferner sind nach jenen allgemeinen Vorschriften [vgl. (*Q.*) pag. 79] unter ξ, η folgende Functionen zu verstehen:

$$\xi = (C - f) + (C - f') + (C - f'') + \ldots$$
$$\eta = (f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \ldots$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (5.), (6.):

$$(7.) \qquad \begin{aligned} \xi &= A - f \,, \\ \eta &= f - A \,. \end{aligned}$$

Und demgemäss ergeben sich, auf Grund unserer allgemeinen Vorschriften [vgl. (*R.*) pag. 79], für *die Lösungen* Φ *und* Ψ *der beiden Probleme* die Formeln:

$$(8.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \frac{1}{\pi}\int (A - f)\,(d\sigma)_a \,, \\ \Psi_i &= A + \frac{1}{\pi}\int (f - A)\,(d\sigma)_i \,. \end{aligned}$$

Diese Formeln (8.) sind, mit Rücksicht auf die bekannten Relationen:

$$\int (d\sigma)_a = 0 \quad \text{und} \quad \int (d\sigma)_i = 2\pi \,, \quad \text{[vgl. (8.) pag. 33]} \,,$$

auch so darstellbar:

$$(9.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= +A - \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_a \,, \\ \Psi_i &= -A + \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_i \,. \end{aligned}$$

Beachtet man ferner, dass nach (1.)

$$\int f\,d\sigma = \int_0^{2\pi} f\,\varrho\,d\omega = 2\pi\varrho A \,, \quad \text{mithin} \quad A = \frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma$$

ist, so kann man die Formeln (9.) auch so schreiben:

$$(10.) \qquad \begin{aligned} \Phi_a &= +\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_a \,, \\ \Psi_i &= -\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\,d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f (d\sigma)_i \,. \end{aligned}$$

Wir haben bisher nur *den* Fall betrachtet, dass die vorgeschriebenen Werthe f durch eine *endliche* Reihe (1.) dargestellt sind. Bevor wir zum Fall einer *unendlichen* Reihe übergehen, erscheint es gut, zunächst die Ausdrucksweise ein wenig zu ändern, nämlich die

bisher mit f, Φ, Ψ benannten Functionen fortan mit f^p, Φ^p, Ψ^p zu bezeichnen. Alsdann gelangen wir, auf Grund der Formeln (1.) und (10.), zu folgendem Satz:

Sind auf der Kreislinie σ die Werthe vorgeschrieben:

$$(11.)\quad f^p = f_s{}^p = A + \sum_{n=1}^{p} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ ,$$

wo p irgend eine endliche Zahl vorstellt, so sind die diesen Werthen f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ leicht angebbar.

Einerseits nämlich werden dieselben auf σ mit jenen f^p identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(12.)\quad \begin{aligned} \Phi_a{}^p &= + \frac{1}{2\pi\varrho} \int f^p\, d\sigma - \frac{1}{\pi} \int f^p\, (d\sigma)_a\ , \\ \Psi_i{}^p &= - \frac{1}{2\pi\varrho} \int f^p\, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int f^p\, (d\sigma)_i\ , \end{aligned}$$

wo ϱ den Radius der Kreislinie σ vorstellt.

Wir gehen jetzt zu dem Falle über, dass auf σ irgend eine Function f in *ganz beliebiger Weise* vorgeschrieben ist, nur mit der Restriction, dass sie längs σ *stetig* sein soll. Diese Function f ist alsdann darstellbar durch eine *Fourier'sche Reihe:*

$$(13.)\quad f = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ ,$$

also darstellbar durch die Formel:

$$(14.)\quad f = \lim_{p=\infty} f^p\ ,$$

wo f^p dieselbe Bedeutung hat, wie in (11.).

Da nun, nach unserer Voraussetzung, die vorgeschriebene Function f auf σ *stetig* ist, so wird die in (14.) angegebene Convergenz, nach einem bekannten Satz*) über die Fourier'sche Reihe, *gleichmässig* sein für alle auf σ befindlichen Punkte. Demgemäss sind *die dieser vorgeschriebenen Function f entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$* sofort angebbar auf Grund des Theorems pag. 91, nämlich darstellbar durch die Formeln:

$$(15.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \lim_{p=\infty} \Phi_a{}^p\ , \\ \Psi_i &= \lim_{p=\infty} \Psi_i{}^p\ , \end{aligned}$$

*) Heine: Handbuch der Kugelfunctionen. 1878. Bd. 1. pag. 58.

wo Φ_a^p, Ψ_i^p die in (12.) angegebenen Bedeutungen haben. Substituirt man aber diese Werthe der Φ_a^p, Ψ_i^p in (15.), so erhält man:

$$(16.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \lim_{p=\infty} \left(\frac{1}{2\pi\varrho}\int f^p\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f^p\,(d\sigma)_a\right), \\ \Psi_i &= \lim_{p=\infty} \left(-\frac{1}{2\pi\varrho}\int f^p\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f^p\,(d\sigma)_i\right). \end{aligned}$$

Die hier auftretende Operation $\lim_{p=\infty}$ ist in Anbetracht der Formel (14.), und namentlich in Anbetracht des Umstandes, dass jene durch (14.) ausgedrückte Convergenz für alle Punkte der Kreislinie σ *gleichmässig* ist, ohne Weiteres ausführbar; — man erhält:

$$(17.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= +\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_a, \\ \Psi_i &= -\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_i, \end{aligned}$$

und gelangt daher zu folgendem Satz:

Satz über die Kreislinie. — *Sind auf einer gegebenen Kreislinie σ irgend welche daselbst stetige Werthe f vorgeschrieben, so sind die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ in einfacher Weise angebbar.*

Einerseits nämlich werden dieselben auf σ mit jenen f identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(18.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= +\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\, d\sigma - \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_a, \\ \Psi_i &= -\frac{1}{2\pi\varrho}\int f\, d\sigma + \frac{1}{\pi}\int f(d\sigma)_i, \end{aligned}$$

wo ϱ den Radius von σ vorstellt.

Man kann übrigens diese Formeln [vgl. (2.) pag. 28] *auch so schreiben:*

$$(19.)\quad \begin{aligned} \Phi_a &= \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho} - \frac{\cos\delta}{E}\right) f\, d\sigma, \\ \Psi_i &= \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho} + \frac{\cos\delta}{E}\right) f\, d\sigma; \end{aligned}$$

hier bezeichnet E den Abstand des Punktes a oder i vom Elemente $d\sigma$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale.

Substituirt man in (18.) für $d\sigma$, $(d\sigma)_a$, $(d\sigma)_i$ ihre analytischen Ausdrücke [vgl. $(2.)_a$ $(2.)_i$]:

$$d\sigma = \varrho\, d\omega\ ,$$

$$(d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n \cos n(\omega - \omega_a)\right] d\omega\ ,$$

$$(d\sigma)_i = +\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n \cos n(\omega - \omega_i)\right] d\omega\ ,$$

und gleichzeitig für f die Entwickelung (13.):

$$(20.)\qquad f = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega\right)\ ,$$

und führt man sodann die in jenen Formeln (18.) angedeuteten Integrationen wirklich aus, so gewinnen die Werthe der Φ_a, Ψ_i folgende Gestalt:

$$(21.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_a + B^{(n)} \sin n\omega_a)\ ,\\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_i + B^{(n)} \sin n\omega_i)\ . \end{aligned}$$

Diese *neuen* Formeln (21.) besitzen gegenüber den *ursprünglichen* Formeln (18.) einen wesentlichen Unterschied. Aus jenen *ursprünglichen* Formeln (18.) kann man nämlich die Werthe der Fundamentalfunctionen in einem *auf* σ liegenden Punkte s nur dadurch erhalten, dass man die Punkte a und i diesem Punkte s *sich ins Unendliche nähern* lässt (nämlich nur dadurch, dass man die betreffenden Convergenzwerthe Φ_{as} und Ψ_{is} bildet); — hingegen kann man aus den *neuen* Formeln (21.) die Werthe der Fundamentalfunctionen in s einfach dadurch erhalten, dass man a und i mit s *zur Coincidenz* bringt; wie sich solches durch Vergleich der Formeln (21.) mit (20.) sofort ergiebt.

Beiläufige Bemerkungen. — Man kann übrigens zur Lösung der beiden Probleme auf viel kürzerem Wege gelangen *ohne* die Methode des arithmetischen Mittels. Der Einfachheit willen beschränke ich mich bei den hierauf bezüglichen Auseinandersetzungen auf das *innere* Problem.

Setzt man ebenso wie früher:

$$(1.)\qquad f^p = A + \sum_{n=1}^{p}{}' (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ ,$$

und

$$(2.)\qquad f = \lim_{p=\infty} f^p\ ,$$

und bezeichnet man die den vorgeschriebenen Functionen f^p und f entsprechenden Fundamentalfunctionen des Gebietes $\mathfrak{J}$ mit Ψ^p und Ψ, so ergiebt sich:

$$(3.)\quad \Psi_i{}^p = A + \sum_{n=1}^{p}{}' \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega_i + B^{(n)} \sin n\omega_i)\ ,$$

wo (ϱ_i, ω_i) die Polarcoordinaten des Punktes i sind, während ϱ den *Radius* der gegebenen Kreislinie σ vorstellt. In der That übersieht man leicht, dass dieser in (3.) angegebene Ausdruck den Bedingungen (1.), (2.) pag. 16 entspricht, und dass derselbe also eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$ ist; und überdies erkennt man sofort, dass diese durch (3.) dargestellte Fundamentalfunction am *Rande* von $\mathfrak{J}$, d. i. auf σ, identisch wird mit den in (1.) vorgeschriebenen Werthen f^p.

Setzt man nun voraus, dass f auf σ *stetig* ist, so wird die in (2.) angegebene Convergenz auf σ *gleichmässig* sein, nach einem bekannten Satze über die Fourier'schen Reihen. Und demgemäss wird die der Function f entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}$ ohne Weiteres angebbar sein auf Grund des Theorems pag. 91, nämlich dargestellt sein durch die Formel:

$$(4.)\qquad \Psi_i = \lim_{p=\infty} \Psi_i{}^p\ .$$

Auch wird diese Convergenz (4.), zufolge jenes Theorems, *gleichmässig* sein in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$; so dass man also zu folgendem Satze gelangt:

Ist auf der Kreislinie σ eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben, so wird dieselbe in eine auf σ gleichmässig convergirende Fourier'sche Reihe entwickelbar sein:

$$(5.)\qquad f = A + \sum_{n=1}^{\infty}{}' (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ .$$

Und gleichzeitig wird alsdann die dieser Function f entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}$ darstellbar sein durch folgende

in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ gleichmässig convergirende Entwickelung:

$$(6.)\qquad \Psi_i = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ .$$

Hier repräsentiren (ϱ_i, ω_i) die Polarcoordinaten des Punktes i, während ϱ den Radius der Kreislinie σ vorstellt).*

Bringt man jetzt auf die hier vorliegenden Verhältnisse den ersten Satz pag. 20 in Anwendung, so erkennt man sofort, dass für jedweden Punkt i die Formel stattfindet:

$$(7.)\qquad K \leqq \Psi_i \leqq G\ ,$$

wo K und G den *kleinsten* und *grössten* Werth von f auf der Kreislinie σ bezeichnen sollen.

Diese Bemerkungen (5.), (6.) und (7.) führen schliesslich, falls man zur Abkürzung den positiven ächten Bruch $\frac{\varrho_i}{\varrho}$ mit q bezeichnet, zu folgendem Resultat:

Satz über die Fourier'schen Reihen. — *Ist die mit irgend welchen Constanten A, $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ behaftete Reihe*

$$(\alpha.)\qquad f(\omega) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)$$

*für alle Werthe von ω gleichmässig convergent**), so gilt Gleiches auch von der Reihe:*

$$(\beta.)\qquad \Psi(\omega) = A + \sum_{n=1}^{\infty} q^n (A^{(n)} \cos n\omega + B^{(n)} \sin n\omega)\ ,$$

vorausgesetzt, dass die Constante q der Bedingung entspricht: $0 \leqq q \leqq 1$.

Und gleichzeitig wird alsdann für jedweden Werth von ω die Formel stattfinden:

$$(\gamma.)\qquad K \leqq \Psi(\omega) \leqq G\ ,$$

wo K und G den kleinsten und grössten Werth der Function $f(\omega)$ vorstellen sollen.

In ähnlicher Art werde ich späterhin zu einem verwandten Satze gelangen. Und diese Sätze sind nicht blos beiläufiger Natur, sondern für den weiteren Fortgang meiner Untersuchungen von Wichtigkeit.

*) Wir sind hier zu demselben Resultate gelangt, wie vorhin pag. 97 in der *zweiten* Formel (21.).

**) Aus dieser Voraussetzung folgt alsdann offenbar bereits von selber, dass $f(\omega)$ eine *stetige* Function von ω ist.

§ 11.

Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kugelfläche.

Auf einer gegebenen *Kugelfläche* σ seien irgend welche Werthe vorgeschrieben, die daselbst *stetig* sind, mithin darstellbar sind durch eine *Laplace'sche Reihe*:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)}(\mu, \omega),$$

wo A eine *Constante* bezeichnet. Dabei wollen wir aber zu Anfang auf *den* Fall uns beschränken, dass diese Reihe *endlich* ist, dass also jene vorgeschriebenen Werthe f oder f_s der Formel entsprechen:

$$(1.) \qquad f = f_s = A + \sum_{n=1}^{p} Y^{(n)}(\mu, \omega),$$

wo p irgend eine *endliche* Zahl vorstellt.

Es sei ϱ der *Radius* der Kugelfläche σ; demgemäss seien $(\varrho, \vartheta, \omega)$ oder (ϱ, μ, ω) die *Polarcoordinaten* eines auf σ liegenden Punktes s. Dabei soll ω die *geographische Länge*, und ϑ das *Complement der geographischen Breite* sein; überdies soll $\mu = \cos\vartheta$ sein. Bezeichnet nun E den Abstand des Punktes $s(\varrho, \mu, \omega)$ von irgend einem Punkte $a(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$, und γ den Winkel, unter welchem ϱ und ϱ_a gegen einander geneigt sind, so gelten die Formeln:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_a^2 - 2\varrho\varrho_a \cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = \mu\mu_a + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_a^2}\cos(\omega-\omega_a),$$

$$(A.) \qquad T = \frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho_a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n}{\varrho_a^{n+1}} P^{(n)}(\cos\gamma), \quad (\varrho < \varrho_a).$$

Bezeichnet man nun die *innere* Normale der Kugelfläche σ mit ν, so ist nach (2.) pag. 28

$$(d\sigma)_a = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho}\varrho^2 \, d\mu \, d\omega,$$

also, falls man für T den obigen Werth einsetzt:

$$(2.)_a \qquad (d\sigma)_a = -\left[\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} P^{(n)}(\cos\gamma)\right] d\mu \, d\omega.$$

Bezeichnet man andererseits den Abstand des Punktes $s(\varrho, \mu, \omega)$ von irgend einem Punkte $i(\varrho_i, \mu_i, \omega_i)$ mit E und den Neigungswinkel von ϱ gegen ϱ_i mit γ, so wird:

$$E^2 = \varrho^2 + \varrho_i^2 - 2\varrho\varrho_i \cos\gamma ,$$

$$\cos\gamma = \mu\mu_i + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_i^2}\cos(\omega-\omega_i) ,$$

$$(J.) \quad T = \frac{1}{E} = \frac{1}{\varrho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho_i^n}{\varrho^{n+1}} P^{(n)}(\cos\gamma) , \quad (\varrho_i < \varrho) ,$$

Bringt man also die allgemeine Formel (2.) pag. 28:

$$(d\sigma)_i = \frac{dT}{d\nu} d\sigma = -\frac{dT}{d\varrho} \varrho^2 d\mu\, d\omega$$

in Anwendung, in welcher ν die *innere* Normale bezeichnet, so ergiebt sich:

$$(2.)_i \qquad (d\sigma)_i = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^n P^{(n)}(\cos\gamma)\right] d\mu\, d\omega .$$

Dies vorangeschickt, haben wir nun zu verfahren nach den *allgemeinen Vorschriften* der Methode des arithmetischen Mittels. Nach (*A*.), (*B*.) pag. 78 ist:

$$(3.) \qquad W_a = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a \quad \text{und} \quad f_s' = W_{as} + f_s .$$

Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (1.), $(2.)_a$ und durch Ausführung der Integration:

$$W_a = -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a) .$$

Lässt man in dieser Formel den Punkt $a(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$ unendlich nahe an den Kugelflächenpunkt $s(\varrho, \mu, \omega)$ heranrücken, mithin ϱ_a in ϱ, μ_a in μ, und ω_a in ω übergehen, so erhält man keineswegs das W_s, sondern das W_{as}, [vgl. den allgemeinen Satz pag. 46]; so dass man also zu folgender Formel gelangt:

$$W_{as} = -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) .$$

Substituirt man diesen Werth in der *zweiten* Formel (3.), und substituirt man daselbst gleichzeitig für f_s den Werth (1.), so folgt:

$$(4.) \qquad f_s' = A + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) .$$

Da nun von den Functionen f_s, f_s', f_s'', f_s''', etc. jede aus der vorhergehenden in genau derselben Weise entsteht, wie f_s' aus f_s, so gelangt man, auf Grund der bereits vorliegenden Formeln (1.) und (4.), ohne Weiteres zu folgendem Formelsystem:

$$(5.)\quad \begin{aligned} f_s &= A + \sum_{n=1}^{p} Y^{(n)}(\mu, \omega) \; ; \\ f_s' &= A + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n+1} Y^{(n)}(\mu, \omega) \; , \\ f_s'' &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 Y^{(n)}(\mu, \omega) \; , \\ f_s''' &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^3 Y^{(n)}(\mu, \omega) \; , \end{aligned}$$

etc. etc. etc.

Hieraus folgt sofort:

$$\lim_{n=\infty} f_s^{(n)} = A \; .$$

Die in unserm allgemeinen Schema [vgl. (*P.*) pag. 79] mit C bezeichnete Constante ist daher im gegenwärtigen Fall identisch mit A:

$$(6.)\qquad C = A \; .$$

Substituirt man jetzt die Werthe (5.), (6.) in die allgemeinen Formeln [(*Q.*) pag. 79]:

$$\xi = (C - f) + (C - f') + (C - f'') + \dots \; ,$$
$$\eta = (f - f') + (f'' - f''') + (f^{(4)} - f^{(5)}) + \dots \; ,$$

so ergiebt sich ohne grosse Mühe:

$$(7.)\quad \begin{aligned} \xi &= -\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n} Y^{(n)}(\mu, \omega) \; . \\ \eta &= +\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n+2} Y^{(n)}(\mu, \omega) \; . \end{aligned}$$

Und demgemäss ergeben sich, auf Grund unserer allgemeinen Vorschriften [vgl. (*R.*) pag. 79] für die ***Lösungen* Φ *und* Ψ *der beiden Probleme*** die Formeln:

$$\Phi_a = A - \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n} Y^{(n)}(\mu, \omega) \right) (d\sigma)_a \; ,$$

$$\Psi_i = A + \frac{1}{2\pi} \int \left(\sum_{n=1}^{p} \frac{2n+1}{2n+2} Y^{(n)}(\mu, \omega) \right) (d\sigma)_i \; .$$

Substituirt man hier für $(d\sigma)_a$ und $(d\sigma)_i$ ihre Werthe $(2.)_a$ und $(2.)_i$, so sind die [über $\mu = -1 \ldots +1$ und $\omega = 0 \ldots 2\pi$ sich erstreckenden] Integrationen sofort ausführbar; so dass man erhält:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a)\,, \\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n} Y^{(n)}(\mu_i, \omega_i)\,. \end{aligned}$$

Wir haben bisher nur *den* Fall betrachtet, dass die vorgeschriebenen f (1.) durch eine *endliche* Reihe dargestellt sind. Doch sind die für diesen beschränkten Fall erhaltenen Resultate (8.), mittelst des Theorems pag. 91 auf den allgemeinern Fall einer *unendlichen* Reihe ohne Weiteres übertragbar, falls man nur beachtet, dass die vorgeschriebenen Werthe f auf σ *stetig* sein sollen, dass also die diese Werthe ausdrückende ins Unendliche fortlaufende Laplace'sche Reihe, nach einem bekannten Satze*), auf σ *gleichmässig* convergirt. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Auf einer Kugelfläche σ seien irgend welche Werthe f vorgeschrieben, die daselbst stetig sind, und die daher darstellbar sind durch eine auf σ gleichmässig convergirende Laplace'sche Reihe:

$$(9.)\qquad f = A + \sum_{n=1}^{\infty} Y^{(n)}(\mu, \omega)\,,$$

wo A eine Constante vorstellt.

Alsdann werden die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ dargestellt sein durch die Reihen:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} \Phi_a &= A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_a, \omega_a)\,, \\ \Psi_i &= A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n+1} Y^{(n)}(\mu_i, \omega_i)\,, \end{aligned}$$

von denen die erstere gleichmässig convergirt in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$, während die letztere gleichmässig convergirt in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$.

Dabei bezeichnet ϱ den Radius der gegebenen Kugelfläche σ. Ferner sind $(\varrho_a, \mu_a, \omega_a)$ und $(\varrho_i, \mu_i, \omega_i)$ die Polarcoordinaten der Punkte a und i.

*) *Heine*: Handbuch der Kugelfunctionen. 1878, Bd. I, pag. 440.

Um die in (10.) auftretenden unendlichen Reihen zu *summiren*, sei aufmerksam gemacht auf die aus ($A.$) und $(2.)_a$ resultirende Formel:

$$+\frac{d\sigma}{4\pi\varrho E}-\frac{(d\sigma)_a}{2\pi}=\left[\frac{\varrho}{\varrho_a}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{\varrho}{\varrho_a}\right)^{n+1}P^{(n)}(\cos\gamma)\right]\frac{d\mu\, d\omega}{4\pi},$$

sowie auf die aus ($J.$) und $(2.)_i$ sich ergebende Formel:

$$-\frac{d\sigma}{4\pi\varrho E}+\frac{(d\sigma)_i}{2\pi}=\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{\varrho_i}{\varrho}\right)^{n}P^{(n)}(\cos\gamma)\right]\frac{d\mu\, d\omega}{4\pi},$$

wobei unter E in der *ersteren* Formel der Abstand des Elementes $d\sigma\,(\varrho, \mu, \omega)$ vom Punkte a, in der *letzteren* hingegen der Abstand jenes Elementes vom Punkte i zu verstehen ist. Mit Rücksicht auf diese Formeln kann man den Ausdrücken (10.) folgende Gestalt verleihen:

$$(11.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{4\pi\varrho}\int\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)f\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a\,,\\ \Psi_i&=-\frac{1}{4\pi\varrho}\int\frac{1}{E}f\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_i\,,\end{aligned}$$

nämlich zeigen, dass diese letzteren Ausdrücke (11.), bei wirklicher Ausführung der Integration, in jene früheren Ausdrücke (10.) übergehen. Man gelangt daher zu folgendem Resultat:

Satz über die Kugelfläche. — *Sind auf einer gegebenen Kugelfläche σ irgend welche daselbst stetigen Werthe f vorgeschrieben, so sind die diesen Werthen entsprechenden Fundamentalfunctionen* Φ *und* Ψ *der Gebiete* 𝔄 *und* 𝔍 *in ziemlich einfacher Weise angebbar.*

Einerseits werden nämlich dieselben auf σ mit jenen f identisch sein. Und andererseits werden dieselben für alle ausserhalb σ liegenden Punkte a, resp. für alle innerhalb σ befindlichen Punkte i darstellbar sein durch die Formeln:

$$(12.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{4\pi\varrho}\int\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)f\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_a\,,\\ \Psi_i&=-\frac{1}{4\pi\varrho}\int\frac{1}{E}f\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_i\,.\end{aligned}$$

Uebrigens kann man diese Formeln [vgl. (2.) pag. 28] *auch so schreiben:*

$$(13.)\qquad \begin{aligned}\Phi_a&=\frac{1}{2\pi}\int\left[\frac{1}{2\varrho}\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_a}\right)-\frac{\cos\delta}{E^2}\right]f\,d\sigma\,,\\ \Psi_i&=\frac{1}{2\pi}\int\left[-\frac{1}{2\varrho}\frac{1}{E}+\frac{\cos\delta}{E^2}\right]f\,d\sigma\,.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ϱ den Radius der Kugelfläche σ, und ϱ_a den Centralabstand des Punktes a. Ueberdies bezeichnet E den Abstand des Punktes a oder i vom Elemente $d\sigma$, und δ denjenigen Winkel, unter welchem E gegen die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale geneigt ist.

Man bemerkt, dass dieser Satz über die *Kugelfläche*, seiner ganzen Form nach, parallel steht zu dem früher (pag. 96) über die *Kreislinie* aufgestelltem Satz.

§ 12.

Aufstellung eines sehr allgemeinen Theorems.

Es handelt sich hier um die weitere Verallgemeinerung des schon auf pag. 91 aufgestellten Theorems, oder vielmehr um die Befreiung dieses Theorems von der damaligen Restriction, dass die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige* sein solle.

Wir werden zunächst nur den Fall der *Ebene*, d. h. den Fall einer *Curve* in Betracht ziehen, und hierbei Gebrauch machen von dem über die *Kreislinie* erhaltenen Specialsatz pag. 96. Jenem Specialsatz schliessen sich gewisse Zusätze an, von denen hier gleichfalls Gebrauch zu machen ist.

Jener Specialsatz lautete folgendermassen [vgl. (19.) pag. 96]: Sind auf einer *Kreislinie* σ_1 irgend welche daselbst *stetige* Werthe f_1 vorgeschrieben *), und bezeichnet man die beiden Gebiete, in welche die Ebene durch σ_1 zerlegt wird, mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{J}_1$, so wird die jenen Werthen f_1 entsprechende Fundamentalfunction Φ des Gebietes $\mathfrak{A}_1$ für alle *innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegende Punkte x darstellbar sein durch die Formel:

$$(1.)\quad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1\,, \quad [x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1]\,.$$

Hier ist ϱ_1 der *Radius* von σ_1. Ferner bezeichnet E den Abstand des Punktes x vom Elemente $d\sigma_1$, und δ den Winkel von E gegen die auf $d\sigma_1$ errichtete innere Normale.

*) Wir ersetzen hier *absichtlich* die früheren Bezeichnungen σ, ϱ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{J}$, f durch σ_1, ϱ_1, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{J}_1$, f_1, und zugleich die Bezeichnung a, i durch x.

Gleichzeitig wird alsdann die jenen Werthen f_1 entsprechende Fundamentalfunction Ψ des Gebietes $\mathfrak{J}_1$ für alle *innerhalb* $\mathfrak{J}_1$ liegenden Punkte x dargestellt sein durch folgende Formel:

$$(2.)\quad \Psi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1\ , \quad [x \text{ innerhalb } \mathfrak{J}_1]\ ,$$

wo ϱ_1, E, δ dieselben Bedeutungen haben wie in (1.).

Hieraus aber ergeben sich, falls man die *Definition* der Fundamentalfunctionen (pag. 16 und pag. 21) berücksichtigt, sofort folgende weitere Sätze:

Erster Zusatz. — Versteht man unter f_1 eine längs der Kreislinie σ_1 stetige Function, ferner unter $\mathfrak{A}_2$ irgend ein *vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegendes Gebiet, so wird der in (1.) angegebene, mit E, δ behaftete, also von der Lage des variablen Punktes x abhängende Ausdruck

$$(3.)\quad \int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ sein.

Zweiter Zusatz. — Ist eine längs σ_1 stetige Function f_1 gegeben, und versteht man unter $\mathfrak{J}_2$ irgend ein *vollständig innerhalb* $\mathfrak{J}_1$ liegendes Gebiet, so wird der in (2.) angegebene, mit E, δ behaftete, also von der Lage des variablen Punktes x abhängende Ausdruck:

$$(4.)\quad \int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right) f_1\, d\sigma_1$$

eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}_2$ sein.

Solches vorangeschickt, gehen wir über zu unserm eigentlichen Thema. In der Ebene sei eine *ganz beliebige* geschlossene Curve σ gegeben, und auf derselben sei irgend welche daselbst *stetige* Function f vorgeschrieben. Ferner existire eine mit der veränderlichen Zahl p (= 1, 2, 3, ...) behaftete Function f^p, welche ebenfalls [und zwar für jeden Werth der Zahl p] auf σ *stetig* ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ befindlichen Punkte s *gleichmässig* gegen f convergirt. Ueberdies sei es [mittelst irgend welcher Methoden] geglückt, die dem f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ wirklich zu construiren. —

Wir wollen die Consequenzen entwickeln, die aus diesen Voraussetzungen sich ergeben, und dabei namentlich untersuchen, ob ebenso

wie f^p gegen f convergirt, ebenso vielleicht auch Φ^p und Ψ^p gegen bestimmte Limitalfunctionen convergiren, und ob ferner (falls solches der Fall sein sollte) *diese Limitalfunctionen die den f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ sind.*

Bezeichnet ε_0 einen *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad, so wird [in Folge der gleichmässigen Convergenz, welche die Function f^p nach unserer Voraussetzung besitzen soll] stets eine positive ganze Zahl p_0 existiren von solcher Grösse, dass die Formel

(5.) $\text{abs}\,(f_s^p - f_s) < \varepsilon_0$, (p beliebig, aber $\geqq p_0$ gedacht) ,

simultan erfüllt ist für alle auf σ befindlichen Punkte s. Man kann also diese Formel z. B. successive auf zwei Zahlen p und q anwenden, falls nur jede derselben $\geqq p_0$ ist. Durch Combination der so entstehenden beiden Formeln ergiebt sich alsdann sofort:

(5*a*.) $\text{abs}\,(f_s^p - f_s^q) < 2\varepsilon_0$, (p und q beliebig, aber beide $\geqq p_0$) ,

oder, was dasselbe ist:

(5*b*.) $\text{abs}\,(\Phi_s^p - \Phi_s^q) < 2\varepsilon_0$, (p und q beliebig, aber beide $\geqq p_0$) ;

denn es ist Φ_s^p identisch mit f_s^p, zufolge der für Φ^p gegebenen Definition; und ebenso Φ_s^q identisch mit f_s^q.

Beachtet man nun, dass die Formel (5*b*.) [ebenso wie (5.) und (5*a*.)], *simultan* stattfindet für alle Punkte s der gegebenen Curve σ, und beachtet man ferner, dass auf die Fundamentalfunction $\Phi^p - \Psi^q$ der erste Satz pag. 26 ohne Weiteres anwendbar ist; so gelangt man sofort zu der allgemeinen Formel*):

(5*c*.) $\text{abs}\,(\Phi_x^p - \Phi_x^q) < 2\varepsilon_0$, (p und q beliebig, aber beide $\geqq p_0$) ,

nämlich zu dem Resultate, dass die letztere Formel *simultan* stattfindet für sämmtliche Punkte *x in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$.* Also der Satz:

Bezeichnet ε_0 einen beliebigen Kleinheitsgrad, so existirt stets eine positive ganze Zahl p_0 von solcher Grösse, dass die Formel

(6.) $\text{abs}\,(\Phi_x^p - \Phi_x^q) < 2\varepsilon_0$, (*p und q beliebig, aber beide $\geqq p_0$ gedacht*) ,

simultan erfüllt ist für sämmtliche Punkte x in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$.

*) Vgl. die Erläuterung auf pag. 90.

Markirt man also in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ irgend einen bestimmten *festen* Punkt x (a oder s), und lässt man also in dem Ausdruck Φ_x^p nur noch das p *variabel*, so sind die *Schwankungen* dieses Ausdruckes *jenseits* p_0 (d. i. für $p \geqq p_0$), durch Vergrösserung von p_0, unter jedweden Kleinheitsgrad $2\varepsilon_0$ hinabdrückbar. Man wird also z. B. für p_0 eine endliche Zahl von solcher Grösse angeben können, dass alle *jenseits* p_0 liegenden Werthe dieses Ausdruckes vom Werthe $\Phi_x^{p_0}$ um weniger als $\frac{1}{1000}$ abweichen. U. s. w.

Kurz, man gelangt auf Grund des Satzes (6.) zu dem Resultate, dass das jenem *festen* Punkte x entsprechende Φ_x^p, für $p = \infty$, gegen eine *feste endliche* Grenze convergirt. Bezeichnet man diese Grenze mit Φ_x^∞ oder kürzer mit Φ_x, so wird in solcher Weise, weil x in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ jede beliebige Lage haben darf, eine *neue* Function Φ_x *definirt* sein für alle Punkte x des Gebietes $\mathfrak{A}$, und zwar eine Function, die in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *endlich* ist.

Lässt man nun in (6.) die Zahl q ins Unendliche wachsen, so verwandelt sich daselbst das Φ_x^q in Φ_x^∞ d. i. in Φ_x. Man gelangt in solcher Weise also zu der Formel:

(7.) $\quad \text{abs}\,(\Phi_x{}^p - \Phi_x) < 2\varepsilon_0\,, \quad (p \text{ beliebig, aber} \geqq p_0 \text{ gedacht})\;;$

und zwar zu dem Resultate, dass diese Formel [ebenso wie (6.) selber] *simultan* stattfindet für alle Punkte x in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$. Mit anderen Worten: Man gelangt zu dem Resultat, dass die Function Φ_x^p, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle Punkte des Gebietes $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ_x convergirt.

(A.) Wir haben somit nachgewiesen, dass eine in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ überall *endliche* Function Φ_x existirt, von solcher Beschaffenheit, dass die gegebene Function Φ_x^p, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *gleichmässig* gegen Φ_x convergirt.

Da Φ_x^p, seiner Definition zufolge (nämlich als Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$), in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig* ist, so liegt es nahe zu vermuthen, dass Gleiches auch gelten wird von der neuen Function Φ_x. Auch liegt es nahe zu vermuthen, dass Φ_x, ebenso wie Φ_x^p, an der Grenze von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ identisch sein wird mit f.

Um näher hierauf einzugehen, markiren wir in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt x (a oder s), und beschreiben um diesen *festen*

Punkt x (als Centrum) eine Kreisperipherie vom Radius ϱ. Diesen Radius ϱ wird man offenbar*) so klein machen können, dass für zwei auf $\mathfrak{A}$ beschränkte, sonst aber innerhalb der genannten Peripherie frei bewegliche Punkte x_1 und x_2 *fortdauernd* die Relation stattfindet:

$$(8.)\qquad \text{abs}\,(\Phi_{x_1}^p - \Phi_{x_2}^p) < \varepsilon_0 \,.$$

Dabei mag p beliebig fixirt, aber $\geqq p_0$ gedacht, und unter ε_0 derselbe Kleinheitsgrad wie in (7.) verstanden werden. In dieser Formel (8.) kann man alsdann, zufolge (7.), Φ^p mit Φ vertauschen, ohne dabei einen Fehler von mehr als $4\varepsilon_0$ hineinzubringen. Somit ergiebt sich die Formel:

$$(9.)\qquad \text{abs}\,(\Phi_{x_1} - \Phi_{x_2}) < 5\,\varepsilon_0 \,,$$

und zwar wiederum als gültig für zwei auf $\mathfrak{A}$ beschränkte, sonst aber innerhalb jener [mit dem Radius ϱ um x beschriebenen] Kreisperipherie frei bewegliche Punkte. Demgemäss ist Φ im Centrum x dieser Peripherie *stetig* zu nennen, also, weil x in Erstreckung von $\mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, auch *stetig* zu nennen *in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{A}$.

Was ferner die Werthe von Φ *an der Grenze* von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ betrifft, so gilt für jedweden auf σ gelegenen Punkt s die Formel:

$$\Phi_s^p = f_s^p \,,$$

zufolge der Definition von Φ^p. Lässt man aber hier die Zahl p ins Unendliche wachsen, so folgt:

$$(9a.)\qquad \Phi_s = f_s \,.$$

Somit sehen wir unsere Vermuthungen bestätigt, und gelangen also zu folgendem Satz:

(B.) Die in (A.) definirte Function Φ_x oder Φ ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig*, und an der Grenze von $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ identisch mit f.

Wir haben jetzt, um unser eigentliches Ziel zu erreichen, noch die Differentialquotienten von Φ *zu untersuchen.*

Man markire *innerhalb* $\mathfrak{A}$ irgend einen Punkt a (vgl. die folgende Figur), beschreibe um a (als Centrum) zwei *vollständig innerhalb* $\mathfrak{A}$

*) Weil nämlich Φ_x^p eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, mithin in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ *stetig* ist.

liegende Kreislinien σ_1 und σ_2 mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2, $(\varrho_1 > \varrho_2)$, und bezeichne das von σ_1 umschlossene Gebiet mit $\mathfrak{J}_1$, das von σ_2 umschlossene mit $\mathfrak{J}_2$. Alsdann ist z. B. $\mathfrak{J}_1$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. Folglich wird die Fundamentalfunction Φ^p des Gebietes $\mathfrak{A}$ zugleich auch eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{J}_1$ sein, mithin für alle *innerhalb* $\mathfrak{J}_1$ liegenden Punkte x darstellbar sein durch die Formel (2.):

$$(10.)\qquad \Phi_x{}^p = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1{}^p\, d\sigma_1\,,\ (x \text{ innerhalb } \mathfrak{J}_1)\ ,$$

wo $\Phi_1{}^p$ den Werth von Φ^p im Elemente $d\sigma_1$ vorstellt.

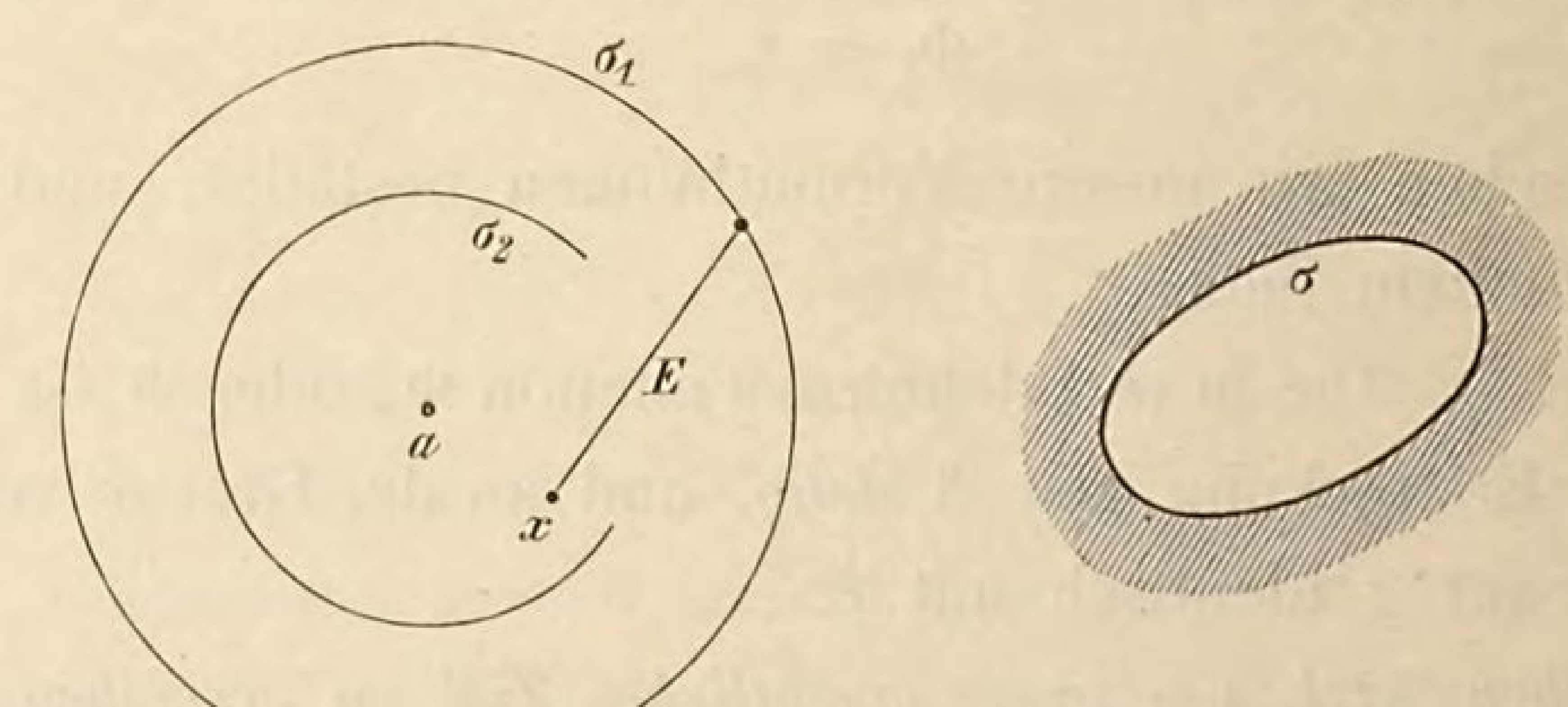
Fraglich ist, ob diese Formel (10.) noch Gültigkeit behält, wenn man in ihr Φ^p durch Φ ersetzt. Bezeichnet man vorläufig den durch diese Substitution hineintretenden Fehler mit Δ, setzt man also:

$$(11.)\qquad \Delta_x + \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1\ ,\quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{J}_1)\ ,$$

so folgt aus (10.), (11.) durch Subtraction:

$$(12.)\ \Delta_x + (\Phi_x - \Phi_x{}^p) = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)(\Phi_1 - \Phi_1{}^p)\, d\sigma_1\,,\ (x \text{ innerhalb } \mathfrak{J}_1).$$

Dabei ist zu beachten, dass das hier eingeführte Δ_x [seiner Definition (11.) zufolge] von p *unabhängig* ist, also für einen *gegebenen* Punkt x jedesmal einen *völlig bestimmten*, *festen* Werth besitzt.



Beschränkt man jetzt den Punkt x auf das Gebiet $\mathfrak{J}_2$ (welches ein *Theil* von $\mathfrak{J}_1$ ist), so wird die Entfernung E des Punktes x vom Elemente $d\sigma_1$ stets $\geqq (\varrho_1 - \varrho_2)$, also

$$\frac{1}{E} \text{ stets } \leqq \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}$$

sein. Bezeichnet man also den *absolut grössten* Werth von $(\Phi - \Phi^p)$ in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ mit M^p, so ergiebt sich aus (12.) *für alle Punkte x des Gebietes $\mathfrak{J}_2$* die Formel:

$$\text{abs}\,\Delta_x \leqq \mathsf{M}^p + \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2}\right)\mathsf{M}^p\,d\sigma_1\,,\quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{J}_2)\,,$$

also, weil $\int d\sigma_1 = 2\pi\varrho_1$ ist:

$$(13.)\qquad \text{abs}\,\Delta_x \leqq 2\,\mathsf{M}^p\left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}\right),\quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{J}_2)\,.$$

Beachtet man nun, dass Δ_x für einen *bestimmten* Punkt x des Gebietes $\mathfrak{J}_2$ einen (von p unabhängigen) *völlig bestimmten festen* Werth hat, dass aber andererseits die *rechte Seite* der Formel (13.), wie aus der Definition von M^p folgt, durch Vergrösserung der Zahl p unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar ist, so ergiebt sich aus dieser Formel (13.) sofort:

$$(14.)\qquad \Delta_x = 0\,,\quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{J}_2)\,.$$

Demgemäss gewinnt die Formel (11.) für alle Punkte x des hier betrachteten Gebietes $\mathfrak{J}_2$ die einfachere Gestalt:

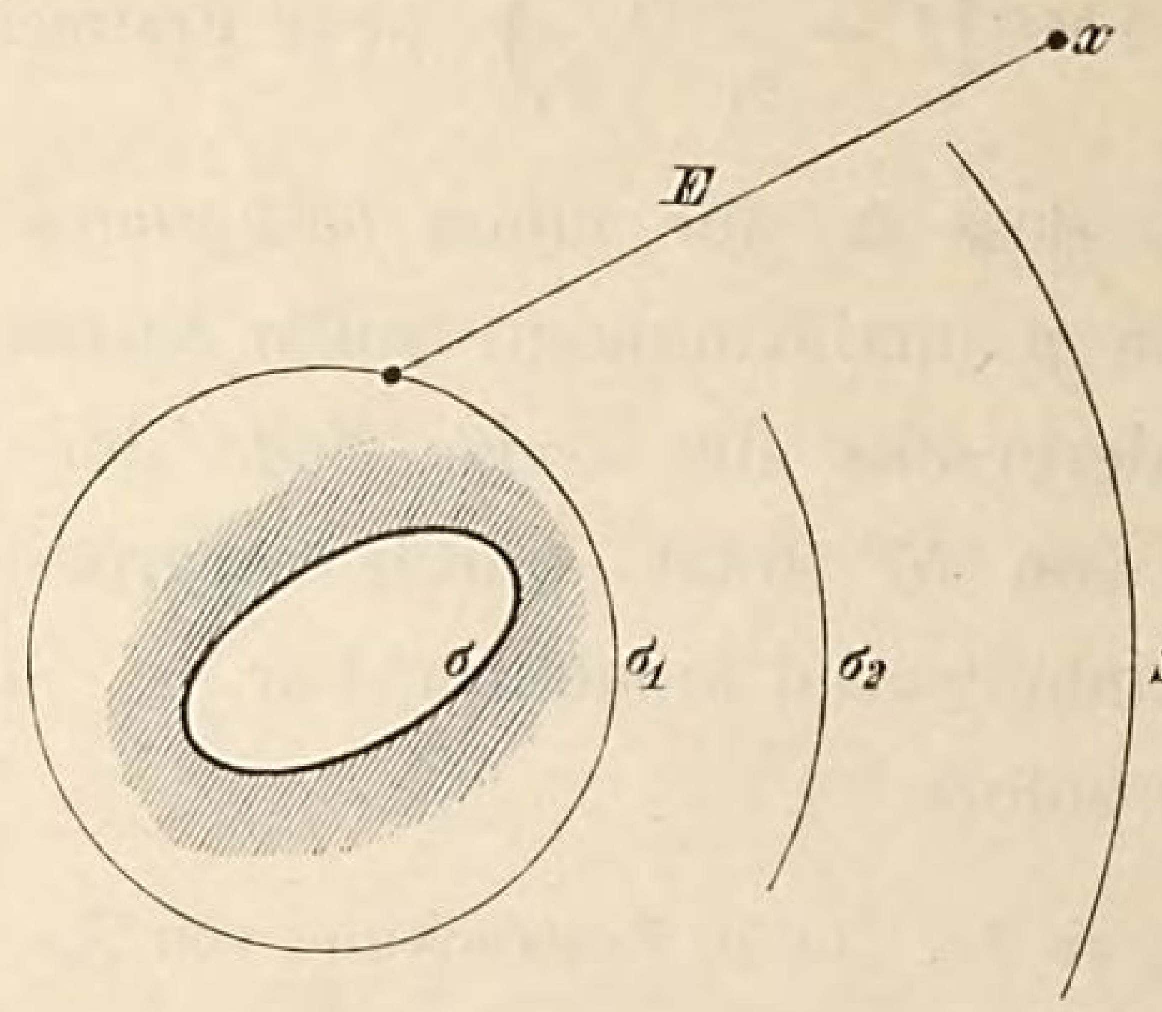
$$(15.)\qquad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(-\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\,d\sigma_1\,,\quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{J}_2)\,.$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf den Satz (4.), sofort, *dass Φ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{J}_2$ ist.* Beachtet man daher die bekannten Eigenschaften einer solchen Fundamentalfunction [vgl. pag. 16], und beachtet man ferner, dass der Mittelpunkt a des Gebietes $\mathfrak{J}_2$ innerhalb $\mathfrak{A}$ *beliebig* gewählt war, so gelangt man zu folgendem Resultate:

> In jedem Punkte a, der *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, sind die ersten und zweiten Ableitungen von Φ nach x, y *stetig*. Auch findet in jedem solchen Punkte a die Gleichung statt:
>
> $$(\Gamma.)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0\,.$$
>
> Dabei sind unter x, y *die rechtwinkligen Coordinaten* des Punktes a zu verstehen.

Man construire jetzt drei concentrische Kreislinien σ_1, σ_2, S, welche die gegebene Curve σ *umschliessen*, und *vollständig innerhalb*

$\mathfrak{A}$ liegen, und bezeichne die Radien dieser Kreise mit ϱ_1, ϱ_2, R, ($\varrho_1 < \varrho_2 < R$). Ferner bezeichne man das *ausserhalb* σ_1 liegende und von σ_1 *begrenzte* Gebiet der Ebene mit $\mathfrak{A}_1$, ebenso das *ausserhalb* σ_2 liegende und von σ_2 *begrenzte* Gebiet mit $\mathfrak{A}_2$; so dass also $\mathfrak{A}_2$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}_1$ ist, und $\mathfrak{A}_1$ ein *Theil* von $\mathfrak{A}$. — In der hier folgenden Figur sind die drei Kreislinien (der Raumersparniss willen) nicht völlig ausgezogen, sondern nur angedeutet.



Φ^p ist eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$, also auch eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{A}_1$, also für alle *innerhalb* $\mathfrak{A}_1$ liegenden Punkte x darstellbar durch die Formel (1.):

$$(16.)\qquad \Phi_x{}^p = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1{}^p\, d\sigma_1\,, \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1)\,,$$

wo $\Phi_1{}^p$ den Werth von Φ^p im Elemente $d\sigma_1$ vorstellt.

Fraglich ist, ob diese Formel (16.) gültig bleibt bei einer Vertauschung von Φ^p mit Φ. Bezeichnet man den durch eine solche Vertauschung entstehenden Fehler mit Δ_x, setzt man also:

$$(17.)\qquad \Delta_x + \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1\,, \quad (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1)\,,$$

so folgt aus (16.), (17.) durch Subtraction:

$$(18.)\quad \Delta_x + (\Phi_x - \Phi_x{}^p) = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)(\Phi_1 - \Phi_1{}^p)\, d\sigma_1\,, \ (x \text{ innerhalb } \mathfrak{A}_1)\,.$$

Um nun das (von p unabhängige) Δ_x zu ermitteln, beschränken wir den Punkt x auf das (einen *Theil* von $\mathfrak{A}_1$ bildende) Gebiet $\mathfrak{A}_2$. Alsdann ist der Abstand E des Punktes x von $d\sigma_1$ stets $\geqq (\varrho_2 - \varrho_1)$, mithin

$$\frac{1}{E} \text{ stets } \leqq \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}\,.$$

Bezeichnen wir also den *absolut grössten* Werth von $(\Phi - \Phi^p)$ in ganzer Erstreckung des Gebietes $\mathfrak{A}$ [ebenso wie früher] mit M^p, so ergiebt sich aus (18.) *für alle Punkte x des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ die Formel:

$$\text{abs}\, \Delta_x \leqq M^p + \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1}\right) M^p\, d\sigma_1 \,,$$

also, weil $\int d\sigma_1 = 2\pi\varrho_1$ ist:

$$(19.) \qquad \text{abs}\, \Delta_x \leqq 2 M^p \left(1 + \frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}\right), \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2)\,.$$

Hieraus aber folgt, durch dieselben Ueberlegungen wie früher bei (13.):

$$(20.) \qquad \Delta_x = 0 \;, \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2)\,.$$

Demgemäss gewinnt die Formel (17.) für *die Punkte x dieses Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ die einfachere Gestalt:

$$(21.) \qquad \Phi_x = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{1}{2\varrho_1} - \frac{\cos\delta}{E}\right)\Phi_1\, d\sigma_1 \,, \quad (x \text{ in Erstreckung von } \mathfrak{A}_2)\,.$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf den Satz (3.), *dass* Φ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ *ist.*

Demgemäss ergiebt sich, aus den bekannten Eigenschaften der Fundamentalfunctionen [vgl. den Satz pag. 23], z. B. folgendes Resultat:

(Δ.) Für den in der letzten Figur angedeuteten Kreis S findet die Formel statt:

$$\int \frac{d\Phi}{dR}\, dS = 0 \,,$$

wo R den Radius des Kreises vorstellt.

Und gleichzeitig ergiebt sich aus dem Umstande, *dass* Φ *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}_2$ *ist*, auch noch folgender Satz [vgl. (4.) pag. 22]:

(E.) Die Werthdifferenzen, welche Φ *ausserhalb* des in der letzten Figur gezeichneten Kreises S besitzt, sind, durch Vergrösserung des Radius R dieses Kreises, unter jedweden Kleinheitsgrad hinabdrückbar.

Blicken wir nun zurück auf die soeben constatirten Eigenschaften (A.), (B.), (Γ.), (Δ.), (E.) unserer Function Φ, so erkennen wir [vgl. pag. 21] nicht nur, dass Φ eine *Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ ist; sondern zugleich auch, mit Rücksicht auf (B.), dass diese Fundamentalfunction Φ *an der Grenze* des Gebietes $\mathfrak{A}$, d. i. auf σ *identisch ist mit den daselbst vorgeschriebenen Werthen f.*

Wir haben hiermit unser vorläufiges Ziel erreicht. Denn wir übersehen leicht, dass unsere Betrachtungen über Φ^p in analoger Weise bei Ψ^p wiederholbar sind.

Desgleichen übersehen wir leicht, dass fast genau dieselben Betrachtungen, wie hier in der *Ebene*, auch im *Raume* anstellbar sind. Der einzige Unterschied wird nur darin bestehen, dass, statt des die *Kreislinie* betreffenden Specialsatzes (19.) pag. 96, alsdann der die *Kugelfläche* betreffende Specialsatz (13.) pag. 104 anzuwenden ist. — Demgemäss gelangen wir zu folgendem

Theorem. — *In der Ebene oder im Raume sei eine ganz beliebige geschlossene Curve oder Fläche σ gegeben, die z. B. auch mit Ecken, resp. mit Ecken und Kanten behaftet sein darf. Ferner sei auf σ irgend welche daselbst stetige Function f vorgeschrieben.*

Ueberdies sei [durch irgend welche Methode oder durch Zufall] *eine mit einem variablen Parameter p behaftete Function f^p gefunden, welche ebenfalls, und zwar für jedwedes p, auf σ stetig ist, und welche, bei ins Unendliche wachsendem p, für alle auf σ liegenden Punkte gleichmässig gegen f convergirt.*

Gelingt es alsdann, die dieser Function f^p entsprechenden Fundamentalfunctionen Φ^p und Ψ^p der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ zu construiren), so wird hierdurch zugleich auch die Existenz derjenigen Fundamentalfunctionen Φ und Ψ der Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ bewiesen sein, welche den eigentlich vorgeschriebenen Werthen f entsprechen.*

Und zwar wird Φ^p, bei ins Unendliche wachsendem p, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{A}$ gleichmässig gegen Φ convergiren. Und ebenso wird Ψ^p, für $p = \infty$, in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{J}$ gleichmässig gegen Ψ convergiren.

*) Ist die gegebene Curve oder Fläche σ *überall convex* und *keine zweisternige*, so sind Φ^p und Ψ^p construirbar durch die Methode des arithmetischen Mittels.

Nachträgliche Bemerkungen.

Erste Bemerkung. — Im Anschluss an eine Stelle der Einleitung (pag. 3, 4) mag hier noch folgender Satz mitgetheilt werden, durch welchen das dort Gesagte bedeutend verallgemeinert wird:

Ist die Methode des arithmetischen Mittels für irgend eine geschlossene Curve convergent und correct, so wird sie diese Eigenschaften auch haben für jedwede andere Curve, welche aus jener durch die dem Gesetz der reciproken Radien entsprechende Transformation entsteht.

Ich behalte mir vor, den Beweis dieses Satzes bei späterer Gelegenheit mitzutheilen. Ob aber ein analoger Satz auch im *Raume* für geschlossene Flächen existirt, muss vorläufig noch dahingestellt bleiben. Jedenfalls ist hier im *Raume* die betreffende Untersuchung eine wesentlich andere, und bei weitem schwieriger als im Fall der Ebene.

Zweite Bemerkung. — In Betreff der Formeln $(Q.)$ pag. 79:

$$(Q.)\qquad \begin{aligned} \xi &= (C-f)+(C-f')+(C-f'')+\ldots, \\ \eta &= (f-f')+(f''-f''')+(f^{(4)}-f^{(5)})+\ldots. \end{aligned}$$

sei bemerkt, dass man dieselben auch so schreiben kann:

$$(Q'.)\qquad \begin{aligned} \xi &= +(C-f)+(C-f')+(C-f'')+(C-f''')++\ldots, \\ \eta &= -(C-f)+(C-f')-(C-f'')+(C-f''')-+\ldots; \end{aligned}$$

woraus z. B. folgt:

$$(Q''.)\qquad \begin{aligned} \frac{\xi+\eta}{2} &= (C-f')+(C-f''')+(C-f^{(5)})+\ldots, \\ \frac{\xi-\eta}{2} &= (C-f)+(C-f'')+(C-f^{(4)})+\ldots. \end{aligned}$$

Dabei ist im Auge zu behalten, dass alle diese Formeln nach den angegebenen *Binomen* fortschreiten, und ihre Convergenz und Gültigkeit verlieren würden, falls man diese Binome *zerreissen* wollte. So z. B. würde die Formel

$$\eta = f-f'+f''-f'''+f^{(4)}-f^{(5)}+-\ldots$$

schon deswegen *sinnlos* sein, weil $f^{(n)}$ bei wachsendem n nicht gegen 0, sondern gegen die Constante C convergirt, letztere aber im Allgemeinen von 0 verschieden ist.

Was den Beweis der Formeln $(Q.)$, $(Q'.)$, $(Q''.)$ betrifft, so ist die *erste* der beiden Formeln $(Q'.)$ bereits constatirt worden durch die Betrachtungen pag. 83—87. Und genau in derselben Art und Weise ist auch die *zweite* dieser beiden Formeln beweisbar. Sobald aber die beiden Formeln $(Q'.)$ *bewiesen* sind, ergiebt sich hieraus ohne Weiteres auch die Richtigkeit der Formeln $(Q.)$ und $(Q''.)$.

Dritte Bemerkung. — Bei dem Beweise, den ich für den Hülfssatz pag. 96 gegeben habe, ist von mir *stillschweigend* voraus-

gesetzt worden, dass die Function f längs der gegebenen Kreislinie nicht nur *stetig*, sondern auch *abtheilungsweise monoton* sei. Doch betrifft das nur den *Beweis* des Satzes, nicht aber seinen *Inhalt*. In der That ist hervorzuheben, dass der Satz selber, in der ihm auf pag. 96 zuertheilten Fassung, *vollständig correct* ist. [Vgl. meine Vorlesungen über die Riemann'sche Theorie, II. Aufl., 1884, pag. 410].

Aehnliches ist zu bemerken hinsichtlich des die Kugelfläche betreffenden Hülfssatzes pag. 104. Ich behalte mir vor, auf diesen Gegenstand später von Neuem zurückzukommen.

Inhalt.

		Seite
Einleitung		3
Kurze Uebersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphe		7
§ 1.	Die Fundamentalfunctionen des von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten inneren Gebietes $\mathfrak{J}$	16
§ 2.	Die Fundamentalfunctionen des von σ begrenzten äusseren Gebietes $\mathfrak{A}$	21
§ 3.	Definition der Potentiale W, w. Berechnung von w	27
§ 4.	Allgemeine Eigenschaften des Potentiales W	34
§ 5.	Ueber die mit dem Potential W zusammenhängenden unendlich vielen Functionen f, f', f'', f''', etc.	48
§ 6.	Genauere Untersuchung der im vorhergehenden Paragraph eingeführten variablen Grösse ζ	60
§ 6a.	An Stelle von ζ wird eine etwas andere Variable z eingeführt, und letztere näher untersucht	73
§ 7.	*Das äussere und innere Problem. Lösung derselben nach der Methode des arithmetischen Mittels*	77
§ 8.	Beweis für die Richtigkeit der angegebenen Lösungen. Das schliesslich sich ergebende *Existenztheorem*	83
§ 9.	Sich anschliessende Betrachtungen	88
§ 10.	Anwendung der Methode des arithmetischen Mittels auf die Kreislinie	91
§ 11.	Anwendung derselben auf die Kugelfläche	100
§ 12.	Aufstellung eines sehr *allgemeinen Theorems*	105
Nachträgliche Bemerkungen		115

Verbesserung.

Auf Seite 55 ist in der siebenten Zeile v. u. zu lesen »*der Formel* (26.)« statt »*der Formel* (21.).«

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

ACHTER BAND. (XIII. Bd.) Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1868. brosch. Preis 24 ℳ.

P. A. HANSEN, Geodätische Untersuchungen. 1865. 5 ℳ 60 ₰.

—— Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten zu Gotha und Leipzig, unter seiner Mitwirkung ausgeführt von Dr. Auwers und Prof. Bruhns im April des Jahres 1865. Mit 1 Figurentafel. 1866. 2 ℳ 80 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Siebente Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles. Mit 2 Tafeln. 1866. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Tafeln der Egeria mit Zugrundelegung der in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig veröffentlichten Störungen dieses Planeten berechnet und mit einleitenden Aufsätzen versehen. 1867. 6 ℳ 80 ₰.

—— Von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1867. 6 ℳ.

NEUNTER BAND. (XIV. Bd.) Mit 6 Tafeln. hoch 4. 1871. brosch. Preis 18 ℳ.

P. A. HANSEN, Fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im Allgemeinen und in ihrer Anwendung auf die Geodäsie. 1868. 5 ℳ 40 ₰.

—— Entwickelung eines neuen veränderten Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit besonderer Betrachtung des Falles, in welchem gewisse Winkel vorausbestimmte Werthe bekommen sollen. 1869. 3 ℳ.

—— Supplement zu der geodätische Untersuchungen benannten Abhandlung, die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks betr. 1869. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Achte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases. Mit 4 Tafeln. 1870. 2 ℳ 40 ₰.

P. A. HANSEN, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahre 1874 eintreffenden Vorüberganges. Mit zwei Planigloben. 1870. 3 ℳ.

G. T. FECHNER, Zur experimentalen Aesthetik. Erster Theil. 1871. 2 ℳ.

ZEHNTER BAND. (XV. Bd.) Mit 7 Tafeln. hoch 4. 1874. brosch. Preis 21 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Princip der Erhaltung der Energie. 1871. 1 ℳ 60 ₰.

P. A. HANSEN, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen. 1871. 3 ℳ 60 ₰.

C. BRUHNS und E. WEISS, Bestimmung der Längendifferenz zwischen Leipzig und Wien. 1872. 2 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Neunte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes. Mit 4 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

—— Elektrische Untersuchungen. Zehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonites. Mit 3 Tafeln. 1872. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. 1873. 3 ℳ 80 ₰.

P. A. HANSEN, Von der Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes. 1874. 4 ℳ.

—— Ueber die Darstellung der graden Aufsteigung und Abweichung des Mondes in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge. 1874. 1 ℳ.

—— Dioptrische Untersuchungen mit Berücksichtigung der Farbenzerstreuung und der Abweichung wegen Kugelgestalt. Zweite Abhandlung. 1874. 2 ℳ.

ELFTER BAND. (XVIII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1878. brosch. Preis 21 ℳ.

G. T. FECHNER, Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung. 1874. 2 ℳ.

C. NEUMANN, Ueber das von Weber für die elektrischen Kräfte aufgestellte Gesetz. 1874. 3 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Elfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Kalkspathes, des Berylles, des Idocrases und des Apophyllites. Mit 3 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

P. A. HANSEN, Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter. 1875. 6 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zwölfte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins. Mit 4 Tafeln. 1875. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Dioptrische Untersuchungen, insbesondere über das Hansen'sche Objectiv. 1876. 3 ℳ.

C. NEUMANN, Das Webersche Gesetz bei Zugrundelegung der unitarischen Anschauungsweise. 1876. 1 ℳ.

W. WEBER, Elektrodynam. Maassbestimmungen, insbes. über die Energie der Wechselwirkung. Mit 1 Tafel. 1878. 2 ℳ.

ZWÖLFTER BAND. (XX. Bd.) Mit 13 Tafeln. hoch 4. 1883. brosch. Preis 22 ℳ.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dreizehnte Abhandlung: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits. Mit 3 Tafeln. 1878. 2 ℳ.

W. SCHEIBNER, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. 5 ℳ.

—— Supplement zur Abhandlung über die Reduction elliptischer Integrale in reeller Form. 1880. 1 ℳ 50 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung: Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln. 1879. 2 ℳ.

C. BRUHNS, Neue Bestimmung der Längendifferenz zwischen der Sternwarte in Leipzig und der neuen Sternwarte auf der Türkenschanze in Wien. 1880. 2 ℳ 40 ₰.

C. NEUMANN, Ueber die peripolaren Coordinaten. 1880. 1 ℳ 50 ₰.

—— Die Vertheilung der Elektricität auf einer Kugelcalotte. 1880. 2 ℳ 40 ₰.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfzehnte Abhandlung: Ueber die Aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen. Mit 4 Tafeln. 1881. 2 ℳ.

—— Elektrische Untersuchungen. Sechszehnte Abhandlung. Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits. Mit 3 Tafeln. 1882. 2 ℳ.

—— Elektrische Untersuchungen. Siebzehnte Abhandlung. Ueber die bei einigen Gasentwickelungen auftretenden Elektricitäten. 1883. 1 ℳ 80 ₰.

DREIZEHNTER BAND. (XXII. Bd.) Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1887. brosch. Preis 30 ℳ.

G. TH. FECHNER, Ueber die Frage des Weber'schen Gesetzes und Periodicitätsgesetzes im Gebiete des Zeitsinnes. 1884. 2 ℳ 80 ₰.

—— Ueber die Methode der richtigen und falschen Fälle in Anwendung auf die Massbestimmungen der Feinheit oder extensiven Empfindlichkeit des Raumsinnes. 1884. 7 ℳ.

W. BRAUNE u. O. FISCHER, Die bei der Untersuchung von Gelenkbewegungen anzuwendende Methode, erläutert am Gelenkmechanismus des Vorderarms beim Menschen. Mit 4 Tafeln. 1885. 2 ℳ.

F. KLEIN, Ueber die elliptischen Normalcurven d. n^{ten} Ordnung u. zugehörige Modulfunctionen d. n^{ten} Stufe. 1885. 1 ℳ 80 ₰.

C. NEUMANN, Ueber die Kugelfunctionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n\,(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$. 1886. 2 ℳ 40 ₰.

W. HIS, Zur Geschichte des menschlichen Rückenmarkes und der Nervenwurzeln. Mit 1 Tafel und 10 Holzschnitten. 1886. 2 ℳ.

H. BRUNS, Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung. 1886. 2 ℳ.

RUD. LEUCKART, Neue Beiträge zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden. Mit 3 Tafeln. 1887. 7 ℳ.

C. NEUMANN, Über die Methode des arithmetischen Mittels, erste Abhandlung. Mit 11 Holzschnitten. 1887. 3 ℳ 20 ₰.

Leipzig, Mai 1887. S. Hirzel.

SITZUNGSBERICHTE
DER KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

KLEINERE ABHANDLUNGEN.

BERICHTE über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3) 1859 (4) 1860 (3) 1861 (2) 1862 (1) 1863 (2) 1864 (1) 1865 (1) 1866 (5) 1867 (4) 1868 (3) 1869 (4) 1870 (5) 1871 (7) 1872 (4 mit Beiheft) 1873 (7) 1874 (5) 1875 (4) 1876 (2) 1877 (2) 1878 (1) 1879 (1) 1880 (1) 1881 (1) 1882 (1) 1883 (1) 1884 (2) 1885 (3) 1886 (4 mit Supplement).

—— Philologisch-historischen Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2) 1859 (4) 1860 (4) 1861 (4) 1862 (1) 1863 (3) 1864 (3) 1865 (1) 1866 (4) 1867 (2) 1868 (3) 1869 (3) 1870 (3) 1871 (1) 1872 (1) 1873 (1) 1874 (2) 1875 (2) 1876 (1) 1877 (2) 1878 (3) 1879 (2) 1880 (2) 1881 (2) 1882 (1) 1883 (2) 1884 (4) 1885 (4) 1886 (2) 1887 (1).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 1 ℳ zu haben.

SCHRIFTEN
DER FÜRSTLICH-JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG.

ABHANDLUNGEN bei Begründung der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der 200jährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegebenen von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschn. und Kupfertaf. 61 Bogen in hoch 4⁰. 1846. broch. Preis 15 ℳ.

PREISSCHRIFTEN gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. (Nr. I der math.-naturw. Section.) hoch 4. 1847. 3 ℳ.
2. H. B. GEINITZ, Das Quadergebirge oder d. Kreideformation in Sachsen, mit Berücks. der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. (Nr. II d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. 1850. 1 ℳ 60 ₰.
3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. (Nr. III d. math.naturw. Sect.) hoch 4. 1851. 1 ℳ.
4. J. ZECH, Astron. Untersuchungen üb. die wichtigeren Finsternisse, welche v. d. Schriftstellern des class. Alterthums erwähnt werden. (Nr. IV d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. 1853. 2 ℳ.
5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und Flöhaer Kohlenbassins. (Nr. V d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 24 ℳ.
6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. (Nr. I der historisch-nationalökonomischen Section.) hoch 4. 1858. 8 ℳ.
7. H. WISKEMANN, Die antike Landwirthschaft und das von Thünensche Gesetz, aus den alten Schriftstellern dargelegt. (Nr. II d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1859. 2 ℳ 40 ₰.
8. K. WERNER, Urkundliche Geschichte der Iglauer Tuchmacher-Zunft. (Nr. III d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1861. 3 ℳ.
9. V. BÖHMERT, Beiträge zur Geschichte d. Zunftwesens. (Nr. IV d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1862. 4 ℳ.
10. H. WISKEMANN, Darstellung der in Deutschland zur Zeit der Reformation herrschenden nationalökonomischen Ansichten. (Nr. V d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1862. 4 ℳ.
11. E. L. ETIENNE LASPEYRES, Geschichte der volkswirthschaftl. Anschauungen der Niederländer und ihrer Litteratur zur Zeit der Republik. (Nr. VI d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1863. 8 ℳ.
12. J. FIKENSCHER, Untersuchung der metamorphischen Gesteine der Lunzenauer Schieferhalbinsel. (Nr. VI d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. 1867. 2 ℳ.
13. JOH. FALKE, Die Geschichte des Kurfürsten August von Sachsen in volkswirthschaftlicher Beziehung. (Nr. VII d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1868. 8 ℳ.
14. B. BÜCHSENSCHÜTZ, Die Hauptstätten des Gewerbfleisses im classischen Alterthume. (Nr. VIII d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1869. 2 ℳ 80 ₰.
15. H. BLÜMNER, Die gewerbliche Thätigkeit der Völker des classischen Alterthums. (Nr. IX d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1869. 4 ℳ.
16. H. ENGELHARDT, Flora der Braunkohlenformation im Königreich Sachsen. (Nr. VII d. math.-naturw. Sect.) Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1870. 12 ℳ.
17. H. ZEISSBERG, Die polnische Geschichtsschreibung des Mittelalters. (Nr. X d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1873. 12 ℳ.
18. A. WANGERIN, Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung. (Nr. VIII d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. 1875. 1 ℳ 20 ₰.
19. A. LESKIEN, Die Declination im Slavisch-Litauischen und Germanischen. (Nr XI d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1876. 5 ℳ.
20. R. HASSENCAMP, Ueber den Zusammenhang des lettoslavischen und germanischen Sprachstammes. (Nr. XII d. hist..nat. ök. Sect.) hoch 4. 1876. 3 ℳ.
21. R. PÖHLMANN, Die Wirthschaftspolitik der Florentiner Renaissance und das Princip der Verkehrsfreiheit. (Nr. XIII d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1878. 4 ℳ 20 ₰.
22. A. BRÜCKNER, Die slavischen Ansiedelungen in der Altmark und im Magdeburgischen. (Nr. XIV d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1879. 4 ℳ 20 ₰.
23. F. O. WEISE, Die Griechischen Wörter im Latein. (Nr. XV d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1882. 18 ℳ.
24. R. PÖHLMANN, Die Übervölkerung der antiken Grossstädte im Zusammenhange mit der Gesammtentwicklung städtischer Civilisation dargestellt. (Nr. XVI d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1884. 4 ℳ 20 ₰.
25. E. HASSE, Geschichte der Leipziger Messen. (Nr. XVII d. hist.-nat. ök. Sect.) hoch 4. 1885. 15 ℳ.
26. K. ROHN, Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung. Mit 2 Tafeln. (Nr. IX d. math.-naturw. Sect.) hoch 4. 1886. 2 ℳ.

Leipzig. S. Hirzel.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

SEB. SIMMEL
Buchbindermeister
MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Abhandlungen der Mathematisch-Physischen Klasse der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Bd.: 13. 1884/87 (1887)

Leipzig 1887

4 Acad. 78 fa,Math.phys.Kl.-13
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11468563-5